ECUACIONES DIFERENCIALES

Y Sus Aplicaciones

M. Braun

TRADUCTOR:
Dr. Ignacio Barradas Bribiesca

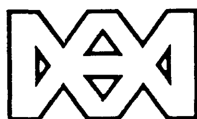
REVISORES EDITORIALES:
Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Dr. Miguel De Guzmán



Grupo Editorial Iberoamérica



ECUACIONES DIFERENCIALES y sus Aplicaciones



M. Braun

TRADUCTOR:

Dr. Ignacio Barradas Bribiesca
Centros de investigaciones en Matemáticas (CIMAT)
Guanajuato, México.

Revisores Editoriales:

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),
México, D.F.

Dr. Miguel de Guzmán
Asociación Matemática Española
Universidad Compluense, Madrid España.

Grupo Editorial Iberoamérica





Versión en español de la obra Differential Equations and Their Applications
por Martín Braun
Edición original en inglés publicada por Springer-Verlag New York, Inc.

ISBN 0-387-90806-4

ISBN 968-7270-58-6
Impreso en México

Editor: Nicolás Grepe P.
Productor: Enrique Fradera T.
Cubierta: Kooji Nishi, Ernesto Nakamura

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Río Ganges No. 64, Col. Cuauhtémoc, 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192, Tels. 511 25 17, 208 77 41, FAX 514 70 24
Reg. CNIEM 1382

Prólogo
A la Primera Edición



Este libro presenta una combinación de la teoría de las ecuaciones diferenciales y de sus interesantes aplicaciones en los problemas del "mundo real". Primero, y sobre todo, es un estudio riguroso de las ecuaciones diferenciales ordinarias y puede ser comprendido completamente por quien haya llevado un curso completo de un año en Cálculo. Además de las aplicaciones tradicionales, el texto incluye muchos problemas fascinantes de la "vida real". Estas aplicaciones son totalmente autosuficientes. Primero se plantea claramente el problema, y se formulan una o más ecuaciones difrenciales como modelo. Se encuentra la solución, y se comparan los resultados con los datos reales. En el texto se abarcan las siguientes aplicaciones:

1. En la Sección 1.3 se prueba que el hermoso cuadro "Los discípulos de Emaús", comprado por la Sociedad Rembrandt de Bélgica en 170 000 dólares es una moderna falsificación.
2. En la Sección 1.5 se deducen ecuaciones diferenciales que rigen el crecimiento poblacional de varias especies, y se comparan los resultados provenientes de los modelos, con los valores conocidos de las poblaciones.
3. En la Sección 1.6 se deducen ecuaciones diferenciales que gobiernan la tasa de variación según la cual los agricultores adoptan innovaciones. Sorprendentemente, las mismas ecuaciones diferenciales rigen la tasa de cambio o rapidez con la cual se adoptan innovaciones tecnológicas en industrias tan diversas como la del carbón, la el hierro y del acero, la de la cerveza y la del transporte por ferrocarril.
4. En la Sección 1.7 se trata de determinar si recipientes herméticamente sellados y llenos con material concentrado de desecho radiactivo, se dañan al sufrir un choque con el fondo del mar. En esta sección se describen también algunas alternativas

para obtener información sobre las soluciones de una ecuación que no se puede resolver explícitamente.

5. En la Sección 2.7 se deduce un modelo muy sencillo del sistema regulador de la glucosa en la sangre, y se obtiene un criterio suficientemente confiable para el diagnóstico de diabetes.
6. En la Sección 4.5 se describen dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a la evolución de la carrera armamentista y de la guerra. En la subsección 4.5.1 se discute la teoría de L.F. Richardson y se ajusta su modelo a la carrera armamentista que precedió a la Primera Guerra Mundial. Esta parte transmite también al lector una idea adecuada del concepto de estabilidad. En la Sección 4.5.2 se deducen dos modelos lanchesterianos del combate, y se ajusta uno de ellos con sorprendente exactitud a la batalla de Iwo Jima durante la Segunda Guerra Mundial.
7. En la Sección 4.10 se muestra por qué se incrementó notablemente la proporción de depredadores marinos (tiburones, mantarrayas, etc.) en las pesquerías en el puerto de Fiume, Italia, durante los años correspondientes a la Primera Guerra Mundial. La teoría que se desarrolla aquí también tiene aplicación espectacular en la rociadura de insecticidas.
8. En la Sección 4.1 se deduce el "principio de exclusión competitiva", el cual afirma esencialmente que dos espacios no pueden cubrir sus necesidades vitales de idéntica manera.
9. En la Sección 4.12 se estudia el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la diseminación de una epidemia en una población. Este modelo permite probar el famoso "teorema del umbral en epidemiología", el cual asegura que una epidemia ocurrirá solamente si el número de personas susceptibles a la enfermedad en cuestión excede un cierto valor. Se comparan también las predicciones del modelo con valores reales de una epidemia en Bombay.
10. En la Sección 4.13 se obtiene un modelo para la diseminación de la gonorrea y se prueba que uno de dos casos es posible: la enfermedad desaparece o bien el número de personas que padece el mal se aproxima a un valor fijo.

Este texto se distingue también por las siguientes características importantes:

1. En la Sección 1.10 se da una demostración completa del teorema de existencia y unicidad para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. la demostración está basada en el método de iteración de Picard y puede ser comprendida por quien haya llevado un curso completo de un año en Cálculo.
2. En la Sección 1.11 se muestra cómo resolver ecuaciones por iteración. Este material tiene la ventaja adicional de reforzar la comprensión de la demostración del teorema de existencia y unicidad.
3. Se dan programas en Fortran y APL para cada uno de los ejemplos numéricos del texto. Los problemas numéricos se encuentran en las secciones 1.13 a 1.17, los cuales tratan de la aproximación numérica para soluciones de ecuaciones diferenciales: en la Sección 1.11 se trata la resolución de las ecuaciones $x = f(x)$ y $g(x) = 0$, y en la Sección 2.8 se indica cómo obtener una solución de una ecuación diferencial en series de potencias, aun cuando no es posible resolver explícitamente la fórmula de recurrencia para determinar los coeficientes.
4. En el Apéndice C, se presenta una introducción integral del lenguaje de programación APL. Mediante este apéndice se ha enseñado APL a estudiantes en sólo dos lecciones.

5. Modestia aparte, la Sección 2.12 contiene un tratamiento sobresaliente y único de la función delta de Dirac. Estoy orgulloso de esta sección porque elimina todas las ambigüedades inherentes a la exposición tradicional del tema.
6. Toda el álgebra lineal necesaria para el estudio de sistemas de ecuaciones se presenta en las Secciones 3.1 a 3.7. Una ventaja del enfoque empleado aquí es que el lector adquiere una idea clara de conceptos muy importantes, pero extremadamente abstractos, como son: independencia lineal, generadores y dimensión. De hecho, muchos estudiantes de álgebra lineal se inscriben en nuestro curso de ecuaciones diferenciales para entender mejor lo que se expone en el suyo.

Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones puede utilizarse en un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias de uno o dos semestres. Está dirigido a estudiantes que hayan cursado dos semestres de Cálculo. Tradicionalmente los autores de un texto señalan una ''secuencia sugerida'' para el uso de su material. En nuestro caso no se da ninguna sugerencia, ya que hay una gran variedad de secuencias o planes. Únicamente baste mencionar que este libro puede servir para una gran variedad de cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Agradezco de manera especial la ayuda de las siguientes personas en la preparación del manuscrito: Douglas Reber, quien escribió los programas en Fortran; Eleanor Addison, quien dibujó las ilustraciones y Kate MacDougall, Sandra Spinacci y Miriam Green, quienes mecanografiaron partes del manuscrito.

Estoy muy agradecido con Walter Kaufmann-Bühler, el supervisor editorial general del departamento de matemáticas de Springer-Verlag, y con Elizabeth Kaplan, la supervisora editorial de producción, por su amplia ayuda y amabilidad durante la elaboración del original del libro. Es un placer trabajar con profesionales como ellos.

Por último, agradezco de manera especial a Joseph P. LaSalle por el apoyo y la ayuda que me brindó. Gracias nuevamente, Joe.

MARTIN BRAUN
Nueva York
Julio de 1976

CONTENIDO

4 TEORÍA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES 367

5 SEPARACIÓN DE VARIABLES Y SERIES DE FOURIER 469


FL
FreeLibros

1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 INTRODUCCIÓN

Este libro es un estudio de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Una ecuación diferencial es la relación que hay entre una función del tiempo y sus derivadas. Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 \operatorname{sen}(t+y) \tag{i}$$

y

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-y} + t + \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{ii}$$

El orden de una ecuación diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas de la función y que aparece en la ecuación. Así pues, (i) es una ecuación diferencial de primer orden y (ii) es una ecuación diferencial de tercer orden. Por solución de una ecuación diferencial se entenderá una función $y(t)$ que, junto con sus derivadas, satisface la relación. Por ejemplo, la función

$$y(t) = 2\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\cos 2t$$

es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos 2t$$

ya que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(2\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\cos 2t\right) + \left(2\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\cos 2t\right)$$
$$= \left(-2\operatorname{sen} t + \tfrac{4}{3}\cos 2t\right) + 2\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\cos 2t = \cos 2t.$$

Las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural en muchas áreas de las ciencias y de las humanidades. En este libro se presentan análisis serios sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a problemas tan diversos y fascinantes como la detección de falsificaciones en artículos de arte, diagnóstico de diabetes, incremento en el porcentaje de tiburones presentes en el Mar Mediterráneo durante la Primera Guerra Mundial y diseminación de la gonorrea. El propósito es mostrar cómo los investigadores han resuelto o tratado de resolver problemas de la *vida real* usando ecuaciones diferenciales. Al estudiar la utilidad de las ecuaciones diferenciales, se destacan también sus limitaciones y documentan algunos de sus fracasos.

1.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Se iniciará estudiando ecuaciones diferenciales de primer orden suponiendo que la ecuación tiene la forma o puede ser llevada a

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y). \tag{1}$$

El problema es entonces el siguiente: dada $f(t, y)$ encontrar todas las funciones $y(t)$ que satisfacen la ecuación diferencial (1). Este problema puede ser atacado de la siguiente manera. Un principio fundamental de las matemáticas es que la manera de resolver un nuevo problema es reducirlo, de alguna manera, a un problema que ya ha sido resuelto. En la práctica se hace esto repetidas veces hasta llegar a un problema que tiene las características de uno que ya se resolvió. Dado que por el momento el problema es resolver ecuaciones diferenciales, es recomendable hacer una lista de las ecuaciones diferenciales que *pueden* resolverse. Si se parte de la suposición de que los antecedentes matemáticos consisten solamente en Cálculo elemental se verá que la triste realidad es que la única ecuación diferencial de primer orden que es posible resolver es

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{2}$$

donde g es una función integrable del tiempo. Para resolver la ecuación (2), simplemente se integran ambos lados con respecto a t y se obtiene

$$y(t) = \int g(t)\,dt + c.$$

Aquí c es una constante arbitraria de integración y por $\int g(t)dt$ se representa una antiderivada de g; en otras palabras, una función cuya derivada es g. Por esto, para resolver cualquier otra ecuación diferencial hay que reducirla de alguna manera a la forma (2).

Como se verá en la Sección 1.9, esto es imposible de hacer en la mayoría de los casos. De aquí que no puedan resolverse la mayoría de las ecuaciones diferenciales sin la ayuda de una computadora. Todo esto hace parecer razonable que para encontrar aquellas ecuaciones diferenciales que es posible resolver, hay que empezar con ecuaciones simples, y no con una de la forma

$$\frac{dy}{dt} = e^{\operatorname{sen}(t-37\sqrt{|y|})}$$

(la cual, incidentalmente, no tiene solución exacta. La experiencia ha mostrado que las ecuaciones más simples son lineales con respecto a la variable dependiente y.

DEFINICIÓN. La ecuación diferencial lineal general de primer orden es

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t). \tag{3}$$

A menos que se indique lo contrario, se supone que las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son continuas en el tiempo. Esta ecuación se particulariza y se llama *lineal* porque la variable dependiente y aparece sola; es decir, no aparecen en la ecuación términos de la forma e^{-y}, y^3, $\operatorname{sen} y$, etc. Por ejemplo, $dy/dt = y^2 + \operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos y + t$ son ecuaciones *no lineales* debido a los términos y^2 y $\cos y$, respectivamente.

Por el momento no es claro cómo resolver la ecuación (3). Así pues, se simplifica aún más al hacer $b(t) = 0$.

DEFINICIÓN. La ecuación

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 \tag{4}$$

se llama ecuación diferencial lineal *homogénea* de primer orden, y la ecuación (3) se denomina ecuación diferencial lineal *no homogénea* de primer orden si $b(t)$ no es idénticamente igual a cero.

Por fortuna, la ecuación homogénea (4) puede resolverse fácilmente. Primero se dividen ambos lados de la ecuación entre y, y se esribe en la forma

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t).$$

Después se observa que

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} \equiv \frac{d}{dt}\ln|y(t)|$$

donde $\ln|y(t)|$ significa el logaritmo natural de $|y(t)|$. De aquí que la ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}\ln|y(t)| = -a(t). \tag{5}$$

Pero ésta es esencialmente la ecuación (2), ya que se pueden integrar ambos lados de la ecuación (5) para obtener

$$\ln|y(t)| = -\int a(t)\,dt + c_1$$

donde c_1 es una constante arbitraria de integración. Al aplicar exponenciales en ambos miembros se obtiene

$$|y(t)| = \exp\left(-\int a(t)\,dt + c_1\right) = c\exp\left(-\int a(t)\,dt\right)$$

o bien

$$\left|y(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)\right| = c. \tag{6}$$

Ahora $y(t)\exp\left(\int a(t)dt\right)$ es una función continua en el tiempo, y la ecuación (6) asegura que su valor absoluto es constante. Pero si el valor absoluto de una función y es constante, entonces la misma función g debe ser constante. Para demostrarlo obsérvese que si g no es constante, entonces existen dos tiempos diferentes t_1 y t_2 para los cuales $g(t_1) = c$, $g(t_2) = -c$. Por el teorema del valor medio del Cálculo, g debe tomar todos los valores entre $-c$ y c, lo cual es imposible si $|g(t)| = c$. De aquí se sigue que $y(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right) = c$, o bien,

$$y(t) = c\exp\left(-\int a(t)\,dt\right). \tag{7}$$

La ecuación (7) se llama *solución general* de la ecuación homogénea, ya que toda solución de (4) tiene esa forma. Obsérvese que en (7) aparece una constante arbitraria c. Esto no debe sorprender. En realidad, se espera que aparezca siempre una constante en la solución general de cualquier ecuación de primer orden. De hecho, si se da dy/dt y se desea recuperar $y(t)$, entonces es necesario realizar una integración y esto necesariamente involucra una constante arbitraria. Obsérvese también que la ecuación (4) tiene un número infinito de soluciones; para cada valor de c se obtiene una solución $y(t)$ diferente.

EJEMPLO 1 Obtener la solución general de la ecuación $(dy/dt) + 2ty = 0$.

SOLUCIÓN. En este caso, $a(t) = 2t$, así que $y(t) = c\exp\left(-\int 2t\,dt\right) = ce^{-t^2}$.

EJEMPLO 2 Determinar el comportamiento para $t \to \infty$ de todas las soluciones de la ecuación $(dy/dt) + ay = 0$, siendo a constante.

SOLUCIÓN. La solución general es $y(t) = c\exp\left(-\int a\,dt\right) = ce^{-at}$. De aquí que, si $a < 0$, todas las soluciones con excepción de $y = 0$ tienden a infinito. Si $a > 0$, todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

En las aplicaciones, usualmente no interesan todas las soluciones de (4). Más bien se busca una solución *específica* $y(t)$, que para un instante inicial t_0 toma el valor de y_0. Así pues, se desea determinar una función $y(t)$ tal que

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{8}$$

La ecuación (8) se conoce como un problema de valor inicial por la razón obvia de que de la totalidad de las soluciones de la ecuación diferencial, se busca una que inicialmente (en el instante t_0) tome el valor y_0. Para encontrar tal solución se integran ambos miembros de (5) de t_0 a t, obteniendo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\ln|y(s)|\,ds = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

y, por otro lado,

$$\ln|y(t)| - \ln|y(t_0)| = \ln\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds.$$

Al aplicar exponenciales en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

o bien

$$\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\right| = 1.$$

La función dentro del signo de valor absoluto es una función continua en el tiempo. Por eso, y por el argumento antes mencionado, debe ser igual a $+1$ o a -1. Para determinar cuál de los dos valores es el correcto, se evalúa la expresión en el punto t_0:

$$\frac{y(t_0)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,ds\right) = 1$$

se observa que

$$\frac{y(t)}{y(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) = 1.$$

y de aquí se sigue que

$$y(t) = y(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) = y_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right).$$

EJEMPLO 3 Obtener la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}+(\operatorname{sen} t)y=0, \qquad y(0)=\tfrac{3}{2}.$$

SOLUCIÓN. Aquí $a(t) = \operatorname{sen} t$, así que

$$y(t)=\tfrac{3}{2}\exp\left(-\int_0^t \operatorname{sen} s\, ds\right)=\tfrac{3}{2}e^{(\cos t)-1}.$$

EJEMPLO 4 Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}+e^{t^2}y=0, \qquad y(1)=2.$$

SOLUCIÓN. Aquí $a(t) = e^{t^2}$, así que

$$y(t)=2\exp\left(-\int_1^t e^{s^2}\, ds\right).$$

Ahora bien, a primera vista parecería que este problema representa una dificultad muy seria, ya que no es posible integrar directamente e^{s^2}. Sin embargo, esta solución es tan válida e igualmente útil que la solución del Ejemplo 3. Esto por dos razones: primero, hay métodos numéricos muy simples para calcular el valor de la integral con cualquier grado de precisión con ayuda de una computadora. Segundo, a pesar de que la solución del Ejemplo 3 está dada explícitamente, aún no es posible evaluarla para un tiempo arbitrario t sin la ayuda de una tabla de funciones trigonométricas o algún otro tipo de apoyo para hacer cálculos, como son una calculadora electrónica o una computadora digital.

Ahora es posible regresar a la ecuación no homogénea

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=b(t).$$

A partir del análisis de la ecuación homogénea es claro que el camino que hay que seguir para resolver la ecuación no homogénea es expresarla en la forma

$$\frac{d}{dt}(\text{``algo''})=b(t)$$

y después integrar ambos lados para despejar ese "algo". Sin embargo, la expresión $(dy/dt) + a(t)y$ no parece ser la derivada de alguna expresión simple. Es por ello que el siguiente paso lógico en el análisis debe ser preguntarse: ¿Es posible hacer que el lado izquierdo de la ecuación sea la derivada, con respecto a t, de "algo"? Dicho con más precisión, al multiplicar ambos lados de (3) por una función continua $\mu(t)$ se obtiene una ecuación equivalente.

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+a(t)\mu(t)y=\mu(t)b(t). \tag{9}$$

(Por ecuaciones equivalentes se entiende que toda solución de (9) es una solución de (3), y viceversa). Así pues, ¿es posible *elegir* $\mu(t)$, de manera que $\mu(t)(dy/dt) + a(t)\mu(t)y$ sea la derivada de alguna expresión simple? La respuesta a esta pregunta es sí, y se obtiene mediante la siguiente observación

$$\frac{d}{dt}\mu(t)y=\mu(t)\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y.$$

De aquí que $\mu(t)(dy/dt) + a(t)\mu(t)y$ será igual a la derivada de $\mu(t)y$, si y sólo si $d\mu(t)/dt = a(t)\mu(t)$. Pero ésta es una ecuación lineal homogénea de primer orden con respecto a $\mu(t)$, es decir, $(d\mu/dt) - a(t)\mu = 0$, la cual ya se sabe resolver. Además, dado que se requiere solamente una función $\mu(t)$, puede darse el valor de 1 a la constante c en (7) y

$$\mu(t)=\exp\left(\int a(t)\,dt\right).$$

Para esta $\mu(t)$, la ecuación (9) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\mu(t)y=\mu(t)b(t). \qquad (10)$$

Para obtener la solución general de la ecuación no homogénea (3), es decir, para encontrar todas las soluciones de la ecuación no homogénea, se integran ambos miembros de (10), o sea, se sacan antiderivadas, y se obtiene

$$\mu(t)y=\int\mu(t)b(t)\,dt+c$$

o bien

$$y=\frac{1}{\mu(t)}\left(\int\mu(t)b(t)\,dt+c\right)=\exp\left(-\int a(t)\,dt\right)\left(\int\mu(t)b(t)\,dt+c\right). \qquad (11)$$

Por otro lado, si se quiere la solución específica de (3) que satisface la condición inicial $y(t_0) = y_0$, es decir, si se desea resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}+a(t)y=b(t), \qquad y(t_0)=y_0$$

entonces se toma la integral definida en ambos lados de (10) de t_0 a t, para obtener

$$\mu(t)y-\mu(t_0)y_0=\int_{t_0}^{t}\mu(s)b(s)\,ds$$

o bien

$$y=\frac{1}{\mu(t)}\left(\mu(t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}\mu(s)b(s)\,ds\right). \qquad (12)$$

OBSERVACIÓN 1. Nótese la utilidad de conocer la solución de la ecuación homogénea para encontrar la función $\mu(t)$ que permitió resolver la ecuación no homogénea. Este es un magnífico ejemplo de cómo usar la solución conocida de un problema sencillo para resolver un problema difícil.

OBSERVACIÓN 2. La función $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$ se conoce con el nombre de *factor integrante* de la ecuación no homogénea, ya que después de multiplicar ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$ puede integrarse inmediatamente para obtener todas las soluciones.

OBSERVACIÓN 3. El lector no debe memorizar las fórmulas (11) y (12). Más bien tratará de resolver la ecuación no homogénea multiplicando primero ambos lados por $\mu(t)$, escribiendo el lado izquierdo como la derivada de $\mu(t)y(t)$, y finalmente integrando ambos miembros de la ecuación.

OBSERVACIÓN 4. Otra manera de resolver el problema de valor inicial $(dy/dt) + a(t)y = b(t)$, $y(t_0) = y_0$ es encontrar la solución general (11) de (3) y después usar la condición inicial $y(t_0) = y_0$ para calcular el valor constante c. Si la función $\mu(t)b(t)$ no puede integrarse directamente entonces hay que obtener la integral definida de (10) para obtener (12) y aproximar numéricamente esta ecuación.

EJEMPLO 5 Obtener la solución general de la ecuación $(dy/dt) - 2ty = t$.

SOLUCIÓN. Aquí $a(t) = -2t$, así que

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\,dt\right) = \exp\left(-\int 2t\,dt\right) = e^{-t^2}.$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$ se obtiene la siguiente ecuación equivalente

$$e^{-t^2}\left(\frac{dy}{dt} - 2ty\right) = te^{-t^2}, \text{ o bien, } \frac{d}{dt}e^{-t^2}y = te^{-t^2}.$$

De aquí se sigue que

$$e^{-t^2}y = \int te^{-t^2}dt + c = \frac{-e^{-t^2}}{2} + c$$

y

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} + ce^{t^2}.$$

EJEMPLO 6 Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t, \qquad y(1) = 2.$$

SOLUCIÓN. Aquí $a(t) = 2t$, así que

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\,dt\right) = \exp\left(\int 2t\,dt\right) = e^{t^2}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$ se obtiene

$$e^{t^2}\left(\frac{dy}{dt} + 2ty\right) = te^{t^2}, \text{ o bien, } \frac{d}{dt}(e^{t^2}y) = te^{t^2}.$$

De modo que

$$\int_1^t \frac{d}{ds} e^{s^2} y(s)\, ds = \int_1^t s e^{s^2}\, ds$$

así pues

$$e^{s^2} y(s)\Big|_1^t = \frac{e^{s^2}}{2}\Big|_1^t.$$

Como consecuencia

$$e^{t^2} y - 2e = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e}{2}$$

y

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3e}{2} e^{-t^2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} e^{1-t^2}.$$

EJEMPLO 7 Encontrar la solución del problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{1+t^2}, \quad y(2) = 3.$$

SOLUCIÓN. Aquí $a(t) = 1$, así que

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\, dt\right) = \exp\left(\int 1\, dt\right) = e^t.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$ se obtiene

$$e^t\left(\frac{dy}{dt} + y\right) = \frac{e^t}{1+t^2}, \text{ o bien, } \frac{d}{dt} e^t y = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_2^t \frac{d}{ds} e^s y(s)\, ds = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds,$$

así que

$$e^t y - 3e^2 = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds$$

y

$$y = e^{-t}\left[3e^2 + \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds\right].$$

EJERCICIOS

En cada uno de los problemas 1 a 7 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dt} + y\cos t = 0$

2. $\dfrac{dy}{dt} + y\sqrt{t}\,\operatorname{sen} t = 0$

3. $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{2t}{1+t^2}y=\dfrac{1}{1+t^2}$

4. $\dfrac{dy}{dt}+y=te^t$

5. $\dfrac{dy}{dt}+t^2y=1$

6. $\dfrac{dy}{dt}+t^2y=t^2$

7. $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{t}{1+t^2}y=1-\dfrac{t^3}{1+t^4}y$

En cada uno de los problemas 8 a 14 halle la solución de valor inicial dado.

8. $\dfrac{dy}{dt}+\sqrt{1+t^2}\,y=0,\qquad y(0)=\sqrt{5}$

9. $\dfrac{dy}{dt}+\sqrt{1+t^2}\,e^{-t}y=0,\qquad y(0)=1$

10. $\dfrac{dy}{dt}+\sqrt{1+t^2}\,e^{-t}y=0,\qquad y(0)=0$

11. $\dfrac{dy}{dt}-2ty=t,\qquad y(0)=1$

12. $\dfrac{dy}{dt}+ty=1+t,\qquad y(\tfrac{3}{2})=0$

13. $\dfrac{dy}{dt}+y=\dfrac{1}{1+t^2},\qquad y(1)=2$

14. $\dfrac{dy}{dt}-2ty=1,\qquad y(0)=1$

15. Obtenga la solución general de la ecuación

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt}+ty=(1+t^2)^{5/2}.$$

(*Sugerencia:* Divida ambos lados de la ecuación entre $1+t^2$).

16. Halle la solución del problema de valor inicial

$$(1+t^2)\frac{dy}{dt}+4ty=t,\qquad y(1)=\tfrac{1}{4}.$$

17. Encuentre una solución continua del problema de valor inicial

$$y'+y=g(t),\qquad y(0)=0$$

donde

$$g(t)=\begin{cases}2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0, & t>1\end{cases}$$

18. Demuestre que toda solución de la ecuación $(dy/dt)+ay=be^{-ct}$, donde a y c son constantes positivas y b es cualquier número real, tiende a cero cuando t tiende a infinito.

19. Dada la ecuación diferencial $(dy/dt)+a(t)y=f(t)$ con $a(t)$ y $f(t)$ funciones continuas en $-\infty<t<\infty$, $a(t)\geq c>0$, y $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$, demuestre que toda solución tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Al buscar la solución de la ecuación no homogénea se supuso tácitamente que las funciones $a(t)$ y $b(t)$ eran continuas, de tal forma que se pudieran llevar a cabo las integraciones necesarias. Si alguna de estas funciones fuera discontinua en el punto t_1, entonces se esperaría que las soluciones pudieran ser discontinuas para $t=t_1$. Los problemas del 20 al 23 ilustran la variedad de cosas que pueden ocurrir. En los problemas 20 a 22 determine el comportamiento de todas las soluciones de las ecuaciones diferenciales

dadas cuando $t \to 0$, y en el problema 23 determine el comportamiento de todas las soluciones cuando $t \to \pi/2$:

20. $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=\frac{1}{t^2}$

21. $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sqrt{t}}y=e^{\sqrt{t}/2}$

22. $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=\cos t+\frac{\operatorname{sen} t}{t}$

23. $\frac{dy}{dt}+y\tan t=\operatorname{sen} t\cos t.$

1.3 LA FALSIFICACIÓN DE OBRAS DE ARTE POR VAN MEEGEREN

Después de la liberación de Bélgica durante la Segunda Guerra Mundial, el departamento holandés de seguridad inició una cacería de colaboradores de los nazis. En los archivos de una compañía que había vendido numerosas obras de arte a los alemanes descubrieron el nombre de un banquero que había actuado como intermediario en la venta a Hermann Goering del cuadro *Mujer en Adulterio* del famoso pintor holandés de siglo XVII Jan Veermer. El banquero resultó ser representante de un pintor holandés de tercera, H.A. Van Meegeren. El 29 de mayo de 1945 este último fue arrestado bajo el cargo de colaboración con el enemigo. El 12 de julio de 1945 Van Meegeren sorprendió al mundo anunciando que él no había vendido *Mujer en Adulterio* a Goering. Más aún, afirmó que ese cuadro y el bello y famoso *Los Discípulos en Emaús*, así como otros cuatro supuestos Vermeers y dos Hoogs (pintor holandés del siglo XVII) eran obras suyas. Mucha gente creyó, sin embargo, que Van Meegeren estaba mintiendo únicamente para librarse del cargo de traición. Para demostrar su afirmación Van Meegeren inició una falsificación del cuadro de Vermeer *Jesús entre los Doctores*, para demostrar a los escépticos cuán buen falsificador de Vermeer era. El trabajo estaba casi terminado cuando Van Meegeren recibió la noticia de que el cargo de falsificación había sido sustituido por el de colaboración. Fue por eso que se rehusó a terminar y envejecer su cuadro con la esperanza de que los investigadores no descubrieran su secreto para envejecer las pinturas. Para resolver la pregunta se llamó a un grupo internacional de distinguidos químicos, físicos e historiadores de arte. El grupo tomó placas de rayos X del cuadro para determinar si había otros cuadros debajo. Además, se analizaron los pigmentos (materias colorantes) usados en la pintura y se examinaron los cuadros respecto a ciertos signos de envejecimiento.

Pero, Van Meegeren conocía bien esos métodos. Para evitar la detección había raspado la pintura de otros cuadros antiguos de menor valor para obtener los lienzos y había tratado de usar los pigmentos que emplearía Vermeer. Van Meegeren sabía también que la pintura vieja era extremadamente dura e imposible de disolver. Por eso, inteligentemente mezcló fenoformaldehído con la pintura. Esta sustancia química se endurecía como baquelita, al calentar en un horno el cuadro terminado.

Sin embargo, Van Meegeren fue descuidado con algunas de sus falsificaciones y el grupo de expertos encontró restos de un pigmento moderno, cobalto azul. Además detectaron en varios de sus cuadros el fenoformaldehído, el cual fue descubierto a principios del siglo XIX. Con base en la evidencia, Van Meegeren fue declarado culpable

de falsificación el 12 de octubre de 1947 y sentenciado a un año de prisión. Estando en reclusión sufrió un ataque cardíaco y murió el 30 de diciembre de 1947.

A pesar de la evidencia reunida por el grupo de expertos, mucha gente se rehusaba a creer que el famoso cuadro *Los Discípulos de Emaús* fuera una falsificación de Van Meegeren. Su objeción se basaba en el hecho de que las otras falsificaciones y el cuadro casi concluido *Jesús entre los Doctores* de Van Meegeren eran de una calidad muy inferior. Afirmaban que el creador del hermoso cuadro *Los Discípulos de Emaús* no podría producir obras de tan poca calidad. De hecho, este cuadro fue certificado como un Vermeer auténtico por el distinguido historiador del arte A. Bredius y comprado por la Sociedad Rembrandt en 170 000 (dólares). La respuesta del grupo para los escépticos fue que debido a que Van Meegeren estaba profundamente disgustado por la falta de reconocimiento en el mundo artístico, trabajó entonces en *Los Discípulos de Emaús* con la firme determinación de probar que era más que un pintor de tercera. Después de producir esa obra maestra, su determinación desapareció. Más aún, después de advertir cuán fácilmente logró el éxito con *Los Discípulos de Emaús*, dedicó menos esfuerzo a sus posteriores falsificaciones. Esta explicación no dejó satisfechos a los escépticos, quienes exigían una demostración científica y contundente de que la obra citada era realmente una falsificación. Eso hicieron recientemente, en 1967, un grupo de científicos de la Carnegie University Mellon, su trabajo se describe a continuación.

El punto clave en la determinación de la edad de una pintura u otros materiales tales como rocas y fósiles es el fenómeno de la radiactividad, descubierto a principios de siglo. El físico Rutherford y sus colaboradores mostraron que los átomos de ciertos elementos "radiactivos" son inestables y que, en un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. Ya que la radiactividad es una propiedad del átomo, Rutherford mostró que la radiactividad de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma. De modo que si $N(t)$ denota el número de átomos existentes en el tiempo t, entonces dN/dt, el número de átomos que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional a N, es decir,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{1}$$

La constante λ, que es positiva, se conoce como constante de decaimiento o decrecimiento de la sustancia. Cuanto mayor sea λ, obviamente la sustancia decrecerá más rápidamente. Una medida de la rapidez de desintegración de una sustancia es su *semivida* (o *vida media*),* la cual se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de los átomos iniciales de una sustancia radiactiva. Para calcular la semivida de una sustancia en términos de λ, supóngase que en un tiempo t_0, $N(t_0) = N_0$. Entonces, la solución al problema de valor inicial es

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\lambda \int_{t_0}^{t} ds\right) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

o bien, $N/N_0 = \exp(-\lambda(t - t_0))$. Tomando logaritmos en ambos lados se obtiene

$$-\lambda(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0}. \tag{2}$$

* (N. del R.) El término "vida media" es una traducción incorrecta del inglés *half-life*. El nombre correcto ya aceptado es *semivida*.

De modo que, si $N/N_0 = \frac{1}{2}/2$, entonces $-\lambda(t - t_0) = \ln\frac{1}{2}$, así que

$$(t - t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda}. \tag{3}$$

En consecuencia, la semivida de una sustancia es ln 2 dividido entre la constante de decaimiento λ. La dimensión de λ, que se omitió para simplificar la notación, es el recíproco del tiempo. Si t se mide en años, entonces λ es el recíproco de años, y si t se mide en minutos, entonces λ es el recíproco de minutos. Se ha determinado y registrado la semivida de muchas sustancias. Por ejemplo, la semivida del carbono 14 es de 5568 años, y la del uranio 238, 4500 millones de años.

Ahora bien, la base de la determinación de edades por medio de material radiactivo es la siguiente: de la ecuación (2) se puede despejar $t - t_0 = 1/\lambda \ln(N_0/N)$. Si t_0 es el tiempo en el que la sustancia se formó o elaboró, entonces la edad de la misma es $1/\lambda \ln(N_0/N)$. La constante de decaimiento se conoce o puede calcularse en la mayoría de los casos. Más aún, usualmente es posible calcular N con facilidad. Así pues, si se conociera N_0 podría calcularse la edad de la sustancia. Esto claramente representa un problema, ya que por lo común no se conoce N_0. En algunos casos, sin embargo, es factible calcular a N_0 indirectamente o al menos algún intervalo confiable en el que se deba encontrar. Tal es el caso de las falsificaciones de Van Meegeren.

Los siguientes hechos de la química elemental son bien conocidos. Casi cualquier roca de la corteza terrestre contiene una pequeña cantidad de uranio. El uranio en las rocas decae en otro elemento radiactivo y éste en otro, y así sucesivamente (Fig. 1) hasta llegar al plomo, el cual ya no es radiactivo. El uranio (cuya semivida es superior a los cuatro mil millones de años) suministra los elementos que le siguen en la cadena, de manera que tan pronto como decaen son reemplazados por los elementos precedentes.

Ahora bien, todas las pinturas contienen pequeñas cantidades del elemento radiactivo plomo 210 (Pb^{210}) y cantidades aún menores de radio 226 (Ra^{226}), ya que estos elementos están contenidos en el plomo blanco (óxido de plomo) que es un pigmento que los artistas han usado por más de 2000 años. Para el análisis que se llevará a cabo a continuación, es importante notar que el plomo blanco se obtiene de plomo metálico, el cual a su vez se extrae de una roca llamada mineral o mena de plomo, mediante un proceso conocido como fundición. En este proceso el plomo 210 en el mineral va junto en el plomo metálico. Sin embargo, entre 90% y 95% del radio y sus derivados se eliminan junto con otros productos secundarios en un material llamado escoria. Así pues, la mayor parte de la fuente de plomo 210 queda eliminada y éste empieza a decaer muy rápido, con una semivida de 22 años. Tal proceso continúa hasta que el plomo 210 en el plomo blanco se encuentra una vez más en equilibrio radiactivo con la pequeña cantidad presente de radio; es decir, la desintegración del plomo 210 se equilibra exactamente con la desintegración del radio.

Ahora se usará esta información para calcular la cantidad de plomo 210 presente en una muestra, en términos de la cantidad original presente en el momento de la manufactura. Sea $y(t)$ la cantidad de plomo 210 poi gramo de plomo blanco en el tiempo t, y sea y_0 la cantidad de plomo 210 poi gramo de plomo blanco en el tiempo de la manufactura t_0; así mismo, sea $r(t)$ el número de desintegraciones de radio 226 por minuto y por gramo de plomo blanco en el tiempo t. Si λ es la constante de decaimiento del plomo 210, entonces.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{4}$$

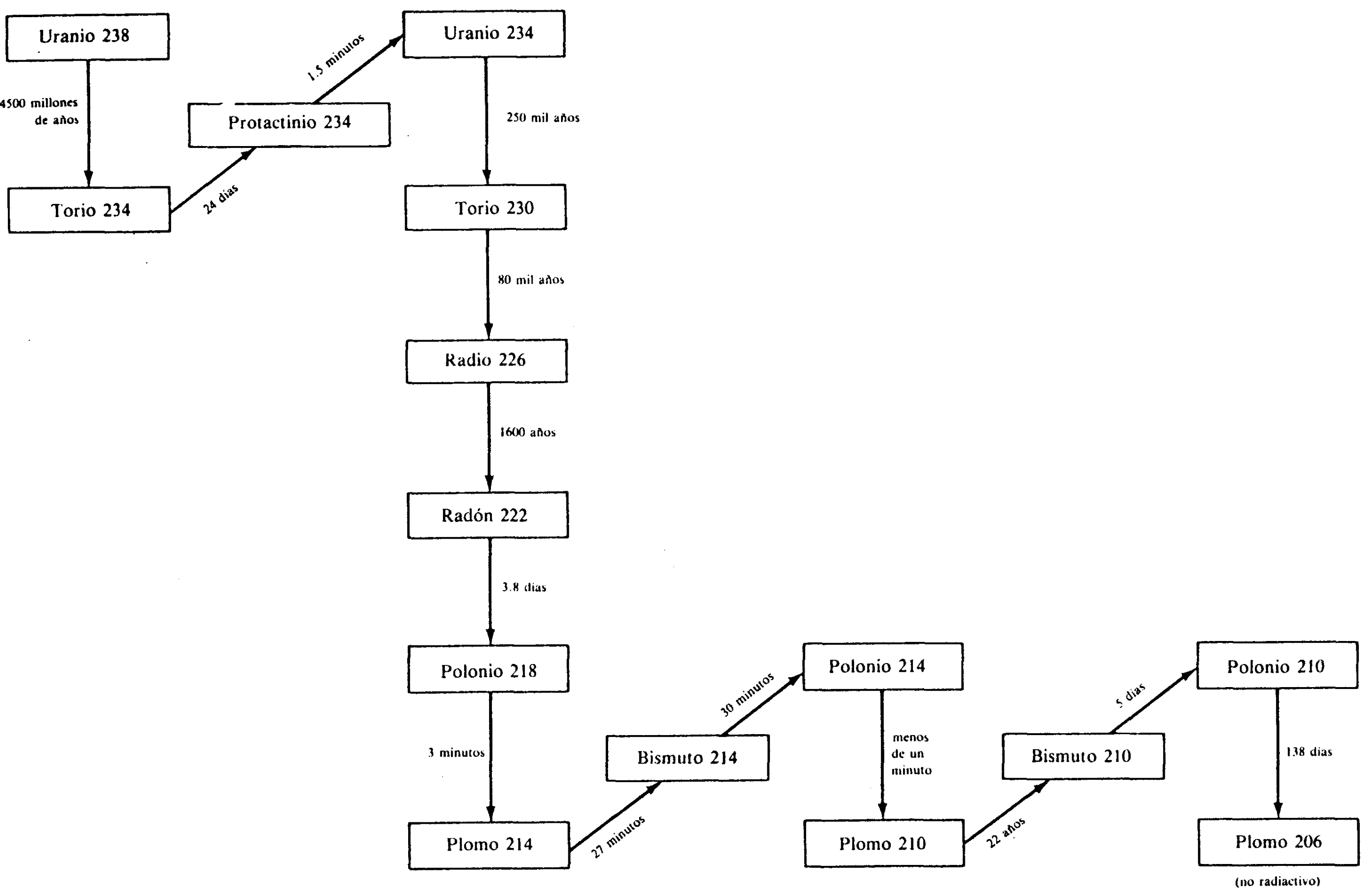


FIGURA 1. La serie del uranio. (Los tiempos sobre las flechas corresponden a la semi-vida de cada etapa.)

Dado que sólo interesa un periodo de por lo menos 300 años, se supondrá que la cantidad de radio 226, cuya semivida es de 1800 años, permanece constante, de modo que $r(t)$ es una constante r. Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(t) = e^{\lambda t}$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}y = re^{\lambda t}.$$

De aquí se sigue

$$e^{\lambda t}y(t) - e^{\lambda t_0}y_0 = \frac{r}{\lambda}(e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0})$$

o bien

$$y(t) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{5}$$

Por lo tanto, $y(t)$ y r pueden medirse fácilmente. De modo que si se conociera y_0 podría usarse la ecuación (5) para calcular $(t - t_0)$ y con ello determinar la edad de la pintura. Sin embargo, como ya se mencionó, no es posible medir y_0 directamente. Un camino para salir de esta dificultad es el hecho de que la cantidad original de plomo 210 se encontraba en equilibrio radiactivo con la cantidad aún mayor de radio 226 en la mena de la cual se extrajo el metal. Una opción es tomar muestras de diferentes minerales y contar el número de desintegraciones de radio 226. Esto fue hecho en una variedad de menas y los resultados se describen en la Tabla 1. Tales cifras varían de 0.18 a 140. En consecuencia, el número de desintegraciones de plomo 210 por minuto y por gramo de plomo blanco en el momento de la manufactura variará de 0.18 a 140. Esto implica que y_0 variará también en un intervalo grande, ya que el número de desintegraciones de plomo 210 es proporcional a la cantidad presente. Así pues, no se puede usar la ecuación (5) para obtener una aproximación exacta o siquiera una aproximación burda de la edad de la pintura.

TABLA 1. Muestras de mineral y mineral concentrado. La desintegración está dada por gramo de plomo blanco

Descripción y Procedencia		Desintegraciones por minuto de Ra^{226}
Mineral concentrado	(Oklahoma-Kansas)	4.5
Mineral en bruto triturado	(S.E. Missouri)	2.4
Mineral concentrado	(S.E. Missouri)	0.7
Mineral concentrado	(Idaho)	2.2
Mineral concentrado	(Idaho)	0.18
Mineral concentrado	(Washington)	140.0
Mineral concentrado	(Columbia Británica)	1.9
Mineral concentrado	(Columbia Británica)	0.4
Mineral concentrado	(Bolivia)	1.6
Mineral concentrado	(Australia)	1.1

Sin embargo, es posible usar la ecuación (5) para distinguir entre una pintura del Siglo XVII y una falsificación moderna. La base para esta afirmación es la sencilla observación de que si la pintura es muy antigua comparada con la semivida de 22 años del plomo, entonces la radiactividad del plomo 210 en la pintura será casi igual a

la del radio en la pintura. Por otra parte, si la pintura es moderna (alrededor de 20 años antigüedad) entonces la radiactividad del plomo 210 será mucho mayor que la del radio.

Este argumento se precisa de la siguiente manera: supóngase que la pintura en cuestión es muy reciente o de hace aproximadamente 300 años. Hágase $t - t_0 = 300$ en (5). Entonces, después de un poco de álgebra se ve que

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1). \tag{6}$$

Si la pintura realmente es una falsificación moderna, entonces λy_0 será extremadamente grande. Para determinar cuán grande es una tasa de desintegración se observa (Ejercicio 1) que si el plomo 210 decae originalmente (en el momento de la manufactura) a una tasa o rapidez de 100 desintegraciones por minuto por gramo de plomo blanco, entonces el mineral del que se extrajo tenía una concentración de uranio de aproximadamente 0.014%. Esta es una concentración muy alta de uranio, ya que la cantidad promedio de uranio en las rocas de la corteza terrestre es aproximadamente de 2.7 partes por millón. Por otro lado, existen muestras muy extrañas, encontradas en el hemisferio norte, cuyo contenido de uranio es de 2 a 3%. Para tener seguridad se dirá que la tasa de desintegración del plomo 210 es absurda si excede de 30 000 desintegraciones por minuto por gramo de plomo blanco.

Para evaluar λy_0 hay que calcular la tasa de desintegración actual, $\lambda y(t)$, del plomo 210, la tasa de desintegración del radio 226 y $e^{300\lambda}$. Dado que la tasa del polonio 210 (Po^{210}) es igual a la del plomo 210 después de varios años y la tasa de desintegración del polonio 210 es más fácil de medir, se sustituyen los valores del plomo 210 por los del polonio. Para calcular $e^{300\lambda}$ se observa de (3) que $\lambda = (\ln 2/22)$. De aquí se sigue que

$$e^{300\lambda} = e^{(300/22)\ln 2} = 2^{(150/11)}.$$

Las tasas de desintegración del polonio 210 y del radio 226 se midieron en el caso de *Los Discípulos de Emaús* y de varias otras supuestas falsificaciones; los valores aparecen en la Tabla 2.

TABLA 2. Pinturas de procedencia dudosa. La desintegración está dada en minutos, por gramo de plomo blanco

Descripción	Desintegración del Po^{210}	Desintegración de Ra^{226}
Los Discípulos de Emaús	8.5	0.8
El Lavado de Pies	12.6	0.26
Mujer Leyendo Música	10.3	0.3
Mujer Tocando Mandolina	8.2	0.17
Tejedora de Encaje	1.5	1.4
Mujer Sonriente	5.2	6.0

Si ahora se calcula λy_0 a partir de (6) para el plomo blanco en la pintura *Los Discípulos de Emaús* se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda y_0 &= (8.5)2^{150/11} - 0.8(2^{150/11} - 1)\\ &= 98.050\end{aligned}$$

lo cual no puede ser aceptado en absoluto. Así que dicha pintura debe ser una falsificación moderna. Por medio de un análisis similar (Ejercicios del 2 al 4) se demostró irrefutablemente que las pinturas *El Lavado de Pies*, *Mujer Leyendo Música* y *Mujer Tocando Mandolina* eran falsos Vermeers. Por otro lado, los cuadros *Tejedora de Encaje* y *Mujer sonriente* no pueden ser falsificaciones recientes de Vermeer, como afirman algunos expertos, ya que para estas dos pinturas, el polonio 210 está casi en equilibrio radiactivo con el radio 226, cosa que no se ha observado en ninguna muestra de cuadros de los siglos XIX y XX.

BIBLIOGRAFÍA

Coremans, P., *Van Meegerer's Faked Vermeers and De Hoogs*, Maulenhoff, Amsterdam, 1949.

Keisch, B., Feller, R.L., Levine, A.S., Edwards, P.R., Dating and Authenticating Works of Art by Measurement of Natural Alpha Emmiter, *Science* (155), pág. 1238-1241, marzo, 1967.

Keisch, B., Dating Works of Art through their Natural Radioactivity: Improvements and Applications, *Science* (160), pág. 413-415, abril, 1968.

EJERCICIOS

1. En este ejercicio se muestra cómo calcular la concentración de uranio en un mineral a partir de las desintegraciones por minuto y por gramo de plomo [dpm/(g Pb)] del plomo 210 en el mineral.
   (a) La semivida del uranio 238 es de 4.51×10^9 años. Dado que esta semivida es tan larga, puede suponerse que la cantidad de uranio en la mena es constante durante un periodo de doscientos o trescientos años. Denote por $N(t)$ el número de átomos de U^{238} por gramo de plomo común en la mena en el tiempo t. Como el plomo 210 está en equilibrio radiactivo con el uranio en el mineral, se sabe que $dN/dt = -\lambda N = -100$ dpm/g Pb en el tiempo t_0. (*Sugerencia:* 1 año = 525 600 minutos.)
   (b) A partir del hecho de que un mol de uranio 238 pesa 238 gramos y que hay 6.02×10^{23} átomos en un mol, demuestre que la concentración de uranio en la mena es de aproximadamente 0.014%.

En cada una de las pinturas 2, 3 y 4 use los datos de la Tabla 2, para calcular la actividad en desintegraciones por minuto de la cantidad original de plomo 210 por gramo de plomo blanco y concluya que todas estas pinturas son falsos Vermeers.

2. *El Lavado de Pies.*
3. *Mujer Leyendo Música.*
4. *Mujer Tocando Mandolina.*
5. El siguiente problema describe una deducción muy precisa de la edad del uranio.
   (a) Denote por $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ el número de átomos de U^{238} y U^{235} en el tiem-

po t en una muestra de uranio, y tome como $t = 0$ el instante en el que esta muestra fue creada. Por la ley de decaimiento radiactivo

$$\frac{d}{dt}N_{238}(t) = \frac{-\ln 2}{(4.5)10^9}N_{238}(t),$$

$$\frac{d}{dt}N_{235}(t) = \frac{-\ln 2}{0.707(10)^9}N_{235}(t).$$

Resuelva estas ecuaciones para evaluar $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ en términos de los números iniciales $N_{238}^{(0)}$ y $N_{235}^{(0)}$.

(b) En 1949 la relación de U^{238} y U^{235} en una muestra era de 137 a 8. Suponiendo que, en el momento de la creación de una muestra, aparecieron iguales cantidades de U^{238} y U^{235}, demuestre que la edad del uranio es de 5.96×10^9 años. Este valor es universalmente aceptado como la edad de dicho elemento.

6. En una muestra de samarskita descubierta recientemente había 3 gramos de torio (Th^{232}). El torio decae a plomo 208 (Pb^{208}) mediante la reacción $Th^{232} \rightarrow Pb^{208} + 6(4He^4)$. Se determinó que se producían 0.0376 gramos de plomo 208 por la desintegración del torio original en la muestra. Sabiendo que la semivida del torio es de 13 900 millones de años, calcule la edad de esta muestra de samarskita. (*Sugerencia:* 0.0376 gramos de Pb^{208} son el producto del decaimiento de $(232/208) \times 0.0376$ gramos de Torio.)

Uno de los métodos más precisos para determinar la edad de restos arqueológicos es el método del carbono 14 (C^{14}) descubierto por Willard Libby alrededor de 1949. El principio de este método es maravillosamente simple: La atmósfera de la Tierra es bombardeada constantemente por los rayos cósmicos. Éstos producen neutrones en la atmósfera, los cuales se combinan con nitrógeno para producir C^{14}, que se conoce como radiocarbono, ya que declina radiactivamente. Ahora bien, dicho radiocarbono se incorpora al dióxido de carbono y se desplaza así en la atmósfera para ser absorbido por los vegetales. Los animales, a su vez, incorporan radiocarbono a sus tejidos al comer las plantas. En los tejidos vivientes, la tasa de ingestión de C^{14} está exactamente en equilibrio con la tasa de desintegración de C^{14}. Sin embargo, cuando un organismo muere, deja de incorporar C^{14} y, así la concentración de C^{14} presente comienza a decrecer. Ahora bien, una suposición fundamental de la física es que la tasa de bombardeo de la atmósfera terrestre por los rayos cósmicos ha permanecido constante. Esto implica que la tasa original de desintegración del C^{14} en una muestra como el carbón vegetal es igual a la tasa medida hoy en día.* Esta suposición permite determinar la edad de una muestra de carbón vegetal. Denótese por $N(t)$ la cantidad de carbono 14 presente en una muestra en el tiempo t, y por N_0 la cantidad existente en tiempo $t = 0$, cuando la muestra se formó. Si λ denota la constante de desintegración del C^{14} (la semivida

* Desde mediados de la década de 1950 los ensayos de armas nucleares han incrementado notablemente la cantidad de carbono radiactivo en la atmósfera. Irónicamente esta situación permite otro método muy eficiente de detección de falsificaciones. De hecho, muchos materiales que usan los artistas, tales como el aceite de linaza y los lienzos, provienen de plantas y animales y, por lo tanto, contienen la misma concentración de carbono 14 que la atmósfera en el momento en que muere la planta o el animal. Así pues, el aceite de linaza (que es un derivado del lino) producido en los últimos años contiene concentraciones mucho más altas de carbono 14 que el producido antes de 1950.

del carbono 14 es de 5 568 años) entonces $dN(t)/dt = \lambda N(t)$, $N(0) = N_0$. Como consecuencia, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Ahora bien, $R(t)$, la tasa actual de desintegración del C^{14} en la muestra, está dada por $R(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$, y la tasa original de desintegración es $R(0) = \lambda N(t) = \lambda N_0$. Así pues, $R(t)/R(0) = e^{-\lambda t}$, de modo que $t = (1/\lambda)\ln [R(0)/R(t)]$. Por esto, si se mide $R(t)$, la tasa actual de desintegración del C^{14} en el carbón vegetal, y se observa que $R(0)$ debe ser igual a la tasa de desintegración de una cantidad igual de madera viva, entonces puede calcularse la edad t del carbón vegetal. Los siguientes dos problemas son ilustraciones reales de este método.

7. El nivel de carbón vegetal después que estuvieron habitadas las famosas grutas de Lascaux en Francia dio una medida de 0.91 desintegraciones por minuto por gramo en 1950. La madera viva da 6.68 desintegraciones. Calcule la época en que estuvieron habitadas, y por tanto la edad probable de las sorprendentes pinturas que se hallan en las grutas de Lascaux.
8. En la excavación de 1950 en Nippur, una ciudad de Babilonia, el carbón vegetal de la viga de un techo dio una cuenta o medida de 4.09 desintegraciones por minuto y por gramo. La madera viva da 6.68 desintegraciones. Suponiendo que este carbón vegetal se formó durante la época de Hamurabi, realice una estimación de la fecha probable de la sucesión de Hamurabi.

1.4 ECUACIONES SEPARABLES

La ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 \tag{1}$$

se resolvió dividiendo ambos lados de la ecuación entre $y(t)$ para obtener la ecuación equivalente

$$\frac{1}{y(t)}\frac{dy(t)}{dt} = -a(t) \tag{2}$$

y observando que la ecuación (2) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}\ln|y(t)| = -a(t). \tag{3}$$

Al integrar ambos lados de (3) se encontró $\ln|y(t)|$ y, por lo tanto, $y(t)$. De manera totalmente análoga puede resolverse la ecuación diferencial más general

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \tag{4}$$

donde f y g son funciones continuas de y y t. Esta ecuación, y cualquier otra que pueda escribirse de tal forma, se llama ecuación separable. Para resolver (4) se multiplican

primero ambos lados por $f(y)$ para obtener la siguiente ecuación equivalente

$$f(y)\frac{dy}{dt}=g(t). \tag{5}$$

Después, se observa que (5) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}F(y(t))=g(t) \tag{6}$$

donde $F(y)$ es una antiderivada de $f(y)$, es decir, $F(y) = \int f(y)dy$. Por lo tanto,

$$F(y(t))=\int g(t)dt+c \tag{7}$$

donde c es una constante arbitraria de integración. Para encontrar la solución general de (4) se despeja $y = y(t)$ de (7).

EJEMPLO 1 Obtener la solución general de la ecuación $dy/dt = t^2/y^2$.

SOLUCIÓN. Multiplicando ambos lados de la ecuación por y^2 resulta

$$y^2\frac{dy}{dt}=t^2, \quad \text{o bien,} \quad \frac{d}{dt}\frac{y^3(t)}{3}=t^2.$$

Por lo tanto, $y^3(t) = t^3 + c$ donde c es una constante arbitraria. Así pues, $y(t) = (t^3 + c)^{1/3}$.

EJEMPLO 2 Encontrar la solución general de la ecuación

$$e^y\frac{dy}{dt}-t-t^3=0.$$

SOLUCIÓN. Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}e^{y(t)}=t+t^3$$

por lo tanto, $e^{y(t)} = t^2/2 + t^4/4 + c$. Al sacar logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $y(t) = \ln(t^2/2 + t^4/4 + c)$.

Además de la ecuación diferencial (4) se impone muchas veces una condición inicial a $y(t)$ de la forma $y(t_0) = y_0$. La ecuación diferencial (4) junto con la condición inicial $y(t_0) = y_0$ es un problema de valor inicial. Un problema de esta clase puede resolverse de dos maneras. Una forma es utilizar la condición inicial $y(t_0) = y_0$ para encontrar el valor de la constante c en (7), y otra es integrando ambos lados de (6) de t_0 a t para obtener

$$F(y(t))-F(y_0)=\int_{t_0}^{t}g(s)\,ds. \tag{8}$$

Observando que

$$F(y)-F(y_0)=\int_{y_0}^{y} f(r)\,dr, \tag{9}$$

la ecuación se puede escribir en forma más sencilla

$$\int_{y_0}^{y} f(r)\,dr=\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds. \tag{10}$$

EJEMPLO 3 Encontrar la solución al problema de valor inicial

$$e^y\frac{dy}{dt}-(t+t^3)=0, \qquad y(1)=1.$$

SOLUCIÓN. *Método* (i). Del Ejemplo 2 se sabe que la solución general de esta ecuación es $y = \ln(t^2/2 + t^4/4 + c)$. Tomando $t = 1$ y $y = 1$ se obtiene $1 = \ln(3/4 + c)$, o bien $c = e - 3/4$. De aquí se sigue que $y(t) = \ln(e - 3/4 + t^2/2 + t^4/4$.

Método (ii). De (10) resulta

$$\int_1^y e^r\,dr=\int_1^t (s+s^3)\,ds.$$

Por lo tanto,

$$e^y-e=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \qquad \text{y} \qquad y(t)=\ln(e-3/4+t^2/2+t^4/4).$$

EJEMPLO 4 Resolver el problema de valor inicial $dy/dt = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

SOLUCIÓN. Al dividir ambos miembros de la ecuación entre $1 + y^2$ se obtiene la ecuación equivalente $1/(1 + y^2)dy/dt = 1$. Entonces, de (10) se sigue

$$\int_0^y \frac{dr}{1+r^2}=\int_0^t ds.$$

Por lo tanto, $\arctan y = t$, e $y = \tan t$.

La solución $y = \tan t$ tiene la inconveniencia de que tiende a $\pm\infty$ en $t = \pm\pi/2$. Y lo que es más problemático es el hecho de que no hay nada en el problema de valor inicial que sugiera la posibilidad de dificultades en $t = \pm\pi/2$. Pero la realidad es que las soluciones de ecuaciones diferenciales perfectas pueden tender a infinito en un tiempo finito. Así pues, las soluciones no pueden ser calculadas para todo valor de t, sino sólo para un intervalo finito abierto $a < t < b$. Más aún, como el siguiente ejemplo lo muestra, diferentes soluciones de una misma ecuación diferencial tienden a infinito para distintos valores de tiempo.

EJEMPLO 5 Resolver el problema de valor inicial $dy/dt = 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

SOLUCIÓN. De (10) se obtiene

$$\int_1^y \frac{dr}{1+r^2} = \int_0^t ds.$$

Por lo tanto, $\arctan y - \arctan 1 = t$, o bien $y = \tan(t + \pi/4)$. Esta solución existe en el intervalo abierto $-3\pi/4 < t < \pi/4$.

EJEMPLO 6 Encontrar la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$y\frac{dy}{dt} + (1+y^2)\operatorname{sen} t = 0, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUCIÓN. Al dividir ambos lados de la ecuación diferencial entre $1 + y^2$ se tiene que

$$\frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t.$$

y, por lo tanto,

$$\int_1^y \frac{r\,dr}{1+r^2} = \int_0^t -\operatorname{sen} s\,ds,$$

así que

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) - \tfrac{1}{2}\ln 2 = \cos t - 1.$$

Despejando $y(t)$ en esta ecuación se obtiene

$$y(t) = \pm\left(2e^{-4\operatorname{sen}^2 t/2} - 1\right)^{1/2}.$$

Para determinar si se toma la raíz negativa o la positiva, se observa que $y(0)$ es positivo. Por lo tanto,

$$y(t) = \left(2e^{-4\operatorname{sen}^2 t/2} - 1\right)^{1/2}$$

Esta solución está definida solamente para

$$2e^{-4\operatorname{sen}^2 t/2} > 1$$

o bien

$$e^{4\operatorname{sen}^2 t/2} < 2. \tag{11}$$

Dado que la función logaritmo es monótona creciente, es posible tomar el logaritmo en ambos lados de (11) conservando la desigualdad. Así pues $4\operatorname{sen}^2 t/2 \le \ln 2$, lo cual implica

$$\left|\frac{t}{2}\right| < \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}$$

Por lo tanto, $y(t)$ existe sólo en el intervalo abierto $(-a, a)$, donde

$$a = 2\operatorname{arcsen}\left[\sqrt{\ln 2}\,/2\right].$$

Ahora bien, esto parece ser una nueva dificultad asociada a las ecuaciones no lineales, ya que $y(t)$ simplemente "desaparece" para $t = \pm a$ sin tender a infinito. Sin embargo, esta aparente dificultad puede explicarse con facilidad e incluso anticipar si se escribe la ecuación diferencial en la forma estándar

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{(1+y^2)\operatorname{sen} t}{y}.$$

Nótese que esta ecuación diferencial no está definida para $y = 0$. Por lo tanto, si una solución $y(t)$ toma el valor de cero para algún valor $t = t^*$, entonces no puede esperarse que esté definida para $t > t^*$. Esto es exactamente lo que ocurre aquí, ya que $y(\pm a) = 0$.

EJEMPLO 7 Resolver el problema de valor inicial $dy/dt = (1 + y)t$, $y(0) = -1$.

SOLUCIÓN. En este caso no es posible dividir ambos lados de la ecuación diferencial entre $1 + y$, ya que $y(0) = -1$. Sin embargo, es fácil ver que $y(t) = -1$ es una solución del problema de valor inicial, y en la Sección 1.10 se mostrará que es la única solucion. Más en general, considérese el problema de valor inicial $dy/dt = f(y)g(t)$, $y(t_0) = y_0$, donde $f(y_0) = 0$. Ciertamente $y(t) = y_0$ es una solución del problema de valor inicial, y en la Sección 1.10 se mostrará que es la única solución si $\partial f/\partial y$ existe y es continua.

EJEMPLO 8 Resolver el problema de valor inicial

$$(1+e^y)dy/dt = \cos t, \qquad y(\pi/2) = 3.$$

SOLUCIÓN. De (10) se obtiene

$$\int_3^y (1+e^r)\,dr = \int_{\pi/2}^t \cos s\, ds$$

de modo que $y + e^y = 2 + e^3 + \operatorname{sen} t$. No es posible resolver esta ecuación explícitamente para y como función de t. De hecho en la mayoría de las ecuaciones separables no puede resolverse para y como función de t. Así pues, la afirmación de que

$$y + e^y = 2 + e^3 + \operatorname{sen} t$$

es la solución del problema de valor inicial significa en realidad que es una solución implícita más que explícita. Esto no representa ninguna dificultad en las aplicaciones, ya que siempre es posible encontrar $y(t)$ numéricamente con la ayuda de una computadora digital. (Sección 1.11.)

EJEMPLO 9 Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = -t/y$.

SOLUCIÓN. Multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por y se obtiene $y\,dy/dt = -t$. De lo anterior

$$y^2 + t^2 = c^2. \tag{12}$$

Ahora bien, las curvas descritas por (12) son *cerradas*, y no se pueden resolver para determinar y como una *función de valor único* de t. El origen de esta dificultad, por supuesto, es el hecho de que la ecuación diferencial no está definida para $y = 0$. Sin embargo, las circunferencias $t^2 + y^2 = c^2$ están perfectamente definidas incluso par $y = 0$. Las circunferencias $t^2 + y^2 = c^2$ se llaman *curvas soluciones* de la ecuación diferencial

$$dy/dt = -t/y.$$

Más en general, se dice que toda curva definida por (7) es una curva solución de (4).

EJERCICIOS

En cada uno de los problemas 1 a 5, obtenga la solución general de la ecuación diferencial dada

1. $(1+t^2)\dfrac{dy}{dt} = 1+y^2$. Sugerencia: $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

2. $\dfrac{dy}{dt} = (1+t)(1+y)$

3. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$

4. $\dfrac{dy}{dt} = e^{t+y+3}$

5. $\cos y \operatorname{sen} t \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} y \cos t$

En cada uno de los problemas 6 a 12 resuelva el problema de valor inicial dado y determine el intervalo de existencia de cada solución.

6. $t^2(1+y^2) + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = 1$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t}{y + yt^2}, \quad y(2) = 3$

8. $(1+t^2)^{1/2}\dfrac{dy}{dt} = ty^3(1+t^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$

10. $\cos y \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}, \quad y(1) = \pi/2$

11. $\dfrac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y), \quad y(0) = 0,\ a, b > 0$

12. $3t\dfrac{dy}{dt} = y\cos t, \quad y(1) = 0$

13. Toda ecuación de la forma $dy/dt = f(y)$ es separable. Así pues, es posible resolver todas las ecuaciones diferenciales de primer orden en las cuales no aparece el tiempo en forma explícita. Ahora suponga que se tiene una ecuación diferencial de la forma $dy/dt = f(y/t)$. Por ejemplo, la ecuación $dy/dt = \operatorname{sen}(y/t)$. Las ecuaciones diferenciales de esta forma se llaman ecuaciones homogéneas. Como el lado

derecho de la ecuación depende solamente de y/t se sugiere hacer la sustitución $y/t = v$, o bien $y = tv$.

(a) Demuestre que esta sustitución transforma la ecuación $dy/dt = f(y/t)$ en la ecuación equivalente $t\,dv/dt + v = f(v)$, la cual es separable.

(b) Encuentre la solución general de la ecuación $dy/dt = 2(y/t) + (y/t)^2$.

14. Determine cuáles de las siguientes funciones de t y de y pueden expresarse como funciones de la variable y/t.

(a) $\dfrac{y^2+2ty}{y^2}$ (b) $\dfrac{y^3+t^3}{yt^2+y^3}$ (c) $\dfrac{y^3+t^3}{t^2+y^3}$

(d) $\ln y - \ln t + \dfrac{t+y}{t-y}$ (e) $\dfrac{e^{t+y}}{e^{t-y}}$ (f) $\ln\sqrt{t+y} - \ln\sqrt{t-y}$

(g) $\operatorname{sen}\dfrac{t+y}{t-y}$ (h) $\dfrac{(t^2+7ty+9y^2)^{1/2}}{3t+5y}$.

15. Resuelva el problema de valor inicial $t(dy/dt) = y + \sqrt{t^2 + y^2}$, $y(1) = 0$.

Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

16. $2ty\dfrac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$ **17.** $(t - \sqrt{ty}\,)\dfrac{dy}{dt} = y$

18. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+y}{t-y}$.

19. $e^{t/y}(y-t)\dfrac{dy}{dt} + y(1+e^{t/y}) = 0$

$\left[\textit{Sugerencia: } \displaystyle\int \frac{v-1}{ve^{-1/v}+v^2}\,dv = \ln(1+ve^{1/v})\right]$

20. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+y+1}{t-y+3}. \qquad (*)$$

Esta ecuación podría resolverse si no estuvieran presentes las constantes 1 y 3. Para eliminar estas constantes haga la sustitución $t = T + h$, $y = Y + k$.

(a) Determine h y k de modo que la ecuación (*) se pueda escribir en la forma $dY/dT = (T + Y)/(T - Y)$.

(b) Encuentre la solución general de (8). (Ejercicio 18.)

21. (a) Pruebe que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{at+by+m}{ct+dy+n}$$

donde a, b, c, d, m y n son constantes. Siempre se puede reducir a la forma $dy/dt = (at + by)/(ct + dy)$ si $ad - bc \neq 0$.

(b) Resuelva la ecuación anterior en el caso especial $ad = bc$.

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

22. $(1+t-2y)+(4t-3y-6)dy/dt=0$ **23.** $(t+2y+3)+(2t+4y-1)dy/dt=0$

1.5 MODELOS POBLACIONALES

En esta sección se estudiarán ecuaciones diferenciales de primer orden que rigen el crecimiento de varias especies. A primera vista parece imposible describir el crecimiento de una especie por medio de una ecuación diferencial, ya que el tamaño de una población se mide siempre en números enteros. Por ello, el tamaño de una población no puede ser una función diferenciable con respecto al tiempo. Sin embargo, si el tamaño de una población es grande y se incrementa en uno, entonces el cambio es muy pequeño comparado con el tamaño de la población. Así pues, se toma la aproximación de que poblaciones grandes cambian continuamente, e incluso de manera diferenciable, con respecto al tiempo.

Denótese por $p(t)$ la población de una especie dada en el tiempo t y represéntese por $r(t, p)$ la diferencia entre sus tasas de natalidad y de mortalidad. Si esta población está aislada, es decir, si no existe emigración o inmigración, entonces dp/dt, la tasa de variación o cambio de la población es igual a $rp(t)$. En el modelo más simple se supone r constante, es decir, que no depende ni del tiempo ni de la población. Entonces puede escribirse la siguiente ecuación diferencial que gobierna el crecimiento de la población

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \qquad a = \text{constante.}$$

Esta es una ecuación lineal y se conoce como la *ley de Malthus para el crecimiento de una población*. Si la población de una especie dada es p_0 en el tiempo t_0, entonces $p(t)$ satisface el problema de valor inicial $dp(t)/dt = ap(t)$, $p(t_0) = p_0$. La solución de este problema de valor inicial es $p(t) = p_0e^{a(t-t_0)}$. De aquí que toda especie que satisface la ley de crecimiento de Malthus crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora bien, sólo se propuso un modelo sencillo para el crecimiento de una población, tan sencillo que fue posible resolverlo completamente en pocas líneas. Por lo tanto, es importante ver si este modelo, con su sencillez, tiene alguna relación con la realidad. Denótese por $p(t)$ la población humana de la Tierra en el tiempo t. Se estima que la población humana del planeta aumentó con una tasa promedio de 2% anual durante el periodo 1960-1970. Al empezar la mitad de la década, el 1 de enero de 1965, cuando el Departamento de Comercio del gobierno de Estados Unidos estimaba la población de la Tierra en 3 340 millones de personas, entonces $t_0 = 1965$, $P_0 = 3.34 \times 10^9$ y $a = 0.02$, de modo que

$$p(t) = (3.34)10^9e^{.02(t-1965)}.$$

Una manera de comprobar la precisión de esta fórmula es calcular el tiempo requerido para que se duplique la población del planeta y compararlo con el valor observado de 35 años. La fórmula predice que la población de la Tierra se duplica cada T años, donde

$$e^{.02T} = 2.$$

Sacando logaritmos en ambos lados de la ecuación se obtiene $0.02T = \ln 2$, de modo que

$$T = 50 \ln 2 \simeq 34.6 \text{ años}$$

Esto constituye una excelente concordancia con el valor observado. Por otro lado, sin embargo, viendo hacia el futuro distante, la ecuación predice que la población de la Tierra será de 200 billones en el año 2515, de 1 800 billones en 2625, y de 3 600 billones en 2660. Estas son cifras astronómicas cuyo significado es difícil de imaginar. La superficie total del planeta es de aproximadamente 1 860 billones de pies cuadrados (1 pie cuadrado es igual a 929 cm^2). El 80% de la superficie está cubierta por agua. Suponiendo que se está dispuesto a vivir en botes al igual que en tierra firme, puede verse fácilmente que para el año 2515 habrá solamente 9.3 pies cuadrados por persona; en el año 2625 cada persona dispondrá de sólamente un pie cuadrado en el cual estar de pie y para el año 2660 las personas estarán unas en los hombros de otras.

Parecerá, por lo tanto, que el modelo no es razonable y debería ser descartado. Sin embargo, no puede ignorarse el hecho de que lo pasado ofreció concordancias excelentes. Más aún, existe evidencia adicional de que las poblaciones efectivamente crecen exponencialmente. Considérese el caso del *Microtus Arvallis Pall*, un pequeño roedor que se reproduce rápidamente. Considérese como unidad de tiempo el mes y que la población crece con una tasa de 40% mensual. Si hay dos roedores presentes en el momento inicial $t = 0$, entonces $p(t)$, el número de roedores en el tiempo t, satisface el problema de valor inicial

$$dp(t)/dt = 0.4p, \qquad p(0) = 2.$$

Por lo tanto,

$$p(t) = 2e^{0.4t}. \tag{1}$$

En la Tabla 1 se comparan las poblaciones observadas con las poblaciones calculadas de la ecuación (1)

TABLA 1. Crecimiento del *Microtus Arvallis Pall*

Meses	0	2	6	10
p observada	2	5	20	109
p calculada	2	4.5	22	109.1

Como puede verse, la concordancia es excelente.

OBSERVACIÓN 1. En el caso del *Microtus Arvallis Pall*, la p observada es muy precisa, ya que el periodo de gestación es de tres semanas y el tiempo que se requiere para medir la población es mucho menor. Si el periodo de gestación fuera muy corto entonces la p observada podría ser inexacta, ya que muchos de los roedores en preñez darían a luz antes de que el censo se terminara.

La solución al dilema es observar que los modelos lineales para el crecimiento de poblaciones son satisfactorios *siempre que* la población no sea demasiado grande. Cuando la población es demasiado grande, estos modelos no pueden ser exactos ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales y por el alimento disponible. Así pues, hay que agregar un término de competición a la ecuación diferencial lineal. Una elección adecuada del término

competitivo es $-bp^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a p^2. Considérese entonces la ecuación modificada

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2.$$

Esta ecuación se conoce como la ley *logística* del crecimiento de una población y los números a y b se llaman *coeficientes vitales* de la población. La introdujo por primera vez el matemático y biólogo holandés Verhulst, en 1837. Ahora bien, en general la constante b es muy pequeña comparada con a, de tal modo que si p no es demasiado grande, entonces el término $-bp^2$ es insignificante comparado con ap, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embargo, si p es grande entonces el término $-bp^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. No es necesario mencionar que cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente b.

Considérese ahora la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si p_0 es la población en el tiempo t_0, entonces $p(t)$, la población en el tiempo t, satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \qquad p(t_0) = p_0.$$

Esta es una ecuación diferencial separable, y de la ecuación (10) en la Sección 1.4, se tiene

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{ar - br^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0.$$

Para integrar la función $1/(ar - br^2)$ se recurre a fracciones parciales. Se hace

$$\frac{1}{ar - br^2} \equiv \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a - br}.$$

Para encontrar A y B se observa que

$$\frac{A}{r} + \frac{B}{a - br} = \frac{A(a - br) + Br}{r(a - br)} = \frac{Aa + (B - bA)r}{r(a - br)}.$$

Por lo tanto, $Aa + (B - bA)r = 1$. Ya que esta ecuación es cierta para todo valor de r, se ve que $Aa = 1$ y $B - bA = 0$. Por lo tanto, $A = 1/a$, $B = b/a$ y

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{r(a - br)} = \frac{1}{a} \int_{p_0}^{p} \left(\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br} \right) dr$$

$$= \frac{1}{a} \left[\ln \frac{p}{p_0} + \ln \left| \frac{a - bp_0}{a - bp} \right| \right] = \frac{1}{a} \ln \frac{p}{p_0} \left| \frac{a - bp_0}{a - bp} \right|.$$

Así pues,

$$a(t - t_0) = \ln \frac{p}{p_0} \left| \frac{a - bp_0}{a - bp} \right|. \tag{2}$$

Ahora bien, es fácil demostrar (Ejercicio 1) que la siguiente expresión siempre es positiva

$$\frac{a-bp_0}{a-bp(t)}.$$

De aquí se sigue que

$$a(t-t_0)=\ln\frac{p}{p_0}\frac{a-bp_0}{a-bp}.$$

Al aplicar el exponencial en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$e^{a(t-t_0)}=\frac{p}{p_0}\frac{a-bp_0}{a-bp},$$

o bien

$$p_0(a-bp)e^{a(t-t_0)}=(a-bp_0)p.$$

Al pasar al lado izquierdo todos los términos que tienen a p, se ve que

$$\left[a-bp_0+bp_0e^{a(t-t_0)}\right]p(t)=ap_0e^{a(t-t_0)}.$$

Por lo tanto,

$$p(t)=\frac{ap_0e^{a(t-t_0)}}{a-bp_0+bp_0e^{a(t-t_0)}}=\frac{ap_0}{bp_0+(a-bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \quad (3)$$

Ahora se examinará la ecuación (3) para ver qué tipo de poblaciones predice. Obsérvese que cuando $t\to\infty$

$$p(t)\to\frac{ap_0}{bp_0}=\frac{a}{b}.$$

Es decir, *independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite a/b*. Además, nótese que $p(t)$ es una función monótona creciente respecto del tiempo si $0<p_0<a/b$. Más aún, dado que

$$\frac{d^2p}{dt^2}=a\frac{dp}{dt}-2bp\frac{dp}{dt}=(a-2bp)p(a-bp),$$

se ve que dp/dt es creciente si $p(t)<a/2b$, y dp/dt es decreciente si $p(t)>a/2b$. Por ello la gráfica de $p(t)$ debe tener la forma que aparece en la Figura 1 si $p_0<a/2b$. Una curva así se llama *curva logística* o en "S". A partir de su forma se concluye que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un periodo de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un periodo de crecimiento reducido.

Estas predicciones se confirman en experimentos con el protozoario *Paramecium caudatum* llevados a cabo por el biólogo y matemático G.F. Gause. Se colocaron cinco ejemplares de Paramecium en un tubo de ensayo con 0.5 cm^3 de medio nutriente y se contó el número diario de individuos durante seis días. Se encontró que los Paramecium se reproducían con una tasa de 230.9% diario cuando la población era pequeña. El número de individuos aumentaba inicialmente con rapidez y posteriormente con más

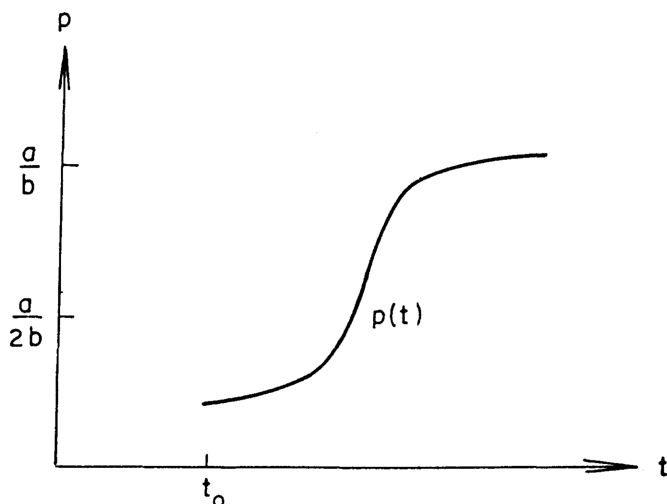


FIGURA 1. Gráfica de $p(t)$.

lentitud hasta alcanzar un nivel máximo de 375 hacia el cuarto día, saturando el tubo de ensayo. A partir de esta información se concluye que si el *Paramecium* crece de acuerdo con la ley logística $dp/dt = ap - bp^2$, entonces $a = 2.309$ y $b = 2.309/375$. Por lo tanto, la ley logística predice que

$$p(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{(2.309)5}{375} + \left(2.309 - \frac{(2.309)5}{375}\right)e^{-2.309t}}$$
$$= \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}. \tag{4}$$

(El tiempo inicial t_0 se tomó igual a cero.) En la Figura 2 se compara la gráfica de $p(t)$ dada por la ecuación (4) contra los valores experimentales, los cuales se indican con un pequeño círculo. Como puede verse, la concordancia es muy buena.

Para aplicar estos resultados y predecir en el futuro la población humana de la Tierra es necesario calcular los coeficientes vitales a y b en la ecuación logística que gobierna el crecimiento. Algunos ecólogos estiman que el valor natural de a es 0.029. Se sabe también que la población humana crecía con una tasa de 2% cuando su tamaño era de $(3.34)10^9$. Dado que $(1/p)(dp/dt) = a - bp$, se ve que

$$0.02 = a - b\,(3.34)10^9.$$

Por lo tanto, $b = 2.695 \times 10^{-12}$. Así pues, de acuerdo con la ley logística de crecimiento de poblaciones, la población humana tenderá al valor límite

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.695 \times 10^{-12}} = 10\,760 \text{ millones de personas}$$

Nótese que de acuerdo con esta predicción, la población humana se encontraba en 1956

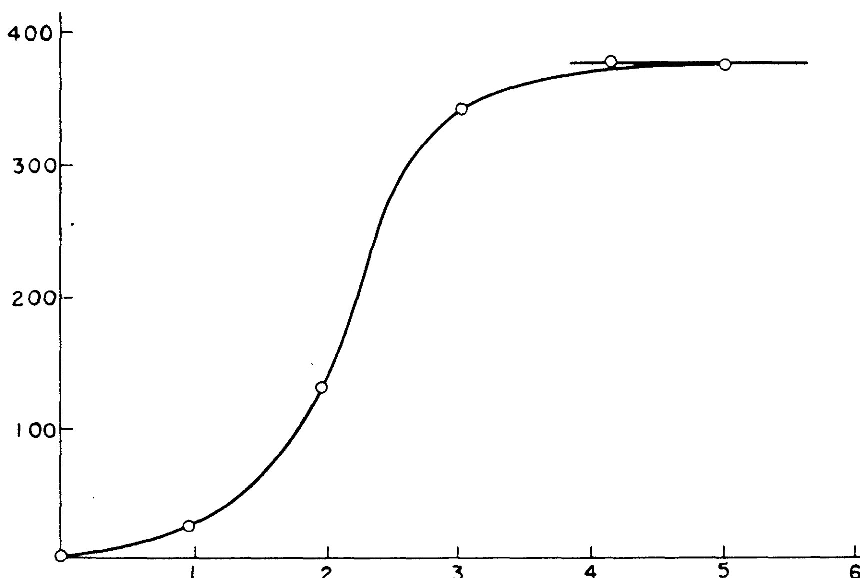


FIGURA 2. El crecimiento del paramecium

aún en la fase de crecimiento acelerado de la curva logística, ya que aún no había alcanzado la mitad de la población límite predicha.

OBSERVACIÓN. En una ocasión, un estudiante sugirió utilizar la ecuación (3) para encontrar el instante en que $p(t) = 2$ y así deducir hace cuánto tiempo apareció el ser humano en la Tierra. A primera vista, esto parece una idea fabulosa. Sin embargo, no es posible ir tan atrás en el pasado, ya que el modelo pierde su exactitud si la población es pequeña.

Como otra verificación de la validez de la ley logística de crecimiento de poblaciones, considérese la siguiente ecuación

$$p(t) = \frac{197\,273\,000}{1 + e^{-0.03134(t - 1913.25)}} \tag{5}$$

la cual fue introducida por Pearl y Reed como modelo para el crecimiento de la población de Estados Unidos. Primero, utilizando los censos de los años 1790, 1850 y 1910, Pearl y Reed encontraron con base en la ecuación (3) que $a = 0.03134$ y $b = (1.5887)10^{-10}$. Después (Ejercicio 2b), Pearl y Reed calcularon que la población de Estados Unidos alcanzó la mitad de su población límite de $a/b = 197\,273\,000$ en abril de 1913. Por lo tanto, (Ejercicio 2c) la ecuación (3) puede escribirse en forma simplificada como (5).

La Tabla 2 compara las predicciones de Pearl y Reed con los valores observados de la población de Estados Unidos. Estos resultados son sorprendentes ya que no se han considerado las grandes inmigraciones hacia Estados Unidos ni el hecho de que el país participó en cinco guerras durante ese periodo.

TABLA 2. Población de los Estados Unidos de 1970 a 1950. (Las últimas cuatro cifras fueron añadidas por el grupo "Darthmouth College Writing Group".)

	Real	**Predicha**	Error	%
1790	3 929 000	3 929 000	0	0.0
1800	5 308 000	5 336 000	28,000	0.5
1810	7 240 000	7 228 000	− 12,000	−0.2
1820	9 638 000	9 757 000	119,000	1.2
1830	12 866 000	13 109 000	243,000	1.9
1840	17 069 000	17 506 000	437,000	2.6
1850	23 192 000	23 192 000	0	0.0
1860	31 443 000	30 412 000	− 1,031,000	−3.3
1870	38 558 000	39 372 000	814,000	2.1
1880	50 156 000	50 177 000	21,000	0.0
1890	62 948 000	62 769 000	− 179,000	−0.3
1900	75 995 000	76 870 000	875,000	1.2
1910	91 972 000	91 972 000	0	0.0
1920	105 711 000	107 559 000	1,848,000	1.7
1930	122 775 000	123 124 000	349,000	0.3
1940	131 669 000	136 653 000	4,984,000	3.8
1950	150 697 000	149 053 000	− 1,644,000	− 1.1

En 1845, Verhulst pronosticó una población máxima para Bélgica de 6 600 000 y una población máxima para Francia de 40 000 000. Ahora bien, en 1930 la población de Bélgica había alcanzado 8 092 000. Esta discrepancia tan grande parecía indicar que la ley logística de crecimiento de poblaciones es poco precisa, por lo menos en lo que se refiere a la población este último país. Sin embargo, la discrepancia puede explicarse por el sorprendente crecimiento industrial en Bélgica y por la adquisición del territorio del Congo, en África, lo cual aseguró suficientes recursos adicionales para el país como para atender a la población adicional. Así pues, después del crecimiento industrial tan sorprendente y la adquisición del Congo, Verhulst debió haber disminuido el coeficiente vital b.

Por otro lado, la población de Francia en 1930 concordaba en forma sorprendente con las predicciones de Verhulst. De hecho, parecía que había respuesta a la siguiente paradoja: ¿Por qué aumentaba tan lentamente la población de Francia en 1930, mientras que la población francesa de Canadá aumentaba con rapidez? Después de todo se trata de la misma gente. La solución a la paradoja, claro está, es que la población de Francia en 1930 se encontraba muy cerca de su valor límite y, por ello, en un periodo de crecimiento reducido, mientras que la población de Canadá en 1930 se encontraba aún en el periodo de crecimiento acelerado.

OBSERVACIÓN 1. Es claro que los desarrollos tecnológicos, la reflexión sobre la contaminación ambiental y las tendencias sociológicas han tenido una influencia significativa sobre los coeficientes vitales a y b. Por consiguiente, éstos deben ser reevaluados cada cierto número de años.

OBSERVACIÓN 2. Para lograr modelos más precisos de crecimiento poblacional, deben considerarse las poblaciones como constituidas por grupos no homogéneos de individuos. Más bien, hay que subdividir la población en diferentes grupos de edades. También se debe subdividir la población en hombres y mujeres, ya que la tasa de reproducción de ésta depende usualmente más del número de mujeres que del de hombres.

OBSERVACIÓN 3. Posiblemente la crítica más severa en contra de la ley logística de crecimiento de poblaciones es la observación de que algunas poblaciones fluctúan periódicamente entre dos valores, y una curva logística excluye cualquier fluctuación periódica. Sin embargo, algunas de estas fluctuaciones pueden explicarse por el hecho de que cuando ciertas poblaciones alcanzan una densidad suficientemente alta, se vuelven susceptibles a epidemias. La epidemia reduce el nivel de la población a un valor, a partir del cual vuelve a crecer hasta que vuelve a ser afectada por una epidemia cuando alcanza un nivel suficientemente alto. En el Ejercicio 10 se deduce un modelo para describir este fenómeno. Este modelo se aplica en el Ejercicio 11 para explicar la aparición y desaparición repentina de grupos de roedores.

EPÍLOGO. El siguiente artículo, escrito por Nick Eberstadt, apareció en el *New York Times* el 26 de marzo de 1978.

El punto central del artículo es que resulta muy difícil efectuar, sólo con métodos estadísticos, predicciones exactas de poblaciones, incluso para 30 años hacia el futuro. En 1970, demógrafos de Estados Unidos proyectaron una población de 6 500 millones de personas para el año 2000. Tan sólo seis años más tarde este pronóstico se corrigió a 5 900 millones.

Ahora, usando la ecuación (3) para predecir la población de la Tierra en el año 2000, tómese $a = 0.029$, $b = 2.695 \times 10^{-12}$, $p_0 = 3.34 \times 10^9$, $t_0 = 1965$ y $t = 2000$. Con esto se obtiene

$$p(2000) = \frac{(.029)(3.34)10^9}{.009 + (.02)e^{-(.029)35}}$$

$$= \frac{29(3.34)}{9 + 20e^{-1.015}} 10^9$$

$$= \text{¡}5\,960 \text{ millones de personas!}$$

Esta es otra aplicación espectacular de la ecuación logística.

Las imágenes de la población mundial son engañosas

La tasa de crecimiento de la población mundial se ha incrementado continuamente durante la mayor parte de la historia de la humanidad, pero en la última década alcanzó un máximo y ahora parece decrecer. ¿Cómo ocurrió esto y por qué?

El "cómo" es bastante sencillo. No se debe a que la falta de alimento o las catástrofes ecológicas hayan elevado las tasas de mortalidad. Más bien, ha habido una notable e inesperada disminución de la fecundidad en los países subdesarrollados. Entre 1970 y 1977 la tasa de natalidad en los países en vías de desarrollo (excluyendo China) bajó aproximadamente de 42, a cerca de 36 por mil. Esto es todavía mucho mayor que el 17 por mil en los países desarrollados, pero la disminución de la tasa de natalidad parece ser acelerada: la baja de seis puntos en los siete años anteriores contrasta con una baja de dos puntos en los veinte años anteriores.

La disminución de la fecundidad ha sido un proceso desigual. La disminución promedio en la tasa de natalidad de 13% desde 1970 refleja una reducción rápida en ciertos países, mientras que en muchos otros la situación permanece casi sin cambios.

Por qué ha disminuido tan rápidamente la fecundidad en la última década y por qué ha disminuido con más notoriedad en *algunos lugares pero no en otros*, es aún más difícil de explicar. Demógrafos y sociólogos proponen explicaciones que tienen que ver con el cambio social en el mundo pobre. Desafortunadamente, estas explicaciones parciales son muchas veces más teoría que hechos comprobados y parece haber siempre una excepción para cada regla.

El debate sobre la planeación familiar es característico. Algunas reseñas muestran que en algunos países al menos la mitad de los hijos "no estaban planeados" y probablemente no habrían nacido si los padres hubieran tenido mejores métodos anticonceptivos. Expertos en planificación familiar, como Parker Mauldin del Consejo de Población de Estados Unidos, han destacado que ningún país pobre sin un programa activo de planificación familiar ha tenido disminuiciones significativas en la fecundidad de su población. Por otro lado, sociólogos como William Petersen de Ohio State University atribuyen esta disminución en la población de dichos países al desarrollo económico y social, más que al uso de anticonceptivos, argumentando que los programas de control poblacional usualmente han sido impropios e insensibles (o peor aún), y que incluso en el caso de aceptación de la "tecnología" anticonceptiva, no necesariamente influye eso para que los padres deseen tener menos hijos.

Los efectos de la distribución del ingreso no son objeto de tanto debate, pero si al menos son difíciles de explicar. James Kocher y Robert Repetto, ambos de la Universidad de Harvard, afirman que una distribución más justa de los ingresos contribuye al descenso de la fecundidad poblacional en los países subdesarrollados. Señalan que países como Ceilán (Sri Lanka), Corea del Sur, Cuba y China han abatido sus tasas de fertilidad al lograr una distribución equitativa del ingreso. Sin embargo, el mejoramiento en la repartición del ingreso en un país no parece ser una condición necesaria ni tampoco suficiente para inducir una baja en la fecundidad. La distribución del ingreso en Birmania, por ejemplo, se ha vuelto supuestamente equilibrada en 30 años de socialismo local, pero las tasas de natalidad difícilmente han bajado, mientras que México y Colombia, con una distribución muy desigual del ingreso, han reducido sensiblemente las tasas de natalidad en los últimos años.

Un punto clave para cambiar los núcleos de fertilidad puede ser la relación costo-beneficio económico de los hijos. En sociedades agrícolas, donde los descendientes no reciben muchas comodidades y empiezan a trabajar desde jóvenes, éstos pueden convertirse muy pronto en un capital. Un estudio reciente por Mead Cain, del Consejo de Población, fijó la edad de los hijos para empezar a trabajar en Bangladesh, en 12 años. Más aún, los hijos (o más precisamente los hijos varones) pueden servir también como seguridad social y seguro de desempleo cuando los padres envejecen y no pueden laborar o no hay trabajo disponible. Al disminuir las tasas de natalidad en los países pobres, puede ser que el desarrollo económico y social haga a los hijos menos necesarios como fuentes de ingresos y seguridad, pero es tan poco el trabajo realizado en estas áreas que esto sólo es una especulación razonable.

Algunos de todos los factores, cuyos efectos han sido estudiados con respecto a la fecundidad, son la urbanización, la educación, la estructura ocupacional, la salud pública y el estatus de la mujer. Un área que, sin embargo, los expertos parecen haber pasado por

alto en población, es el terreno no cuantificable de las actividades, creencias y valores que pueden haber tenido que ver con los recientes cambios en las decisiones de cientos de millones de parejas. Las diferencias culturales, los conflictos étnicos, los cambios psicológicos, ideológicos, e incluso, políticos pueden claramente haber tenido efectos en la fecundidad. Como expresó Maris Vonovskis de la Comisión Parlamentaria Especial para la Población, simplemente porque algo no se pueda medir ello no significa que deje de ser importante.

¿Qué significado tiene la disminución de la fecundidad en los futuros niveles poblacionales? Obviamente si la disminución continúa, el crecimiento de la población será más lento que lo previsto y la población mundial se estabilizará alrededor de un nivel más bajo al previsto. Hace tan sólo cinco años el pronóstico de "desviación media" formulado por las Naciones Unidas para la población mundial en el año 2000 era de 6 500 millones; el último año tal predicción disminuyó en más de 200 millones, y un trabajo reciente de Gary Littmaan y Nathan Keyfitz, del Centro de Estudios Poblacionales de Harvard, muestra que en base a los cambios recientes se podría aminorar el pronóstico fácilmente en 400 millones más. Los pronósticos de poblaciones son, sin embargo, un asunto delicado. Para empezar, los cálculos de la población actual, sobre los que se basan los pronósticos del mañana, tienen un amplio margen de error. Por ejemplo, las estimaciones de la población de China varían de 750 a más de 950 millones. Según cálculos de John Durand, de la Universidad de Pennsylvania, los márgenes de error para la población mundial ascienden a más de 200 millones. El historiador Fernand Braudel calcula en 10% el margen de error, lo cual, dada la población mundial presente, significa más de 400 millones de personas.

Los pronósticos de poblaciones inspiran aún menos confianza que los cálculos de poblaciones, porque requieren predicciones de las tasas de natalidad. y mortalidad en el futuro. Dichas tasas pueden cambiar rápida e inesperadamente; dos ejemplos extremos son Ceilán (Sri Lanka), con una disminución de 34% en la tasa de mortalidad en un periodo de dos años, y Japón, con un descenso en la tasa de natalidad de 50% en un periodo de 10 años. Pronósticos de la ONU realizados 17 años antes de 1975, sobreestimaron la población de la URSS entre 10 y 20 millones, y subvaluaron la población de la India en 50 millones. Incluso pronósticos para los Estados Unidos hechos en 1966 sobreestimaron su población para nueve años más tarde, en más de 10 millones. Este error puede parecer enorme; sin embargo, resulta pequeño comparado con los errores en los cálculos realizados en la década de 1930, en los cuales se extrapolaba las bajas tasas de natalidad de la época de la depresión para predecir un máximo en la población estadounidense de 170 millones para finales de los años 70 (la población actual es de 220 millones), que descendería posteriormente.

¿Es posible que las tasas de natalidad en los países subdesarrollados, que por el momento parecen disminuir aceleradamente, se estabilicen de repente o incluso aumenten de nuevo? Teóricamente esto podría ocurrir. A continuación se mencionan cuatro de las razones más importantes: 1) Muchos países en los que la fecundidad poblacional no se ha visto afectada por el descenso podrían simplemente continuar sin experimentar cambios en el futuro próximo. 2) Ya que esterilidad e infertilidad están ampliamente difundidas en muchas de las regiones más pobres y afectadas por enfermedades, las tasas de natalidad en dichas regiones podrán elevarse mejorando los servicios de salud y la alimentación. 3) El sistema Gandhi de esterilización masiva fría y arbitraria puede haber afectado a esa región del mundo, de tal forma que se opongan a futuras medidas de limitación familiar. 4) Si John Aird, del Departamento de Comercio de Estados Unidos, y otros autores tienen razón en que las técnicas de movilización política y persuación social han llevado a muchos padres a tener menos hijos de los deseados, entonces una modificación de estas reglas por el motivo que fuera podría aumentar la tasa de natalidad de la enorme población china. Una de las reglas a largo plazo acerca de los pronósticos poblacionales que aún se mantiene es que dentro de los límites de precisión (alrededor de cinco años hacia el futuro) no se puede afirmar nada interesante, y cuando se empieza a decir algo importante los resultados ya no son precisos.

BIBLIOGRAFÍA

Gause, G.F. *The Struggle for Existence*, Dover Publications, New York, 1964.
Pearl and Reed, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1920, p. 275.

EJERCICIOS

1. Demuestre que $(a - bp_0)/(a - bp(t))$ es positivo para $t_0 < t < \infty$. *Sugerencia:* Use la ecuación (2) para demostrar que $p(t)$ no puede ser igual a a/b si $p_0 \neq a/b$.
2. (a) Considere 3 instantes t_0, t_1 y t_2 con $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$. Demuestre que (3) determina a a y b de manera única en términos de t_0, $p(t_0)$, t_1, $p(t_1)$, t_2 y $p(t_2)$.
   (b) Demuestre que el periodo de crecimiento acelerado para los Estados Unidos terminó en abril de 1913.
   (c) Considere una población $p(t)$ que aumenta de acuerdo con la ley logística (3) y denote por $\bar{t}$ el tiempo para el cual se alcanza la mitad de la población límite. Pruebe que

$$p(t) = \frac{a/b}{1 + e^{-a(t-\bar{t})}}.$$

3. En 1879 y 1881 se pescó un cierto número de percas de un año en Nueva Jersey, y se llevaron al otro lado del continente en vagones tanque de ferrocarril, para ser liberadas en la bahía de San Francisco. Solamente un total de 435 percas sobrevivió a los rigores del viaje. Sin embargo, en 1899, la sola pesca comercial capturó 1 234 000 libras de percas. Dado que el crecimiento de la población fue tan acelerado, es razonable suponer que obedeció a la ley de Malthus $dp/dt = ap$. Suponiendo que el peso promedio de una perca es de tres libras, y que en 1899 se capturó una de cada diez percas, determine un límite inferior para a.

4. Suponga que una población duplica su tamaño original en 100 años y la triplica en 200. Demuestre que para dicha población no es aplicable la ley malthusiana de crecimiento poblacional.

5. Suponga que $p(t)$ satisface la ley de Malthus de crecimiento de poblaciones. Demuestre que los incrementos de p en intervalos sucesivos de tiempo de igual duración, son los términos de una progresión geométrica. Esto dio origen a la famosa frase de Thomas Malthus: "Una población no controlada se incrementa en proporción geométrica. Los medios de subsistencia aumentan en proporción aritmética. Una habilidad mínima con los números hace ver la enormidad de la primera potencia en comparación con la segunda".

6. Una población crece de acuerdo con la ley logística, y tiene un límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es baja se duplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de 2 horas si inicialmente era de (a) 10^8, (b) 10^9?

7. Una familia de salmones que habita en las costas de Alaska se rige por la ley multhusiana de crecimiento de población $dp(t)/dt = 0.003p(t)$, donde t se mide en minutos. En el tiempo $t = 0$ un grupo de tiburones se establece en esas aguas y empieza a atacar a los peces. La tasa a la cual el tiburón mata a los salmones es de

$0.001\,p^2(t)$, donde $p(t)$ es la población de salmones en el tiempo t. Más aún, dado que un elemento indeseable se incorporó a su hábitat 0.002 salmones por minuto abandonan las aguas en Alaska.

(a) Modifique la ley de Malthus de crecimiento de población para tomar en cuenta estos dos factores.

(b) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay un millón de salmones. Calcule la población $p(t)$. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$?

(c) Demuestre que el modelo anterior es absurdo. *Sugerencia:* demuestre que, de acuerdo con este modelo, la población de salmones decrece de un millón a cerca de mil en un minuto.

8. Despreciando las altas tasas de emigración y de homicidios, la población de la dad de Nueva York satisface la siguiente ley logística

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{(25)10^6}p^2,$$

donde t se mide en años.

(a) Modifique la ecuación para tomar en cuenta el hecho de que 9000 personas se mudan anualmente a las afueras de la ciudad, y de que 1000 personas s asesinadas en el mismo periodo.

(b) Suponga que la población de Nueva York en 1970 era de 8 000 000. Calcu la población para el futuro. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?

9. Una población inicial de 50 000 habitantes vive en un microcosmos con una capacidad de transporte para 100 000. Después de cinco años la población se ha incrementado a 60 000. Demuestre que la tasa natural de crecimiento de esta población es $(1/5)\ln 3/2$.

10. De la siguiente manera, es posible representar una población que es susceptible a una epidemia. Suponga que la población se controla originalmente por la ley logística

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \tag{i}$$

y que se desata una epidemia tan pronto como Q alcanza un cierto valor, con Q menor que la población límite a/b. A ese nivel los coeficientes vitales se modifican como sigue $A < a$, $B < b$ y la ecuación (i) se reemplaza por

$$\frac{dp}{dt} = Ap - Bp^2. \tag{ii}$$

Suponga que $Q > A/B$. Entonces la población comienza a disminuir. En algún momento se alcanza un punto inferior a un cierto valor $q > A/B$. En ese punto la epidemia cesa y la población vuelve a crecer de acuerdo con la ecuación (i) hasta la aparición de una nueva epidemia. De esta manera hay fluctuaciones periódicas de p entre q y Q. A continuación, se indica cómo calcular el periodo T de estas fluctuaciones.

(a) Demuestre que el tiempo T_1 requerido para la primera parte del ciclo, cuando p crece de q a Q, está dado por

$$T_1 = \frac{1}{a}\ln\frac{Q(a-bq)}{q(a-bQ)}.$$

(b) Pruebe que el tiempo T_2 requerido para la segunda parte del ciclo, cuando p decrece de Q a q, está dado por

$$T_2 = \frac{1}{A} \ln \frac{q(QB-A)}{Q(qB-A)}.$$

Así pues, el tiempo requerido para el ciclo completo está dado por $T_1 + T_2$.

11. Se ha observado que aparecen plagas en las poblaciones de ratones tan pronto éstas crecen demasiado. Más aún, un incremento local de la densidad atrae a los depredadores en grandes cantidades. Estos dos factores aunados destruyen del 97% al 98% de la población de los pequeños roedores en un lapso de dos o tres semanas, y la densidad baja a un nivel en el cual la enfermedad no se puede diseminar. La población, reducida al 2% de su máximo, encuentra comida abundante y refugio suficiente contra los depredadores. Por ello, la población crece de nuevo hasta alcanzar un nivel favorable para otro brote de enfermedad y depredación. Ahora bien, la velocidad de reproducción de los ratones es tan grande que es posible tomar $b = 0$ en la ecuación (i) del Ejercicio 7. En la segunda parte del ciclo, por lo contrario, A es muy pequeña comparada con B y puede omitirse en la ecuación (ii).

(a) Demuestre que con estas consideraciones se tiene

$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{Q}{q} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{Q-q}{qQB}.$$

(b) Suponiendo que T_1 es aproximadamente cuatro años y Q/q es de casi cincuenta, demuestre que a es casi igual a 1. Este valor de a corresponde por casualidad muy bien a las tasas de reproducción observadas en ratones en condiciones naturales.

12. Hay muchas clases importantes de organismos cuya tasa de natalidad no es proporcional al tamaño de la población. Suponga, por ejemplo, que cada miembro de la población requiere una pareja para la reproducción y que cada miembro tiene una cierta probabilidad de encontrar pareja. Si el número esperado de encuentros es proporcional al producto del número de hembras y machos, y si éstos están igualmente distribuidos en la población, entonces el número de encuentros, y por tanto la tasa de natalidad también, es proporcional a p. Por lo tanto, el tamaño de la población $p(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = bp^2 - ap, \quad a, b > 0.$$

Demuestre que $p(t)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$ si $p_0 < a/b$. Así pues, una vez que el tamaño de la población se encuentra por debajo del tamaño crítico a/b, la población tiende a extinguirse. Por ello, se dice que una especie está en peligro de extinción si su tamaño se encuentra demasiado cercano al valor crítico.

1.6 DISEMINACIÓN DE INNOVACIONES TECNOLÓGICAS

Economistas y sociólogos se han ocupado desde hace tiempo de cómo un cambio tecnológico o una innovación se disemina en una industria. Una vez que cierta innovación es introducida por una compañía, interesa saber qué tan rápido lo hacen otras compañías y qué factores determinan la rapidez con la que lo hacen. En esta sección se construye un modelo para la diseminación de una innovación entre granjeros, y después se pone de manifiesto que el modelo también describe la diseminación de una innovación en industrias tan diversas como la del carbón mineral o hulla, la del fierro y el acero, la de la cerveza y la de los ferrocarriles.

Supóngase que una innovación se introduce en el tiempo $t = 0$ en una comunidad fija de N granjeros. Sea $p(t)$ el número de granjas que la han adoptado en el tiempo t. Como en la sección anterior se hace el cálculo de que $p(t)$ es una función continua del tiempo, aunque sus cambios ocurren obviamente en cantidades enteras. La suposición realista más simple que se puede hacer es que un agricultor adopta una innovación sólo después de haber hablado con un granjero que la haya adoptado previamente. Entonces el número de granjeros Δp que adoptan la innovación en un intervalo de tiempo pequeño Δt, es directamente proporcional al número de ellos p que ya la adoptaron y al número de granjeros que aún no lo hacen $N - p$. Por lo tanto, $\Delta p = cp(N - p)\Delta t$, o bien $\Delta p/\Delta t = cp(N - p)$ para alguna constante positiva c. Si $\Delta t \to 0$ se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = cp(N-p). \tag{1}$$

Ésta es la ecuación logística de la sección anterior si se toman $a = cN$ y $b = c$. Suponiendo que $p(0) = 1$, es decir, que un granjero ha adoptado la innovación en el tiempo $t = 0$, se ve que $p(t)$ satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dp}{dt} = cp(N-p), \qquad p(0) = 1. \tag{2}$$

La solución de (2) es

$$p(t) = \frac{Ne^{cNt}}{N-1+e^{cNt}} \tag{3}$$

la cual es la función logística (Sección 1.5). Por lo tanto, el modelo predice que el proceso de adopción se acelera hasta el punto en el cual la mitad de la comunidad está informada de la innovación. Después de este punto, el proceso de adopción se desacelera hasta alcanzar el valor de cero.

Es posible comparar las predicciones del modelo con datos acerca de la diseminación de dos innovaciones en Estados Unidos, en comunidades de granjeros a mediados de la década de 1950. La Figura 1 presenta el total acumulado de granjeros en Iowa durante el periodo de 1944 a 1955 que adoptaron el herbicida 2,4-D, y la Figura 2 señala el porcentaje acumulado de superficie de cultivo de grano, específicamente de grano híbrido, en tres de los estados de la Unión Americana durante los años 1934-1958. Los círculos en las figuras indican las mediciones realizadas y las gráficas se obtuvieron uniendo dichos puntos con segmentos. Como puede verse, todas estas gráficas tienen las propiedades de las curvas logísticas y, en general, muestran una concordancia muy buena

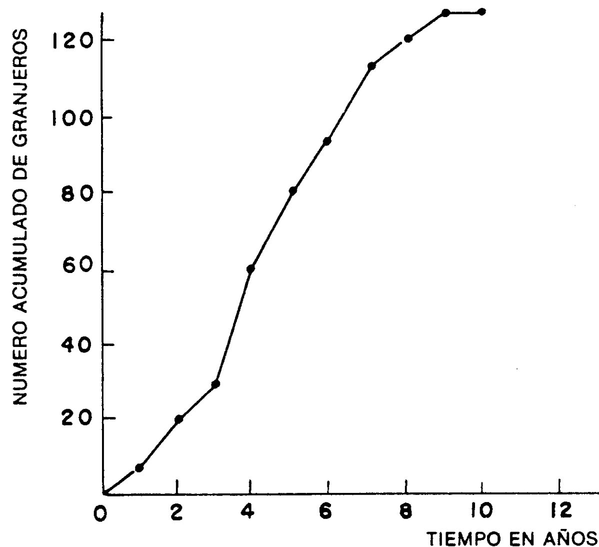


FIGURA 1. Total acumulado de granjeros que adquirieron el herbicida 2, 4D en Iowa

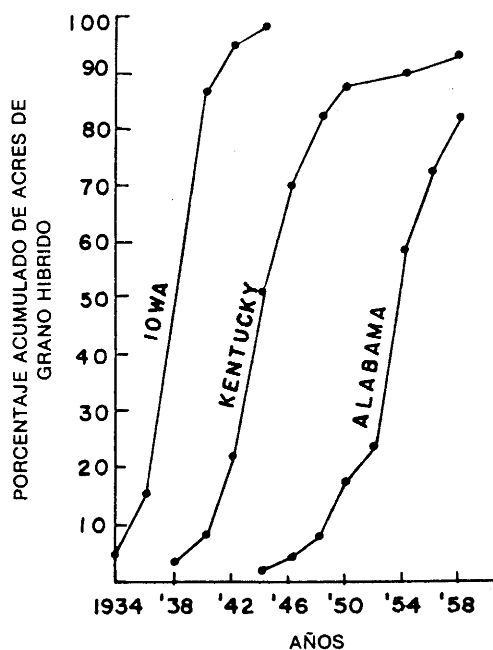


FIGURA 2. Porcentaje acumulado de superficie cultivada con grano híbrido en tres estados de la Unión Americana

con el modelo. Sin embargo, hay dos discrepancias. Primero, el punto en el cual el proceso de adopción deja de ser acelerado no siempre es cuando 50% de la población ya adoptó la innovación. Como puede verse en la Figura 2, el proceso de adopción de grano híbrido empezó a desacelerarse en Alabama sólo después de que aproximadamente 60% de los granjeros habían adoptado la innovación. Segundo, la concordancia con el modelo es mucho mejor en las etapas avanzadas del proceso que en las iniciales.

La razón de la segunda discrepancia es el supuesto de que un granjero sólo se entera de la existencia de la innovación por la comunicación con otros granjeros. Esto no es completamente cierto. Algunos estudios han mostrado que los medios masivos de comunicación, como por ejemplo: radio, televisión, periódicos y revistas para agricultores desempeñan un papel muy importante en las primeras etapas del proceso de adopción. Por lo tanto, es necesario agregar un término a la ecuación diferencial (1) para tomar esto en cuenta. Para calcular este término supóngase que el número de granjeros Δp que se enteran de la existencia de la innovación a través de los medios de comunicación masiva en un periodo corto Δt es proporcional al número de granjeros que aún no saben de la innovación, es decir

$$\Delta p = c'(N-p)\Delta t$$

para alguna constante positiva c'. Cuando $\Delta t \to 0$ se ve que $c'(N-p)$ granjeros se enteran de la existencia de la innovación a través de los medios de comunicación masiva por unidad de tiempo. Así pues, si $p(0) = 0$, entonces $p(t)$ satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dp}{dt} = cp(N-p) + c'(N-p), \qquad p(0)=0. \tag{4}$$

La solución de (4) es

$$p(t) = \frac{Nc'\left[e^{(c'+cN)t}-1\right]}{cN+c'e^{(c'+cN)t}}, \tag{5}$$

y en los Ejercicios 2 y 3 se indica cómo determinar la forma de la gráfica (5).

La curva corregida (5) tiene una concordancia sorprendente con las Figuras 1 y 2 para una elección adecuada de c y c'. Sin embargo, (Ejercicio 3c) no explica por qué la adopción del grano híbrido en Alabama empezó a desacelerarse solamente después de que 60% de los granjeros habían adoptado la innovación. Esto indica por supuesto que otros factores como el tiempo que transcurre entre el momento en que un agricultor se entera de la existencia de un producto y el momento en el que lo adquiere, pueden desempeñar un papel importante en el proceso de adopción y deben, por tanto, ser tomados en cuenta en cualquier modelo.

A continuación se muestra que la ecuación diferencial

$$dp/dt = cp(N-p)$$

también gobierna las tasas con las cuales compañías en industrias diversas como la del carbón mineral, la siderúrgica, la de la cerveza y la ferroviaria adoptaron varias innovaciones importantes en la primera parte de este siglo. Esto es muy sorprendente, ya que se esperaría que el número de compañías que adoptan una innovación en una de estas industrias, depende con seguridad de la rentabilidad de la innovación y de la inversión que se requiere para ponerla en práctica. Sin embargo, estos factores no se mencionaron al deducir la ecuación (1). A pesar de todo se verá que estos factores están incorporados en la constante c.

Sea n el número total de empresas en una industria particular que han adoptado la innovación en el tiempo t. Es claro que el número de compañías Δp que adoptan la innovación en un periodo corto de tiempo Δt es proporcional al número de empresas $n - p$ que aún no lo han hecho; es decir, $\Delta p = \lambda(n - p)\Delta t$. Si $\Delta t \to 0$, se ve que

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(n-p).$$

El factor de proporcionalidad λ depende de la rentabilidad π relativa a inversiones, de la inversión s requerida para utilizar la innovación como porcentaje del activo total de la empresa y del porcentaje de compañías que ya adquirieron la innovación. Así pues,

$$\lambda = f(\pi, s, p/n).$$

Desarrollando f en una serie de Taylor y sin tomar en cuenta los términos de grado superior a dos, se obtiene

$$\lambda = a_1 + a_2\pi + a_3 s + a_4\frac{p}{n} + a_5\pi^2 + a_6 s^2 + a_7\pi s$$
$$+ a_8\pi\left(\frac{p}{n}\right) + a_9 s\left(\frac{p}{n}\right) + a_{10}\left(\frac{p}{n}\right)^2.$$

A fines de la década de 1950 Edwin Mansfield de la Universidad Carnegie Mellon investigó la diseminación de doce innovaciones en cuatro industrias importantes. De estudios completos, Mansfield concluyó que $a_{10} = 0$ y que

$$a_1 + a_2\pi + a_3 s + a_5\pi^2 + a_6 s^2 + a_7\pi s = 0.$$

Así pues, si se toma

$$k = a_4 + a_8\pi + a_9 s, \tag{6}$$

resulta que

$$\frac{dp}{dt} = k\frac{p}{n}(n-p).$$

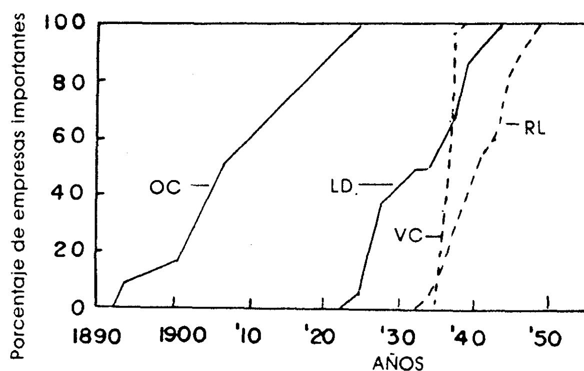
(Ésta es la ecuación obtenida anteriormente para la diseminación de innovaciones entre los granjeros, cuando $k/n = c$. Se considera que la innovación fue adquirida inicialmente por una compañía en el año t_0. Entonces $p(t)$ satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k}{n}p(n-p), \qquad p(t_0) = 1 \tag{7}$$

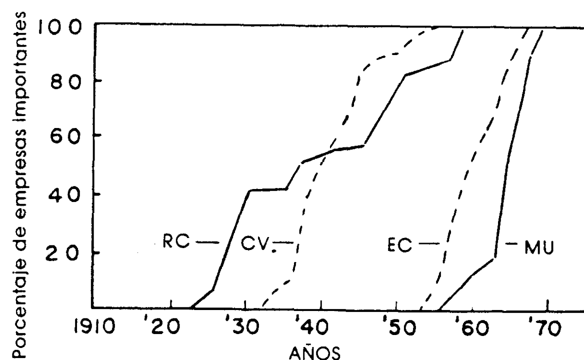
lo cual implica

$$p(t) = \frac{n}{1 + (n-1)e^{-k(t-t_0)}}.$$

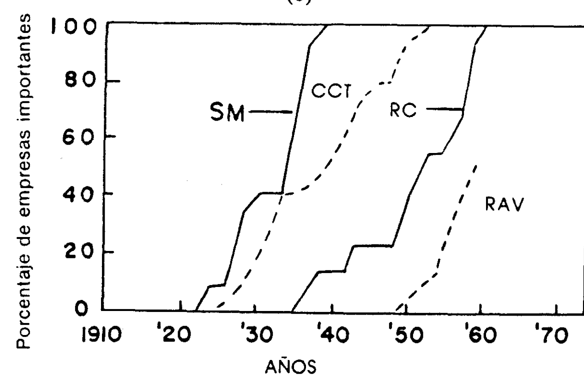
Mansfield estudió con qué rapidez se generalizó el uso de doce innovaciones de una empresa a otra en cuatro industrias importantes: carbonera, siderúrgica, cervecera y ferroviaria. Las innovaciones son el vagón para viajes cortos, la cargadora locomóvil sin vía, la máquina excavadora minera de trabajo continuo (en la industria del carbón); el horno de coque de subproductos, el molino laminador continuo de tira ancha, línea continua de recocido para hoja lata (en la industria del hierro y el acero), el carro montacargas de horquilla, los recipientes de lata (o botes) y la llenadora de alta velocidad (en la industria de la cerveza); la locomotora Diesel, el control centralizado de tránsito y los retardadores de vagones o carros (en la industria de los ferrocarriles). Sus resultados se describen gráficamente en la Figura 3. Exceptuando el horno de coque secunda-



(a)



(b)



(c)

FIGURA 3. Aumento en el porcentaje de empresas importantes que introdujeron doce innovaciones; empresas del carbón mineral bituminoso, fierro y acero, cervecera y ferrocarrilera, entre 1890 y 1958; (a) horno para subproductos del coque (OC), locomotora diesel (LD), recipiente de lata (RL) y carro para viajes cortos (VC); (b) retardador de carros (RC), cargadora sin vía (CV), excavadora de minado continuo (EC) y montacargas de horquilla (MU); (c) laminador continuo de tira ancha (LA), control central de tráfico (CCT), recocido continuo (RC) y llenadora de alta velocidad (RAV).

rio y los envases de lata, los porcentajes dados son para cada dos años a partir de la introducción inicial. La magnitud del intervalo para el horno de coque es, aproximadamente, de seis años, y para los recipientes o botes de lámina, de seis meses. Nótese que todas estas gráficas tienen la forma de una curva logística.

TABLA 1.

Innovación	n	t_0	a_4	a_8	a_9	π	s
Locomotora Diesel	25	1925	−0.59	0.530	−0.027	1.59	0.015
Control central de tránsito	24	1926	−0.59	0.530	−0.027	1.48	0.024
Retardadores de vagones	25	1924	−0.59	0.530	−0.027	1.25	0.785
Laminador continuo de tira ancha	12	1924	−0.52	0.530	−0.027	1.87	4.908
Horno para subproductos del coque	12	1894	−0.52	0.530	−0.027	1.47	2.083
Recocido continuo	9	1936	−0.52	0.530	−0.027	1.25	0.554
Vagón para viajes cortos	15	1937	−0.57	0.530	−0.027	1.74	0.013
Cargadora sin vía	15	1934	−0.57	0.530	−0.027	1.65	0.019
Excavadora de minado continuo	17	1947	−0.57	0.530	−0.027	2.00	0.301
Recipiente de lámina	22	1935	−0.29	0.530	−0.027	5.07	0.267
Llenador de alta velocidad	16	1951	−0.29	0.530	−0.027	1.20	0.575
Montacargas de horquilla	19	1948	−0.29	0.530	−0.027	1.67	0.115

Para una comparación más detallada de las predicciones del modelo con los resultados observados, es necesario calcular las constantes n, k y t_0 para cada una de las doce innovaciones. La Tabla 1 da los valores de n, t_0, a_4, a_5, a_9, π y s para cada una de las doce innovaciones. La constante k puede entonces calcularse a partir de la ecuación (6). Como indican las respuestas a los Ejercicios 5 y 6, el modelo predice con exactitud razonable las tasas de adopción de estas doce innovaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Mansfield, E., "Technical change and the rate of imitation", *Econometrica*, Vol. 29, No. 4, oct. 1961.

EJERCICIOS

1. Resuelva el problema de valor inicial (2).
2. Tome $c = 0$ en (5). Demuestre que $p(t)$ crece monótonamente de 0 a N, y que no tiene puntos de inflexión.

3. Este es un argumento heurístico para determinar el comportamiento de la curva (5). Si $c' = 0$, entonces se tiene una curva logística, y si $c = 0$, entonces se tiene el comportamiento descrito en el Ejercicio 2. Así pues, si c es grande comparada con c', entonces se tiene una curva logística, y si c es pequeña en comparación con c' entonces se tiene el comportamiento ilustrado en el Ejercicio 2.
   (a) Suponga que $p(t)$ satisface la ecuación (4). Demuestre que

$$\frac{d^2p}{dt^2}=(N-p)(cp+c')(cN-2cp-c').$$

   (b) Muestre que $p(t)$ tiene un punto de inflexión en el cual dp/dt alcanza un máximo, si y solamente si $c'\ c < N$.
   (c) Suponga que $p(t)$ tiene un punto de inflexión en $t = t^*$. Demuestre que $p(t^*) \leq N/2$.

4. Resuelva el problema de valor inicial (7).

5. Parece razonable tomar el intervalo de tiempo entre el momento en que 20% de las empresas han introducido la innovación y el momento en que 80% de las empresas han introducido la innovación como la tasa de imitación.
   (a) Demuestre a partir del modelo, que la magnitud del intervalo es de $4(\ln 2)/k$.
   (b) A partir de los datos de la Tabla 1 calcule dicha duración para cada una de las doce innovaciones, y compare la Figura 3 con los valores observados.

6. (a) Demuestre a partir del modelo, que transcurren $(1/k)\ln(n-1)$ años antes de que el 50% de las compañías introduzcan una innovación.
   (b) Calcule dicho periodo para cada una de las doce innovaciones y compare la Figura 3 con los valores observados.

1.7 UN PROBLEMA DE ALMACENAMIENTO DE DESPERDICIOS ATÓMICOS

Durante varios años, la Comisión de Energía Atómica (AEC) (conocida ahora como la Comisión Reguladora de la Energía Nuclear de Estados Unidos ha asumido el control del concentrado de material radiactivo de desperdicio colocándolo en recipientes herméticamente sellados, los cuales son depositados en el mar a cincuenta brazas (300 pies o 90 metros) de profundidad. Al ser cuestionado este procedimiento por un grupo de ecologistas y científicos, la AEC aseguró que en estos recipientes nunca se presentarían fugas. Pruebas exhaustivas demostraron que la AEC tenía razón. Sin embargo, algunos ingenieros se preguntaron entonces si los recipientes se romperían al sufrir el impacto contra el fondo marino. La AEC respondió que no sucedería nunca tal cosa y los ingenieros trataron de investigar más en detalle. Después de realizar numerosos experimentos, encontraron que los recipientes se podrían romper si su velocidad en el momento del choque fuera 40 pie/s (o 12 m/s). El problema consiste, por lo tanto, en calcular la velocidad de los recipientes en el instante en que chocan contra el fondo del mar. Con este propósito es necesario revisar brevemente algunos conceptos de mecánica newtoniana.

La mecánica newtoniana es el estudio de las famosas leyes de movimiento de Newton y sus consecuencias. La primera ley del movimiento establece que un cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento con velocidad constante si ninguna fuerza actúa sobre él. Una fuerza puede considerarse como una atracción o una repulsión. La acción puede ser ejercida directamente por algo que esté en contacto con el cuerpo, o indirectamente, como es el caso de la fuerza de gravedad de la Tierra.

La segunda ley de Newton describe el movimiento de un objeto sobre el que actúan varias fuerzas. Denótese por $y(t)$ la posición del centro de gravedad de un objeto. (Se supone que el cuerpo se mueve solamente en una dirección.) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y que tienden a incrementar y se consideran positivas, mientras que las que tienden a disminuir y se consideran negativas. La fuerza resultante F que actúa sobre un objeto se define como la suma de todas las fuerzas positivas menos la suma de todas las fuerzas negativas. La segunda ley del movimiento establece que la aceleración d^2y/dt^2 de un objeto es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre él, es decir,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m}F. \tag{1}$$

La constante m es la masa del objeto. Se relaciona con el peso del mismo por medio de la expresión $W = mg$, donde g es la aceleración de la gravedad. A menos que se indique lo contrario, se supone que el peso de un objeto y la aceleración de la gravedad son constantes. También se utilizará aquí el sistema inglés de unidades, de modo que t se mide en segundos (s), y en pies (pie), y F en libras (fuerza) (lb). La unidad de m es entonces el *slug* o geolibra y la aceleración gravitacional g es igual a 32.2 pie/s^2.

OBSERVACIÓN 1. Sería preferible utilizar el Sistema Internacional de Unidades (SI), donde y se mide en metros (m) y F en newtons (N). La unidad de m es entonces el kilogramo (kg), y la aceleración gravitacional es igual a 9.8 m/s^2. En la Sección 2.6 de la tercera edición de este libro se cambió del sistema inglés de unidades al sistema mks (o ahora, SI). Sin embargo, cambiar el sistema métrico mks en esta sección causaría una confusión innecesaria a los usuarios de la primera y segunda ediciones. Esto se debe a los errores de truncamiento numérico que conlleva convertir pies a metros y libras a newtons.*

Ahora se vuelve al problema de almacenamiento de desechos atómicos. Al descender un recipiente o envase hermético en el agua son tres las fuerzas que actúan sobre él: W, B y D. La fuerza W es el peso del recipiente que lo hace caer o moverse hacia abajo y su magnitud es 527.436 lb. La fuerza B es la fuerza hidrostática de empuje del agua que actúa sobre el recipiente. Esta acción, tiende a mover el recipiente hacia arriba y su magnitud es el peso del agua desplazada por el volumen del contenedor. Ahora bien, la Comisión de Energía Atómica usó recipientes de 55 galones cuyo volumen es de 7.35 pie^3. El peso de un pie cúbico de agua salada es de 63.99 lb. Así pues, $B = (63.99)(7.35) = 470.327$ lb.

La fuerza D es la fuerza de resistencia hidrodinámica que actúa sobre el recipiente, y se opone a su movimiento a través del agua. Los experimentos han indicado que todo

* (N. del R.) En esta versión se aplican las normas metrológicas modernas, en simbología y definiciones, aunque se han conservado las unidades inglesas del original.

fluido, como por ejemplo: agua, aceite y aire, se opone al movimiento de un objeto a través de él. Esta fuerza de resistencia actúa en dirección opuesta al movimiento y por lo común es directamente proporcional a la velocidad V del cuerpo. De modo que, $D = cV$, para una constante positiva c. Nótese que la fuerza de resistencia del agua aumenta si V lo hace y disminuye si V se reduce. Para calcular D los ingenieros realizaron muchos experimentos de remolque. Concluyeron que la orientación del recipiente tiene poco efecto sobre dicha fuerza de resistencia, y que

$$D = 0.08\,V\,\frac{(\text{lb})(\text{s})}{\text{pie}}$$

Ahora bien, al tomar $y = 0$ al nivel del mar y consideran positiva la dirección hacia abajo se tiene que W es una fuerza positiva, y que B y D son fuerzas negativas. Por lo tanto, de (1) se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m}(W - B - cV) = \frac{g}{W}(W - B - cV).$$

Esta expresión puede escribirse como una ecuación diferencial lineal de primer orden en $V = dy/dt$, es decir,

$$\frac{dV}{dt} + \frac{cg}{W}V = \frac{g}{W}(W - B). \tag{2}$$

Al inicio, cuando se suelta el contenedor en la superficie del mar, su velocidad es cero. Así pues, la velocidad del recipiente $V(t)$ satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dV}{dt} + \frac{cg}{W}V = \frac{g}{W}(W - B), \qquad V(0) = 0, \tag{3}$$

y de aquí se deduce que

$$V(t) = \frac{W - B}{c}\left[1 - e^{(-cg/W)t}\right]. \tag{4}$$

La ecuación (4) expresa la velocidad del recipiente como una función del tiempo. Para calcular la velocidad de impacto del envase es necesario calcular el tiempo t en el cual el recipiente toca el fondo del océano. Desafortunadamente, sin embargo, es imposible evaluar t explícitamente como una función de y (Ejercicio 2). Por lo tanto, no puede usarse la ecuación (4) para determinar la velocidad del recipiente en el momento del impacto. No obstante, la AEC usó esta ecuación para demostrar que los recipientes no se destruyen con el golpe. De hecho, se observa de (4) que $V(t)$ es una función monótona creciente del tiempo, y que tiende al valor límite

$$V_T = \frac{W - B}{c}$$

cuando t tiende a infinito. La cantidad V_T se conoce como *velocidad terminal* del recipiente. Claramente, $V(t) \leq V_T$, de modo que la velocidad de impacto del recipiente con el fondo del mar es con seguridad menor que $(W - B)/C$. Ahora bien, si esta velo-

cidad terminal fuera menor que 40 pie/s, entonces los recipientes no se romperían con el golpe. Sin embargo, se tiene que

$$\frac{W-B}{c}=\frac{527.436-470.327}{0.08}=713.86 \text{ ft/s},$$

y este valor es demasiado grande.

En este momento debe ser claro que la única manera de dirimir las diferencias entre la AEC y los ingenieros es calcular $v(y)$, la velocidad del recipiente como función de la posición. La función $v(y)$ es muy diferente de la función $V(t)$, la velocidad del contenedor como función del tiempo. Sin embargo, si se expresa y como función de t, ambas funciones están relacionadas por la siguiente ecuación

$$V(t)=v(y(t))$$

y aplicando la regla de la cadena para la diferenciación, $dV/dt = (dv/dy)(dy/dt)$, se obtiene

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=W-B-cV.$$

pero $dy/dt = V(t) = v(y(t))$. Así pues, eliminando la dependencia de y en t se ve que $v(y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{W}{g}v\frac{dv}{dy}=W-B-cv, \quad \text{o} \quad \frac{v}{W-B-cv}\frac{dv}{dy}=\frac{g}{W}.$$

Más aún

$$v(0)=v(y(0))=V(0)=0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^v \frac{r\,dr}{W-B-cr}=\int_0^y \frac{g}{W}ds=\frac{gy}{W}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{r\,dr}{W-B-cr}&=\int_0^v \frac{r-(W-B)/c}{W-B-cr}dr+\frac{W-B}{c}\int_0^v \frac{dr}{W-B-cr}\\&=-\frac{1}{c}\int_0^v dr+\frac{W-B}{c}\int_0^v \frac{dr}{W-B-cr}\\&=-\frac{v}{c}-\frac{(W-B)}{c^2}\ln\frac{|W-B-cv|}{W-B}.\end{aligned}$$

Ya se tenía que $v < (W-B)/c$; por lo tanto, $W-B\ cv$ siempre es positivo y además

$$\frac{gy}{W}=-\frac{v}{c}-\frac{(W-B)}{c^2}\ln\frac{W-B-cv}{W-B}. \tag{5}$$

En este punto parecería no haber solución al problema, pues no es posible expresar a v como una función explícita de y a partir de (5). Sin embargo, esta dificultad aparentemente insalvable tiene solución. Como se muestra en la Sección 1.11, es muy simple evaluar $v(300)$ a partir de (5) con una computadora digital. Solamente se requiere sumi-

nistrar a la máquina una buena aproximación de $v(300)$, lo cual se hace de la siguiente manera. La velocidad $v(y)$ del recipiente satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{W}{g} v \frac{dv}{dy} = W - B - cv, \qquad v(0) = 0. \tag{6}$$

Considerando por un momento $c = 0$ en (6) se obtiene un nuevo problema de valor inicial

$$\frac{W}{g} u \frac{du}{dy} = W - B, \qquad u(0) = 0. \tag{6'}$$

(v se reemplazó por u para evitar confusiones). Es posible integrar (6′) directamente para obtener que

$$\frac{W}{g}\frac{u^2}{2} = (W-B)y, \quad \text{o} \quad u(y) = \left[\frac{2g}{W}(W-B)y\right]^{1/2}$$

En particular,

$$u(300) = \left[\frac{2g}{W}(W-B)300\right]^{1/2} = \left[\frac{2(32.2)(57.109)(300)}{527.436}\right]^{1/2}$$
$$\cong \sqrt{2092} \cong 45.7 \text{ ft/s}.$$

La afirmación ahora es que $u(300)$ es una buena aproximación de $v(300)$. La demostración es como sigue: Primero obsérvese que la velocidad del recipiente siempre es mayor si no existe la fuerza de resistencia que se opone al movimiento. Por lo tanto,

$$v(300) < u(300).$$

Segundo, la velocidad v aumenta si y lo hace, de modo que $v(y) \leq v(300)$ para $y \leq 300$. Por lo tanto, la fuerza D de resistencia del agua que actúa sobre el recipiente es siempre menor que $0.08 \times u(300) \cong 3.7$ lb. Ahora bien, la fuerza resultante $W - B$ que atrae el recipiente hacia abajo es de aproximadamente 57.1 lb, la cual es muy grande comparada con D. Por lo tanto, es razonable que $u(y)$ sea una buena aproximación de $v(y)$. Y de hecho así es, ya que numéricamente se ve que (Sección 1.11) $v(300) = 45.1$ pie/s. Así pues, los recipientes pueden dañarse con el impacto y los ingenieros tenían razón.

EPÍLOGO. Las reglas de la Comisión de Energía Atómica (AEC) (la actual NRC, de *Nuclear Regulatory Comission*) prohiben expresamente en la actualidad arrojar al mar desperdicios atómicos de bajo nivel. El autor no está seguro de si los países de Europa Occidental también han prohibido esta práctica.

OBSERVACIÓN. El método presentado en esta sección puede servir para calcular la velocidad de cualquier objeto que se mueve a través de un medio fluido que se opone a su movimiento. Simplemente se hace caso omiso de la fuerza de resistencia si el medio no es agua. Por ejemplo, denótese por $V(t)$ la velocidad de un paracaidista que desciende hacia tierra bajo la influencia de la gravedad. Entonces se tiene que

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = W - D$$

donde W es el peso de la persona y del paracaídas, y D es la fuerza de resistencia que ejerce la atmósfera sobre el paracaidista en descenso. La fuerza de resistencia de un objeto en el aire o en cualquier fluido de viscosidad baja es usualmente casi proporcional a V^2. La proporcionalidad estricta con V es más bien el caso excepcional y ocurre sólo a velocidades muy bajas. El criterio para aplicar la ley cuadrática o la lineal es el *número de Reynolds*:

$$R = \rho VL/\mu.$$

L es la dimensión de la longitud representativa del objeto; ϱ y μ son la densidad y la viscosidad del líquido, respectivamente. Si $R < 10$ entonces $D \sim V$, y si $R > 10^3$ entonces $D \sim V^2$. Para $10 < R < 10^3$ ninguna de las leyes es exacta.

EJERCICIOS

1. Resuelva el problema de valor inicial (3).
2. Despeje $y = y(t)$ de (4) y demuestre que la ecuación $y = y(t)$ no puede resolverse explícitamente para $t = t(y)$.
3. Demuestre que los recipientes con desperdicios atómicos no se destruyen con el impacto si son arrojados L pies de profundidad de agua con

$$(2g(W - B)L/W)^{1/2} < 40.$$

4. Fat Richie, un matón obeso del bajo mundo que pesaba 400 lb, fue arrojado por la ventana de un departamento a 2 800 pies de altura sobre el suelo en la ciudad de Nueva York. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, halle (a) la velocidad con la cual Fat Richie llegó al piso; (b) el tiempo transcurrido antes del choque con el suelo.
5. Un objeto que pesa 300 lb es arrojado a un río que tiene una profundidad de 150 pie. El volumen del objeto es de 2 pie^3, y la fuerza de resistencia que el agua opone a éste es de 0.05 veces su velocidad. La resistencia se considera despreciable si no excede al 5% de la fuerza resultante que impulsa al recipiente hacia abajo. Pruebe que la fuerza de resistencia es despreciable en este caso. (Aquí $B = 2(62.4) = 124.8$.)
6. A partir de la posición de reposo, se dejan caer al mismo tiempo dentro de un río una esfera de 400 lb y volumen igual a $4\pi/3$ y un cilindro de 300 lb y volumen π. Las fuerzas de resistencia ejercidas por el agua sobre la esfera y el cilindro son λV_s y λV_c, respectivamente, donde V_s, V_c son las velocidades respectivas de la esfera y el cilindro, y λ es una constante positiva. Determine cuál de los dos objetos llega primero al fondo del río.
7. Un paracaidista desciende a partir del reposo en dirección a tierra. El peso total del hombre y el paracaídas es de 161 lb. Antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire es igual a $V/2$. El artefacto se abre 5 s después de iniciado el descenso y la resistencia del aire es entonces $V^2/2$. Determine la velocidad $V(t)$ del paracaidista después que se abre el paracaídas.

8. Un paracaidista salta desde gran altura. El peso total de la persona y el paracaídas es de 161 lb. Denótese por $V(t)$ su velocidad t segundos después de haber iniciado el descenso. Durante los primeros 10 s la resistencia del aire es $V/2$. Después, al estar abierto el paracaídas la resistencia del aire es $10\,V$. Obtenga una fórmula explícita para $V(t)$ si t es mayor que o igual a 10 s.

9. Un objeto de masa m se deja caer verticalmente con una velocidad inicial V_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad.
   (a) Determine la relación que hay entre la velocidad V y el tiempo t si la resistencia es igual a $c\sqrt{V}$.
   (b) Encuentre la velocidad final del objeto. *Sugerencia:* Es posible evaluar la velocidad final aun cuando no se pueda despejar $V(t)$.

10. Un cuerpo de masa m desciende a partir de una posición de reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir $D = cV^2$. Obtenga $V(t)$ y calcule la velocidad final $V(t)$.

11. Un cuerpo de masa m es lanzado hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial V_0. Tome como eje y la dirección vertical siendo, y positiva hacia arriba, y sitúese el origen en la citada superficie. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en cuenta las variaciones en el campo gravitacional debidas a las diferentes altitudes se obtiene

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra.
   (a) Considere $V(t) = v(y(t))$. Encuentre una ecuación diferencial que se cumpla para $v(y)$.
   (b) Determine la velocidad inicial mínima V_0 para la cual el cuerpo no regresa a la Tierra. Ésta es la llamada *velocidad de escape*. *Sugerencia:* La evaluación de la velocidad de escape requiere que $v(y)$ permanezca positiva.

12. En realidad no es necesario calcular $v(y)$ explícitamente para probar que $v(300)$ es superior a 40 pie/s. Aquí se presenta una demostración alternativa. Primero nótese que $v(y)$ crece si y aumenta. Esto implica que y es una función monótona creciente de v. Por lo tanto, si y es menor que 300 pie cuando v es 40 pie/s, entonces v debe ser mayor que 40 pie/s cuando y vale 300 pie. Sustituya $v = 40$ pie/s en la ecuación (5) demuestre que y es menor que 300 pie. Se concluye, por lo tanto, que los recipientes pueden destruirse con el impacto.

1.8 DINÁMICA DEL DESARROLLO DE TUMORES, PROBLEMAS DE MEZCLADO Y TRAYECTORIAS ORTOGONALES

En esta sección se presentan tres aplicaciones sencillas, pero extremadamente útiles, de las ecuaciones de primer orden. La primera aplicación trata del crecimiento de tumores sólidos; la segunda trata del problema de mezclado o análisis compartimental, y la ter-

cera aplicación indica cómo encontrar una familia de curvas que es ortogonal a una familia dada de curvas.

a) *Dinámica del Desarrollo de Tumores*

Se ha observado experimentalmente que ciertas células "libres" como las bacterias, se desarrollan o crecen a una tasa proporcional al volumen de las células en proceso de división en ese momento. Denótese por $V(t)$ el volumen de las células en el tiempo t. Entonces se tiene

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V \tag{1}$$

para alguna constante positiva λ. La solución de (1) es

$$V(t) = V_0 e^{\lambda(t - t_0)} \tag{2}$$

donde V_0 es el volumen de las células en división en el tiempo inicial t_0. Así pues, las células libres crecen *exponencialmente* en el tiempo. Una consecuencia importante de (2) es que el volumen celular se duplica continuamente (Ejercicio 1) cada intervalo de tiempo de magnitud $\ln 2/\lambda$.

Por otro lado, los tumores endurecidos no crecen exponencialmente en el tiempo. Al crecer un tumor de este tipo, continuamente se incrementa el tiempo de duplicación del volumen total. Varios investigadores han señalado que los datos para muchos tumores se ajustan bastante bien, durante un desarrollo a casi 1 000 veces el volumen inicial, a la ecuación

$$V(t) = V_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right) \tag{3}$$

donde $\exp(x) \equiv e^x$; λ y α son constantes positivas.

La ecuación (3) se designa usualmente como una relación gompertziana. Expresa que el tumor crece cada vez más y más lento y que su volumen tiende al valor $V_0 e^{\lambda/\alpha}$. Durante mucho tiempo, investigadores médicos han tratado de explicar esta desviación del simple crecimiento exponencial. La manera de obtener una mejor perspectiva del problema es encontrar una ecuación diferencial que tenga a $V(t)$ como solución. Derivando (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V_0 \lambda \exp(-\alpha t) \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\left(1 - \exp(-\alpha(t))\right)\right) \\ &= \lambda e^{-\alpha t} V. \end{aligned} \tag{4}$$

Dos teorías antagónicas han sido propuestas para explicar la dinámica del crecimiento tumoral y corresponden a cada uno de los siguientes arreglos de la ecuación diferencial (4)

$$\frac{dV}{dt} = (\lambda e^{-\alpha t})V \tag{4a}$$

$$\frac{dV}{dt} = \lambda(e^{-\alpha t} V). \tag{4b}$$

De acuerdo con la primera teoría, el efecto de retardo en el crecimiento del tumor se debe al aumento del tiempo medio de generación de las células que se reproducen, sin

un cambio en la proporción de reproducción de las células. Con el correr del tiempo las células reproductivas maduran o envejecen, por lo que se dividen más lentamente. Esta teoría corresponde a la ecuación (4a).

La ecuación (4b) sugiere que el tiempo medio de generación de las células en proceso de división es constante, y que el retraso en el crecimiento se debe a la pérdida de células reproductoras en el tumor. Una posible explicación de esto es que se desarrolla una *región necrótica* en el centro del tumor. Esta necrosis aparece para un tamaño crítico en un tipo particular de tumor, y después el núcleo necrótico aumenta rápidamente a medida que crece la masa total del tumor. Según esta teoría, el núcleo necrótico se desarrolla debido a que en muchos tumores el suministro de sangre, y por tanto de oxígeno y nutrientes, se restringe casi por completo a la superficie tumoral y a regiones cercanas a ella. Conforme el tumor aumenta, el suministro de oxígeno por difusión hacia el núcleo se dificulta más, lo que trae consigo la formación de un núcleo necrótico.

b) *Problemas de Mezclado*

Muchos problemas importantes en biología e ingeniería química pueden enmarcarse en el siguiente contexto. Una solución que contiene una concentración fija de una sustancia x fluye con un cierto gasto a un tanque o compartimiento, el cual contiene la sustancia x y posiblemente otras sustancias. La mezcla se homogeniza rápidamente y después sale del recipiente a un gasto determinado.

Se desea hallar la concentración de la sustancia x en el tanque para todo tiempo t.

Problemas de este tipo se conocen por lo general como "problemas de mezclado" o "análisis compartimental". El siguiente ejemplo ilustra cómo resolver este tipo de casos.

EJEMPLO 1 Un tanque contiene S_0 lb de sal disueltas en 200 galones de agua. En el tiempo $t = 0$ entra agua que contiene ½ lb de sal por galón, con un gasto de 4 gal/min, y la solución homogenizada sale del depósito con la misma intensidad. Determinar la concentración de sal en el tanque para todo tiempo $t > 0$.

SOLUCIÓN. Denótese por $S(t)$ la cantiad de sal en el tanque en el tiempo t que debe ser igual al gasto con el cual entra la sal en el tanque, menos el gasto con el cual sale del tanque. Obviamente la rapidez con la cual entra la sal al tanque es

$$\tfrac{1}{2}\ \text{lb/gal veces } 4\ \text{gal/min} = 2\ \text{lb/min}.$$

Tras reflexionar un momento también es obvio que el gasto con el cual efluye la sal del tanque es

$$4\ \text{gal/min veces } \frac{S(t)}{200}.$$

Así pues,

$$S'(t) = 2 - \frac{S(t)}{50}, \qquad S(0) = S_0,$$

y esto implica que

$$S(t) = S_0 e^{-0.02t} + 100(1 - e^{-0.02t}). \tag{5}$$

Por lo tanto, la concentración $c(t)$ de sal en el tanque está dada por

$$c(t)=\frac{S(t)}{200}=\frac{S_0}{200}e^{-0.02t}+\tfrac{1}{2}(1-e^{-0.02t}). \tag{6}$$

OBSERVACIÓN. El primer término que aparece en el lado derecho de (5) representa la proporción de la cantidad original de sal que permanece en el tanque en el tiempo t. Tal término se vuelve cada vez más pequeño con el paso del tiempo, conforme la solución original sale del depósito. El segundo término del segundo miembro de (5) representa la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, debida a la acción del flujo. Claramente la cantidad de sal en el tanque debe tender al valor límite de 100 lb, lo cual puede verificarse haciendo que t teniendo a infinito en (5).

c) *Trayectorias Ortogonales*

En muchas aplicaciones físicas, con frecuencia, es necesario determinar trayectorias ortogonales a una familia dada de curvas. (Una curva que interseca en ángulo recto a cada uno de los miembros de una familia de curvas se llama *trayectoria ortogonal* a la familia dada.) Por ejemplo, una partícula con carga eléctrica que se mueve bajo la influencia de un campo magnético describe siempre una curva que es perpendicular a cada una de las líneas del campo magnético. El problema de encontrar trayectorias ortogonales a una familia de curvas puede resolverse de la siguiente manera. Considérese que la familia de curvas está descrita por la siguiente relación

$$F(x,y,c)=0. \tag{7}$$

Derivando esta ecuación se tiene

$$F_x+F_y y'=0, \qquad \text{o bien} \qquad y'=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{8}$$

Después se despeja $c = c(x, y)$ en (7), y se sustituye c en (8) por tal valor $c(x, y)$. Finalmente, y dado que las pendientes de las curvas que se intersecan ortogonalmente son recíprocas negativas, se ve que las trayectorias ortogonales a (7) son curvas solución de la ecuación

$$y'=\frac{F_y}{F_x}. \tag{9}$$

EJEMPLO 2 Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas

$$x=cy^2.$$

SOLUCIÓN. Derivando la ecuación $x = cy^2$ se obtiene $1 = 2cyy'$.

Dado que $c = x/y^2$, se ve que $y' = y/2x$. Así pues, las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $x = cy^2$ son las curvas solución de la ecuación

$$y'=-\frac{2x}{y}. \tag{10}$$

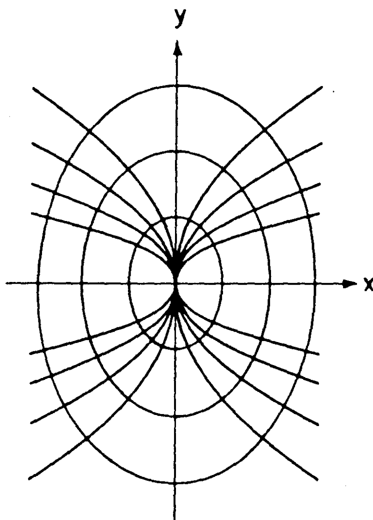


FIGURA 1. Las parábolas $x = cy^2$ y sus trayectorias ortogonales.

Esta ecuación es separable, y su solución es

$$y^2+2x^2=k^2. \tag{11}$$

De modo que la familia de elipses (11) (Figura 1) son las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $x = cy^2$.

BIBLIOGRAFÍA

Burton, Alan C., "Rate of growth of solid tumors as a problem of diffusion". *Growth*, 1966, Vol. 30, pág. 157-176.

EJERCICIOS

1. Una sustancia dada satisface la ley de crecimiento exponencial (1). Demuestre que la gráfica de ln V en función de t es una recta.
2. Una sustancia x se multiplica exponencialmente, y una cantidad dada de la sustancia se duplica cada 20 años. Si se tienen ahora 3 lb de dicha sustancia, ¿cuántas lb se tendrán en 7 años?
3. Una sustancia decae o decrece exponencialmente, y después de 2 años sólo queda la mitad de la cantidad inicial. ¿Cuánto tiempo es necesario para que 5 lb decaigan a 1 lb?
4. Se propone la ecuación $p' = ap^{\alpha}$, con $\alpha > 1$, como modelo para el crecimiento poblacional de una cierta especie. Demuestre que $p(t) \to \infty$ en tiempo finito. Con-

cluya que, por lo tanto, este modelo no es exacto para intervalos de tiempo de magnitud razonable.

5. Un tumor canceroso satisface la relación gompertziana (3). Inicialmente, cuando contenía 10^4 células, el tumor crecía a una tasa de 20% por unidad de tiempo. El valor numérico de la constante de retardo es 0.02. ¿Cuál es el valor límite de las células en este tumor?

6. Se inyecta una *dosis trazadora* o *señaladora* de yodo radiactivo I^{131} en el flujo o torrente sanguíeno en el tiempo $t = 0$. Suponga que la cantidad inicial Q_0 de yodo se distribuye homogéneamente en el flujo antes de cualquier pérdida. Denótese por $Q(t)$ la cantidad de yodo en la sangre en el tiempo $t > 0$. Una parte del yodo es eliminado de la sangre y pasa a la orina a una tasa $k_1 Q$. Otra parte del I^{131} es retenido en la glándula tiroides a una tasa $k_2 Q$. Calcule $Q(t)$.

7. En un tanque que tiene 1000 galones (gal) de agua se vierten por bombeo desperdicios industriales a un gasto de 1 gal/min, y la solución bien mezclada sale del tanque con la misma rapidez. (a) Halle la concentración del desperdicio en el tanque en el tiempo t. (b) ¿Cuánto tiempo es necesario para que la concentración alcance el 20%?

8. Un depósito contiene 300 gal de agua y 100 gal de contaminantes. Se vierte agua fresca en el tanque a un gasto de 2 gal/min y la mezcla homogénea sale del recipiente con la misma intensidad. ¿Cuánto tiempo es necesario para que la concentración de contaminantes disminuya a 1/10 de su valor original?

9. Considere un tanque que en el tiempo $t = 0$ contiene Q_0 lb de sal disueltas en 150 gal de agua. Supóngase que a un gasto de 3 gal/min entra agua al tanque con un contenido de 1/2 lb de sal por galón y que, a la misma rapidez, sale el agua bien mezclada del tanque. Halle una expresión para la concentración de sal en el tanque en el tiempo t.

10. Una habitación que contiene 1000 pie^3 de aire se encuentra inicialmente libre de monóxido de carbono (CO). En el tiempo $t = 0$ entra al cuarto humo de cigarrillos con un contenido de 4% de monóxido de carbono y un gasto de 0.1 pie^3/min. La mezcla homogenizada sale del local a la misma tasa. Calcule el tiempo para el cual la concentración de CO en el aire alcanza 0.012%. (Una exposición prolongada a esta concentración de monóxido de carbono es peligrosa.)

11. Un tanque de 500 gal de capacidad contiene inicialmente 100 gal de agua pura. En el tiempo $t = 0$ fluye en el tanque agua con un contenido de 50% de contaminantes a un gasto de 2 gal/min. La mezcla homogénea sale del tanque a un gasto de 1 gal/min. Calcule la concentración de contaminantes en el tanque en el momento en que éste se derrama.

En los Ejercicios 12 a 17 encuentre las trayectorias ortogonales a la familia dada de curvas.

12. $y = cx^2$

13. $y^2 - x^2 = c$

14. $y = c\operatorname{sen} x$

15. $x^2 + y^2 = cx$ (Véase el Ejercicio 13 de la Sección 1.4.)

16. $y = ce^x$ 17. $y = e^{cx}$

18. La presencia de toxinas en un cierto medio destruye una capa de bacterias a una tasa proporcional al número de bacterias presentes y a la cantidad de toxina. Llámese a a la constante de proporcionalidad. Si no hubiera toxinas, las bacterias se reproducirían con una tasa proporcional al número de las que están presentes. Desígnese por b a esta constante de proporcionalidad. Suponga que la cantidad de toxina T se incrementa a una tasa constante c; es decir, $dT/dy = c$, y que su producción se inicia en el tiempo $t = 0$. Denótese por $y(t)$ el número de bacterias vivas que están presentes en el tiempo t.
   (a) Obtenga una ecuación diferencial que sea válida para $y(t)$.
   (b) Resuelva dicha ecuación para evaluar $y(t)$. ¿Qué ocurre con $y(t)$ cuando t tiende a ∞?

19. Muchos bancos de ahorro ofrecen tasas de interés compuesto continuos. Esto significa que el monto de dinero $P(t)$ que se deposita en el tiempo t satisface la ecuación diferencial $dP(t)/dt = rP(t)$, donde r es el tipo de interés anual y t se mide en años. Denótese por P_0 el monto inicial de la inversión.
   (a) Demuestre que $P(1) = P_0e^r$.
   (b) Tómese $r = 0.0575, 0.065, 0.0675$ y 0.075. Pruebe que $e^r = 1.05919, 1.06716, 1.06983$ y 1.07788, respectivamente. Así pues los tipos anuales de interés efectivos (en %) de 5¾, 6½, 6¾ y 7½ deben ser 5.919, 6.716, 6.983 y 7.788%, respectivamente. Sin embargo, la mayoría de los bancos anuncian rendimientos anuales efectivos de 6, 6.81, 7.08 y 7.9%, respectivamente. La razón de esta diferencia es que los bancos calculan una tasa diaria de interés basada en 360 días y pagan réditos por cada día que el dinero está depositado. En un año se tienen 3 días extra. Así pues, multiplicando los valores 5.919, 6.716, 6.6983 y 7.788% por 365/360 se obtienen los valores anunciados.
   (c) Es interesante notar que un banco, el Old Colony Cooperative Bank, en Rhode Island, ofrece un rendimiento anual efectivo de 6.72%, con un tipo de interés anual de 6½% (el valor inferior) y un rendimiento anual efectivo de 7.9% con un tipo de interés anual de 7½%. De modo que, dichos tipos de interés no son congruentes.

1.9 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES QUE NO ES POSIBLE RESOLVER

Cuando iniciamos el estudio de las ecuaciones diferenciales, solamente se podía resolver la ecuación $dy/dt = g(t)$. Posteriormente se incluyeron las ecuaciones lineales y las separables. Pero, en general, es posible resolver todas las ecuaciones diferenciales que están, o puedan estar escritas, en la forma siguiente

$$\frac{d}{dt}\phi(t,y) = 0 \qquad (1)$$

para una función $\phi(t, y)$. De hecho integrando en ambos miembros de (1) se obtiene

$$\phi(t, y) = \text{constante} \tag{2}$$

y de aquí se despeja y como función de t.

EJEMPLO 1 La ecuación $1 + \cos(t + y) + \cos(t + y)(dy/dt) = 0$ puede expresarse en la forma $(d/dt)[t + \operatorname{sen}(t + y)] = 0$. Por lo tanto,

$$\phi(t,y) = t + \operatorname{sen}(t+y) = c, \quad \text{and} \quad y = -t + \operatorname{arcsen}(c-t).$$

EJEMPLO 2 La ecuación $\cos(t + y) + [1 + \cos(t + y)](dy/dt) = 0$ puede escribirse en la forma $(d/dt)[t + \operatorname{sen}(t + y)] = 0$. Por tanto,

$$\phi(t,y) = y + \operatorname{sen}(t+y) = c.$$

Es necesario dejar la solución en esta forma, ya que no es posible despejar y como una función explícita del tiempo.

Claramente la ecuación (1) es la ecuación más general de primer orden que se puede resolver. De manera que, es importante poder reconocer cuándo una ecuación diferencial puede expresarse en esta forma. Esto no es tan simple como podría esperarse. Por ejemplo, no es nada evidente que la siguiente ecuación diferencial pueda escribirse en la forma $(d/dt)(y^3 + t^2 + ty + \operatorname{sen} y + \cos t) = 0$:

$$2t + y - \operatorname{sen} t + (3y^2 + \cos y + t)\frac{dy}{dt} = 0$$

Para encontrar todas las ecuaciones diferenciales que pueden ser expresadas en la forma (1), obsérvese que a partir de la regla de la cadena para derivación parcial se tiene

$$\frac{d}{dt}\phi(t,y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial $M(t, y) + N(t, y)(dy/dt) = 0$ puede escribirse en la forma $(d/dt)\phi(t, y) = 0$, si y sólo si existe una función $\phi(t, y)$ tal que $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ y $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$. Esto lleva entonces a la siguiente pregunta. Dadas dos funciones $M(t, y)$ y $N(t, y)$, ¿existe una función $\phi(t, y)$ tal que $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ y $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$? Desafortunadamente, y como se pone de manifiesto en el siguiente teorema, la respuesta casi siempre es que no.

TEOREMA 1. Sean $M(t, y)$ y $N(t, y)$ funciones continuas y con derivadas parciales continuas con respecto a t y a y en el rectángulo R formado por los puntos (t, y), con $a < t < b$ y $c < y < d$. Entonces existe una función $\phi(t, y)$ tal que $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ y $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$ si y sólo si

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$$

en R.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ para una función $\phi(t, y)$ si y solamente si

$$\phi(t,y)=\int M(t,y)\,dt+h(y) \tag{3}$$

donde $h(y)$ es una función arbitraria de y. Derivando parcialmente ambos lados de (3) con respecto a y se obtiene que

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt+h'(y).$$

Por lo tanto, $\partial\phi/\partial y$ es igual a $N(t, y)$ si y sólo si

$$N(t,y)=\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt+h'(y)$$

o bien

$$h'(y)=N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt. \tag{4}$$

Ahora bien, $h'(y)$ es una función sólo de y mientras que el lado derecho de (4) pareciera ser una función tanto de t como de y. Pero una función de y solamente no puede ser igual a una función de t y de y. Así pues, la ecuación (4) tiene sentido únicamente si su segundo miembro es función de y. Esto sucede si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt\right]=\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial y}=0.$$

Por lo tanto, si $\dfrac{\partial N}{\partial t}\neq\partial M/\partial y$, entonces no existe una función $\phi(t, y)$ tal que $M = \partial\phi/\partial t$ y $N = \partial\phi/\partial y$. Por otro lado, si $\partial N/\partial t = \partial M/\partial y$, entonces es posible resolver para determina

$$h(y)=\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt\right]dy.$$

Como consecuencia, $M = \partial\phi/\partial t$ y $N = \partial\phi/\partial y$ con

$$\phi(t,y)=\int M(t,y)\,dt+\int\left[N(t,y)-\int\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt\right]dy. \quad \square \tag{5}$$

DEFINICIÓN. La ecuación diferencial

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0 \tag{6}$$

se dice que es *exacta* si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$.

La razón de ser de esta definición es, por supuesto, que el lado izquierdo de (6) es la derivada exacta de una función conocida de t y de y si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$.

OBSERVACIÓN 1. No es esencial en el enunciado del Teorema 1 el hecho de que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$ en un rectángulo. Es suficiente si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$ en una región R que no contiene "hoyos". Es decir, si c es una curva cerrada que está contenida completamente en R, entonces su interior también está por completo contenido en R.

OBSERVACIÓN 2. La ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ puede escribirse siempre en la forma $M(t, y) + N(t, y)(dy/dt) = 0$, al hacer $M(t, y) = -f(t, y)$ y $N(t, y) = 1$.

OBSERVACIÓN 3. Es costumbre decir que la solución de una ecuación diferencial exacta está dada por $\phi(t, y) =$ constante. Lo que se quiere decir, en realidad, es que hay que despejar y de la ecuación como una función de t y de c. Desafortunadamente, la mayoría de las ecuaciones diferenciales exactas no pueden resolverse explícitamente para evaluar y como función de t. Aunque esto podría parecer molesto, es pertinente mencionar que con ayuda de una computadora es muy sencillo calcular $y(t)$ con cualquier grado de precisión (Sección 1.11).

No se recomienda en la práctica tratar de memorizar la ecuación (5). Más bien se sugiere seguir alguno de los tres métodos siguientes para obtener $\phi(t, y)$.

Primer Método: La ecuación $M(t, y) = \partial\phi/\partial t$ determina $\phi(t, y)$ salvo por una función arbitraria de y únicamente, es decir,

$$\phi(t,y) = \int M(t,y)\,dt + h(y).$$

La función $h(y)$ se determina a partir de la ecuación

$$h'(y) = N(t,y) - \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}\,dt.$$

Segundo Método: Si $N(t, y) = \partial\phi/\partial y$, entonces necesariamente se tiene

$$\phi(t,y) = \int N(t,y)\,dy + k(t)$$

donde $k(t)$ es una función arbitraria sólo de t. Dado que

$$M(t,y) = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \int \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\,dy + k'(t)$$

se ve que $k(t)$ se determina a partir de la ecuación

$$k'(t) = M(t,y) - \int \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}\,dy.$$

Nótese que el lado derecho de esta ecuación (Ejercicio 2) es una función solamente de t si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$.

Tercer Método: Las ecuaciones $\nabla\phi/\nabla t = M(t, y)$ y $\nabla\phi/\nabla y = N(t, y)$ implican que

$$\phi(t,y) = \int M(t,y)\,dt + h(y) \quad \text{y} \quad \phi(t,y) = \int N(t,y)\,dy + k(t).$$

Por lo general, es posible determinar $h(y)$ y $k(t)$ por simple inspección.

EJEMPLO 3 Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$3y+e^t+(3t+\cos y)\frac{dy}{dt}=0.$$

SOLUCIÓN. En este caso $M(t, y) = 3y + e^t$ y $N(t, y) = 3t + \cos y$. Esta ecuación es exacta ya que $\partial M/\partial y = 3$ y $\partial N/\partial t = 3$. Por lo tanto, existe una función $\phi(t, y)$ tal que

$$\text{(i) } 3y+e^t=\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad \text{y} \quad \text{(ii) } 3t+\cos y=\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

A continuación se calcula $\phi(t, y)$ con cada uno de los tres métodos descritos anteriormente.

Primer Método: De (i) se sigue que $\phi(t, y) = e^t + 3ty + h(y)$. Derivando esta ecuación con respecto a y, y usando (ii) se obtiene que

$$h'(y)+3t=3t+\cos y.$$

Así pues, $h(y) = \operatorname{sen} y$ y también $\phi(t, y) = e^t + 3ty + \operatorname{sen} y$. (Estrictamente hablando, $h(y) = \operatorname{sen} y$ + constante. Sin embargo, esta constante de integración se incorporó ya a la solución al escribir $\phi(t, y) = c$.) Es necesario dejar la solución general de la ecuación diferencial en la forma $e^t + 3ty + \operatorname{sen} y = c$, ya que en esta ecuación no se puede despejar y explícitamente como una función de t.

Segundo Método: De (ii) se sigue que $\phi(t, y) = 3ty + \operatorname{sen} y + k(t)$. Derivando esta expresión con respecto a t y usando (i) se obtiene que

$$3y+k'(t)=3y+e^t.$$

Así pues, $k(t) = e^t$ y $\phi(t, y) = 3ty + \operatorname{sen} y + e^t$.

Tercer Método: De (i) y (ii) se sigue que

$$\phi(t,y)=e^t+3ty+h(y) \quad \text{y} \quad \phi(t,y)=3ty+\operatorname{sen} y+k(t).$$

Comparando estas dos expresiones para la *misma* función $\phi(t, y)$ es obvio que $h(y) = \operatorname{sen} y$ y $k(t) = e^t$. Por lo tanto,

$$\phi(t,y)=e^t+3ty+\operatorname{sen} y.$$

EJEMPLO 4 Obtener la solución del siguiente problema de valor inicial

$$3t^2y+8ty^2+(t^3+8t^2y+12y^2)\frac{dy}{dt}=0, \qquad y(2)=1.$$

SOLUCIÓN. En este caso $M(t, y) = 3t^2y + 8ty^2$ y $N(t, y) = t^3 + 8t^2y + 12y^2$. Esta ecuación es exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3t^2+16ty \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial t}=3t^2+16ty.$$

Por lo que, existe una función $\phi(t, y)$, tal que

$$\text{(i)}\ 3t^2y + 8ty^2 = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{y} \quad \text{(ii)}\ t^3 + 8t^2y + 12y^2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Una vez más, se encontrará $\phi(t, y)$ con cada uno de los tres métodos siguientes:

Primer Método: De (i) se sigue que $\phi(t, y) = t^3y + 4t^2y^2 + h(y)$. Derivando esta ecuación con respecto a y, y usando (ii) resulta que

$$t^3 + 8t^2y + h'(y) = t^3 + 8t^2y + 12y^2.$$

Por lo tanto, $h(y) = 4y^3$, y la solución general de la ecuación diferencial es $\phi(t, y) = t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3 = c$. Tomando $t = 2$ y $y = 1$ en esta ecuación se ve que $c = 28$. Así pues, la solución del problema de valores iniciales está definida implícitamente por la ecuación $t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3 = 28$.

Segundo Método: De (ii) se sigue que $\phi(t, y) = t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3 + k(t)$. Derivando esta expresión con respecto a t y usando (i) se obtiene que

$$3t^2y + 8ty^2 + k'(t) = 3t^2y + 8ty^2.$$

En consecuencia, $k(t) = 0$ y $\phi(t, y) = t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3$.

Tercer Método: De (i) e (ii) se obtiene que

$$\phi(t,y) = t^3y + 4t^2y^2 + h(y) \quad \text{y} \quad \phi(t,y) = t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3 + k(t).$$

Al comparar estas dos expresiones con respecto a la misma función $\phi(t, y)$ se ve que $h(y) = 4y^3$ y $k(t) = 0$. Por lo tanto, $\phi(t, y) = t^3y + 4t^2y^2 + 4y^3$.

Como se ve en los Ejemplos 3 y 4, en la mayoría de los casos el método de aplicación más sencillo es el tercero. Sin embargo, si es más fácil integrar N con respecto a y que integrar M con respecto a t se preferirá el segundo método, y viceversa.

EJEMPLO 5 Encontrar la solución del siguiente problema de valor inicial

$$4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t + (t^4e^{t+y} + 2y)\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUCIÓN. Esta ecuación es exacta pues

$$\frac{\partial}{\partial y}(4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t) = (t^4 + 4t^3)e^{t+y} = \frac{\partial}{\partial t}(t^4e^{t+y} + 2y).$$

Por lo tanto, existe una función $\phi(t, y)$ tal que

$$\text{(i)}\ 4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

y

$$\text{(ii)}\ t^4e^{t+y} + 2y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Dado que es más sencillo integrar $t^4e^{t+y} + 2y$ con respecto a y que integrar $4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t$ con respecto a t, se elige el segundo método. De (ii) se obtiene $\phi(t, y) = t^4e^{t+y} + y^2 + k(t)$. Derivando esta expresión con respecto a t, y usando (i) resulta

$$(t^4+4t^3)e^{t+y}+k'(t)=4t^3e^{t+y}+t^4e^{t+y}+2t.$$

Así pues, $k(t) = t^2$, y la solución general de la ecuación diferencial es $\phi(t, y) = t^4e^{t+y} + y^2 + t^2 = c$. Tomando $t = 0$ y $y = 1$, esta ecuación implica que $c = 1$. Así pues, la solución del problema de valores iniciales está definida implícitamente por la ecuación $t^4e^{t+y} + t^2 + y^2 = 1$.

Supóngase ahora que se tiene una ecuación diferencial que no es exacta

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0 \tag{7}$$

¿Se puede transformar la ecuación en exacta? Dicho con más precisión: ¿Se puede encontrar una función $\mu(t, y)$, tal que la siguiente ecuación

$$\mu(t,y)M(t,y)+\mu(t,y)N(t,y)\frac{dy}{dt}=0 \tag{8}$$

equivalente a (7) sea exacta?

Esta pregunta es, en principio, fácil de contestar. La condición para que (i) sea exacta es que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t,y)M(t,y))=\frac{\partial}{\partial t}(\mu(t,y)N(t,y))$$

o bien

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mu\frac{\partial N}{\partial t}. \tag{9}$$

(Para simplificar la notación se ha omitido aquí la dependencia de μ, M y N con respecto a t y a y en (9). Así pues, la ecuación (8) es exacta si y sólo si $\mu(t, y)$ satisface la ecuación (9).

DEFINICIÓN. La función $\mu(t, y)$ que satiface la ecuación (9) se llama *factor integrante* de la ecuación diferencial (7).

La razón de ser de esta definición es, por supuesto, que si μ satisface (9), entonces es posible escribir (8) en la forma $(d/dt)\phi(t, y) = 0$ y tal ecuación puede integrarse directamente para obtener la solución $\phi(t, y) = c$. Por desgracia hay sólo dos casos en los que es posible encontrar una solución explícita de (9). Se trata de aquéllos en los que la ecuación (7) tiene un factor integrante que es únicamente función de t, o bien sólo función de y. Obsérvese que si μ es función únicamente de t, entonces la ecuación (9) se reduce a

$$N\frac{d\mu}{dt}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right) \quad \text{o bien} \quad \frac{d\mu}{dt}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)}{N}\mu.$$

Pero esta ecuación no tiene sentido a menos que la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

sea una función solamente de t, es decir si

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = R(t).$$

Si tal es el caso, entonces $\mu(t) = \exp\left(\int R(t)dt\right)$ es un factor integrante para la ecuación diferencial (7).

OBSERVACIÓN. Es importante notar que la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

es casi siempre una función tanto de t como de y. Sólo para parejas muy especiales de funciones $M(t, y)$ y $N(t, y)$ es dicha expresión una función únicamente de t. Un caso análogo ocurre si μ es una función sólo de y (Ejercicio 17). Ésta es la razón por la que no es posible resolver muchas ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 6 Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)\frac{dy}{dt} = 0.$$

SOLUCIÓN. En este caso $M(t, y) = (y^2/2) + 2ye^t$ y $N(t, y) = y + e^t$. Esta ecuación no es exacta, ya que $\partial M/\partial y = y + 2e^t$ y $\partial N/\partial t = e^t$. Sin embargo, se tiene que

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) = \frac{y + e^t}{y + e^t} = 1.$$

Por lo tanto, la ecuación tiene un factor integrante de la forma $\mu(t) = \exp\left(\int 1\,dt\right) = e^t$. Esto significa, por supuesto, que la ecuación diferencial equivalente

$$\frac{y^2}{2}e^t + 2ye^{2t} + (ye^t + e^{2t})\frac{dy}{dt} = 0$$

es exacta. Por lo tanto, existe una función $\phi(t, y)$ tal que

$$\text{(i)}\quad \frac{y^2}{2}e^t + 2ye^{2t} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

y

$$\text{(ii)}\ ye^t + e^{2t} = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

De las ecuaciones (i) y (ii) se obtiene

$$\phi(t,y) = \frac{y^2}{2}e^t + ye^{2t} + h(y)$$

y

$$\phi(t,y) = \frac{y^2}{2}e^t + ye^{2t} + k(t).$$

De modo que, $h(y) = 0$ y $k(t) = 0$, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\phi(t,y) = \frac{y^2}{2}e^t + ye^{2t} = c.$$

Despejando y como función de t en esta ecuación resulta

$$y(t) = -e^t \pm \left[e^{2t} + 2ce^{-t}\right]^{1/2}.$$

EJEMPLO 7 Aplicar los métodos de esta sección para obtener la solución general de la ecuación lineal $(dy/dt) + a(t)y = b(t)$.

SOLUCIÓN. Primero se escribe la ecuación en la forma $M(t, y) + N(t, y)(dy/dt) = 0$, con $M(t, y) = a(t)y - b(t)$ y $N(t, y) = 1$. Esta ecuación no es exacta, ya que $\partial M/\partial y = a(t)$ y $\partial N/\partial t = 0$. Sin embargo, se tiene $((\partial M/\partial y) - (\partial N/\partial t))/N = a(t)$. Por tanto $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$ es un factor integrante para la ecuación lineal de primer orden. De modo que existe una función $\phi(t, y)$ tal que

$$\text{(i)}\ \mu(t)\left[a(t)y - b(t)\right] = \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

y

$$\text{(ii)}\ \mu(t) = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Ahora bien, obsérvese de (ii) que $\phi(t, y) = \mu(t)y + k(t)$. Al derivar esta ecuación con respecto a t, y usar (i) se ve que

$$\mu'(t)y + k'(t) = \mu(t)a(t)y - \mu(t)b(t).$$

Pero $\mu'(t) = a(t)\mu(t)$. Por lo tanto, $k'(t) = -\mu(t)b(t)$ y

$$\phi(t,y) = \mu(t)y - \int \mu(t)b(t)\,dt.$$

De aquí se sigue que la solución general de la ecuación lineal de primer orden es

$$\mu(t)y - \int\mu(t)b(t)\,dt = c,$$

y éste es el resultado que se obtuvo en la Sección 1.2.

EJERCICIOS

1. Use el teorema de igualdad de las derivadas parciales mixtas para demostrar que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$ si la ecuación $M(t, y) + N(t, y)(dy/dt) = 0$ es exacta.

2. Demuestre que la expresión $M(t, y) - \int(\partial N(t, y)/\partial t)dy$ es una función solamente de t si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$.

En cada uno de los Problemas 3 a 6 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

3. $2t\operatorname{sen} y + y^3e^t + (t^2\cos y + 3y^2e^t)\dfrac{dy}{dt} = 0$

4. $1 + (1 + ty)e^{ty} + (1 + t^2e^{ty})\dfrac{dy}{dt} = 0$

5. $y\sec^2 t + \sec t\tan t + (2y + \tan t)\dfrac{dy}{dt} = 0$

6. $\dfrac{y^2}{2} - 2ye^t + (y - e^t)\dfrac{dy}{dt} = 0$

En cada uno de los Problemas 7 a 11 resuelva el problema de valor inicial dado.

7. $2ty^3 + 3t^2y^2\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(1) = 1$

8. $2t\cos y + 3t^2y + (t^3 - t^2\operatorname{sen} y - y)\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 2$

9. $3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 1$

10. $y(\cos 2t)e^{ty} - 2(\operatorname{sen} 2t)e^{ty} + 2t + (t(\cos 2t)e^{ty} - 3)\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 3$

11. $3ty + y^2 + (t^2 + ty)\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(2) = 1$

En cada uno de los Problemas 12 a 14 determine el valor de la constante a para que la ecuación sea exacta, y resuelva la ecuación resultante.

12. $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}\dfrac{dy}{dt} = 0$

13. $\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{(at + 1)}{y^3}\dfrac{dy}{dt} = 0$

14. $e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2yt^3 + e^{at+y})\dfrac{dy}{dt} = 0$

15. Demuestre que toda ecuación separable de la forma $M(t) + N(y)dy/dt = 0$ es exacta.

16. Halle todas las funciones $f(t)$ tales que la siguiente ecuación diferencial

$$y^2\operatorname{sen} t + yf(t)(dy/dt) = 0$$

sea exacta. Resuelva la ecuación diferencial para determinar dichas $f(t)$.

17. Demuestre que si $((\partial N/\partial t) - (\partial M/\partial y))/M = Q(y)$, entonces la ecuación $M(t, y) + N(t, y)dy/dt = 0$ tiene un factor integrante $\mu(y) = \exp\left(\int Q(y)dy\right)$.

18. Suponga que la ecuación diferencial $f(t)(dy/dt) + t^2 + y = 0$ tiene un factor integrante $\mu(t) = t$. Encuentre todas las posibles funciones $f(t)$.

19. Considere que la ecuación diferencial $e^t \sec y - \tan y + (dy/dt) = 0$ tiene un factor integrante de la forma $e^{-at}\cos y$ para a constante. Determine a y resuelva la ecuación diferencial.

20. La ecuación diferencial de Bernoulli es $(dy/dt) + a(t)y = b(t)y^n$. Multiplicándola por $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$ se puede escribir en la forma $d/dt(\mu(t)y) = b(t)\mu(t)y^n$. Obtenga la solución general de esta ecuación hallando un factor integrante apropiado. *Sugerencia:* Divida ambos miembros de la ecuación entre una función apropiada de y.

1.10 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD; ITERACIONES DE PICARD

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

donde f es una función dada de t y de y. Como se indicó en las observaciones de la Sección 1.9, es posible que no pueda resolverse (1) explícitamente. Esto lleva a plantearse las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo es posible saber si el problema de valores iniciales (1) tiene realmente solución, si no se la puede exhibir?

2. ¿Cómo puede saberse si (1) tiene una solución única $y(t)$? Es posible que existan una, dos, tres o incluso un número infinito de soluciones.

3. ¿Por qué molestarse en plantear las preguntas 1 y 2? Después de todo, ¿qué sentido tiene determinar si (1) tiene una solución única si no es posible exhibirla explícitamente?

La respuesta a esta última pregunta consiste en la observación de que en las aplicaciones no es necesario conocer la solución de (1) con más de un número finito de cifras decimales. En la mayoría de los casos es más que suficiente encontrar $y(t)$ con una precisión de cuatro cifras. Como se verá en las Secciones 1.13 a 1.17, esto puede hacerse fácilmente con la ayuda de una computadora digital. De hecho, se calculará $y(t)$ con una precisión de ocho e incluso dieciséis cifras decimales. Así pues, el hecho de saber que (1) posee una solución única es simultáneamente una "autorización" para buscarla.

Para resolver la primera pregunta es necesario establecer la existencia de una función $y(t)$ cuyo valor en $t = t_0$ es y_0, y cuya derivada en cualquier tiempo t es igual

a $f(t, y(t))$. Para lograr esto se necesita un teorema que nos permita garantizar la existencia de una función con ciertas propiedades sin necesidad de tener que expresarla explícitamente. Buscando a través del Cálculo se ve que tal situación se presenta una vez, a saber, en el contexto de la teoría de límites. Como se muestra en el Apéndice B, es posible mostrar que una sucesión de funciones $y_n(t)$ tiene un límite $y(t)$, sin necesidad de expresar $y(t)$. Por ejemplo, puede probarse que la sucesión de funciones

$$y_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\pi t}{1^2} + \frac{\operatorname{sen}2\pi t}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}n\pi t}{n^2}$$

tiene un límite $y(t)$ aunque no se pueda expresar explícitamente. Esto sugiere el siguiente algoritmo para probar la existencia de una solución $y(t)$ de (1).

(a) Construir una sucesión de funciones $y_n(t)$ que se hagan cada vez más pequeñas para resolver el problema 1.
(b) Mostrar que la sucesión de funciones $y_n(t)$ tiene un límite $y(t)$ en un intervalo adecuado $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.
(c) Probar que $y(t)$ es solución de (1) en dicho intervalo.

A continuación se indica cómo formular este algoritmo

(a) *Obtención de la sucesión aproximatoria* $y_n(t)$

El problema de encontrar una sucesión de funciones que se hace cada vez más pequeña para resolver una cierta ecuación se presenta muy a menudo en matemáticas. La experiencia ha demostrado que con frecuencia es mucho más fácil resolver el problema si la ecuación puede escribirse en la forma especial

$$y(t) = L(t, y(t)), \tag{2}$$

donde L puede depender explícitamente de y y de integrales de funciones de y. Por ejemplo, puede desearse hallar una función $y(t)$ que satisfaga

$$y(t) = 1 + \operatorname{sen}[t + y(t)],$$

o bien

$$y(t) = 1 + y^2(t) + \int_0^t y^3(s)\,ds.$$

En estos dos casos, $L(t, y(t))$ es una forma abreviada de

$$1 + \operatorname{sen}[t + y(t)]$$

y

$$1 + y^2(t) + \int_0^t y^3(s)\,ds,$$

respectivamente.

La clave para entender qué tiene de especial la ecuación (2) es ver $L(t, y(t))$ como una "máquina" que recibe una función y devuelve otra. Por ejemplo, tómese

$$L(t, y(t)) = 1 + y^2(t) + \int_0^t y^3(s)\,ds.$$

Si la función $y(t) = t$ entra a la máquina, es decir, si se calcula $1 + t^2 + \int_0^t s^3 ds$, entonces la máquina devuelve la función $1 + t^2 + t^4/4$. Si se introduce la función $y(t) = \cos t$ en la máquina, entonces devuelve la función

$$1+\cos^2 t+\int_0^t \cos^3 s\, ds = 1+\cos^2 t+\operatorname{sen} t-\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}.$$

De acuerdo con este enfoque puede caracterizarse a todas las soluciones $y(t)$ de (2) como aquellas funciones que la máquina L no cambia. En otras palabras, si introducimos una función $y(t)$ en la máquina y ésta devuelve la misma función, entonces $y(t)$ es una solución de (2).

El problema de valor inicial (1) puede escribirse en la forma especial (2), integrando ambos lados de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ con respecto a t. Concretamente, si $y(t)$ satisface (1), entonces se tiene

$$\int_{t_0}^t \frac{dy(s)}{ds}\, ds = \int_{t_0}^t f(s,y(s))\, ds$$

de tal modo que

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))\, ds. \tag{3}$$

Recíprocamente, si $y(t)$ es continua y satisface (3), entonces $dy/dt = f(t, y(t))$. Más aún, $y(t_0)$ es obviamente y_0. Por lo tanto, $y(t)$ es una solución de (1) si y sólo si es una solución continua de (3).

La ecuación (3) es una ecuación integral, y está en la forma especial (2) si se toma

$$L(t,y(t))=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))\, ds.$$

Esto sugiere el siguiente método para obtener una sucesión de "soluciones aproximadas" $y_n(t)$ de (3). Se inicia proponiendo una solución tentativa $y_0(t)$ de (3). La elección más sencilla es $y_0(t) = y_0$. Para comprobar si $y_0(t)$ es una solución de (3) se calcula

$$y_1(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y_0(s))\, ds.$$

Si $y_1(t) = y_0$, entonces $y(t) = y_0$ es de hecho una solución de (3). Si no, se utiliza $y_1(t)$ como siguiente opción. Para comprobar si $y_1(t)$ es una solución de (3) se calcula

$$y_2(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y_1(s))\, ds,$$

y así sucesivamente. De esta manera se define una sucesión de funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., donde

$$y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y_n(s))\, ds. \tag{4}$$

Las funciones $y_n(t)$ se llaman *aproximaciones sucesivas* o *iteraciones de Picard*, en

honor al matemático francés que las descubrió. Sorprendentemente, las iteraciones (o iteradas) de Picard siempre convergen, en un intervalo adecuado, a una solución $y(t)$ de (3).

EJEMPLO 1 Calcular las iteraciones de Picard para el siguiente problema de valor inicial y mostrar que convergen a la solución $y(t) = e^t$

$$y' = y, \qquad y(0) = 1,$$

SOLUCIÓN. La ecuación integral correspondiente al problema de valor inicial es

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds.$$

Por lo tanto, $y_0(t) = 1$ y

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$$

y en general

$$y_n(t) = 1 + \int_0^t y_{n-1}(s)\,ds = 1 + \int_0^t \left[1 + s + \ldots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\right] ds$$

$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}.$$

Dado que $e^t = 1 + t + t^2/2! + \cdots$, se ve que las iteraciones de Picard $y_n(t)$ convergen a la solución $y(t)$ del problema de valor inicial.

EJEMPLO 2 Calcular las iteraciones de Picard $y_1(t)$, $y_2(t)$ para el problema de valor inicial $y' = 1 + y^3$, $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN. La ecuación integral correspondiente a este problema de valores iniciales es

$$y(t) = 1 + \int_1^t \left[1 + y^3(s)\right] ds.$$

Por lo tanto, $y_0(t) = 1$

$$y_1(t) = 1 + \int_1^t (1+1)\,ds = 1 + 2(t-1)$$

y

$$y_2(t) = 1 + \int_1^t \left\{1 + \left[1 + 2(s-1)\right]^3\right\} ds$$

$$= 1 + 2(t-1) + 3(t-1)^2 + 4(t-1)^3 + 2(t-1)^4.$$

Nótese que calcular $y_3(t)$ resulta ya muy difícil.

(b) *Convergencia de las iteraciones de Picard*

Como se mencionó en la Sección 1.4, las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales pueden no existir para todo valor del tiempo t. Por lo tanto, no es posible esperar la convergencia de las iteraciones de Picard $y_n(t)$ de (3) para todo t. Para darse una idea de dónde convergen las iteraciones de Picard, puede tratarse de encontrar un intervalo en el cual las iteraciones $y_n(t)$ están uniformemente acotadas (es decir, $|y_n(t)| \leq K$ para alguna constante K). De manera equivalente puede buscarse un rectángulo R que contenga las gráficas de todas las iteraciones de Picard $y_n(t)$. El Lema 1 muestra cómo encontrar un rectángulo así.

LEMA 1. *Elíjanse dos números positivos cualesquiera a y b y considérese el rectángulo $R: t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|y - y_0| \leq b$.*

Calcúlese

$$M = \max_{(t,y) \text{ en } R} |f(t,y)|, \text{ y hágase } \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Entonces

$$|y_n(t) - y_0| \leqslant M(t - t_0) \tag{5}$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

El Lema 1 afirma que la gráfica de $y_n(t)$ está contenida entre las rectas $y = y_0 + M(t - t_0)$ y $y = y_0 - M(t - t_0)$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Estas rectas salen del rectángulo R para $t = t_0 + a$ si $a \leq b/M$ y para $t = t_0 + b/M$ si $b/M < a$ (Figs. 1a y 1b). En estos casos, por lo tanto, la gráfica de $y_n(t)$ está contenida en R para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

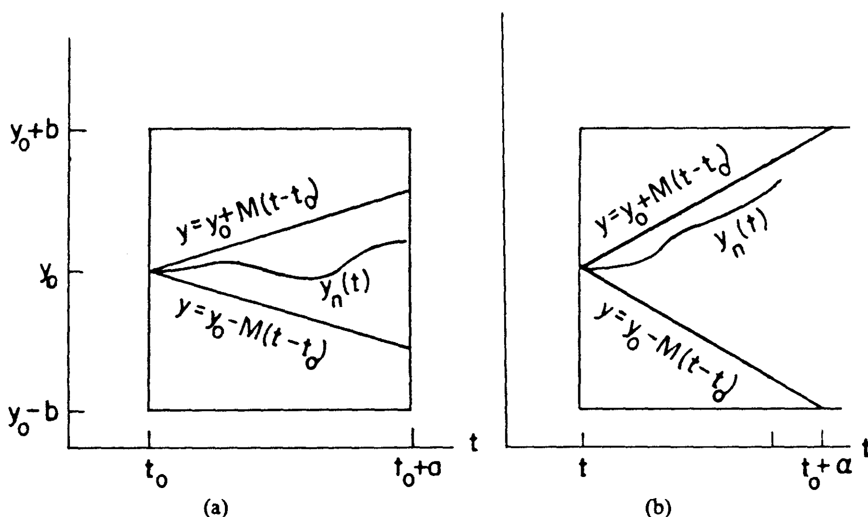


FIGURA 1. (a) $\alpha = a$; (b) $\alpha = b/M$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. La demostración de la relación (5) se hará por inducción para n. Obsérvese primero que (5) obviamente se cumple para $n = 0$, ya que

$y_0(t) = y_0$. Ahora es necesario que (5) se cumpla para $n = j + 1$ si se cumple para $n = j$. Esto se deduce de inmediato, ya que si $|y_j(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$ entonces

$$\begin{aligned}|y_{j+1}(t)-y_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_j(s))\,ds\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,y_j(s))|\,ds \leqslant M(t-t_0)\end{aligned}$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Por lo tanto, por inducción, (5) se cumple para toda n. □

Ahora es posible demostrar que las iteraciones de Picard $y_n(t)$ de (3) convergen para toda t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ si $\partial f/\partial y$ existe y es continua. El primer paso consiste en transformar el problema de indicar que la sucesión de funciones $y_n(t)$ converge a un problema más sencillo que consiste en probar que converge una cierta serie infinita. Esto se logra escribiendo $y_n(t)$ de la siguiente manera

$$y_n(t) = y_0(t) + [y_1(t) - y_0(t)] + \ldots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)].$$

Claramente la sucesión $y_n(t)$ converge si y sólo si la siguiente serie converge

$$[y_1(t)-y_0(t)] + [y_2(t)-y_1(t)] + \ldots + [y_n(t)-y_{n-1}(t)] + \ldots \tag{6}$$

Para probar que la serie infinita (6) converge basta con demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| < \infty. \tag{7}$$

Esto se logra de la siguiente manera. Obsérvese que

$$\begin{aligned}|y_n(t)-y_{n-1}(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} [f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))]\,ds\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))|\,ds \\ &= \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial f(s,\xi(s))}{\partial y}\right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|\,ds,\end{aligned}$$

donde $\xi(s)$ se encuentra entre $y_{n-1}(s)$ y $y_{n-2}(s)$. (Recuérdese que $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$, donde ξ es algún número entre x_1 y x_2). Del Lema 1 se deduce inmediatamente que todos los puntos $(s, \xi(s))$ se encuentran en el rectángulo R para $s < t_0 + \alpha$. Por lo tanto,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leqslant L\int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|\,ds, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha, \tag{8}$$

donde

$$L = \max_{(t,y) \text{ en } R} \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|. \tag{9}$$

La ecuación (9) define a la constante L. Tomando $n = 2$ en (8) se obtiene

$$|y_2(t)-y_1(t)| \leq L\int_{t_0}^{t}|y_1(s)-y_0|\,ds \leq L\int_{t_0}^{t}M(s-t_0)\,ds$$
$$= \frac{LM(t-t_0)^2}{2}.$$

Esto implica a su vez que

$$|y_3(t)-y_2(t)| \leq L\int_{t_0}^{t}|y_2(s)-y_1(s)|\,ds \leq ML^2\int_{t_0}^{t}\frac{(s-t_0)^2}{2}\,ds$$
$$= \frac{ML^2(t-t_0)^3}{3!}.$$

Procediendo de manera inductiva se ve que

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0+\alpha. \tag{10}$$

Por lo tanto, para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ se tiene

$$|y_1(t)-y_0(t)|+|y_2(t)-y_1(t)|+\ldots$$
$$\leq M(t-t_0)+\frac{ML(t-t_0)^2}{2!}+\frac{ML^2(t-t_0)^3}{3!}+\ldots$$
$$\leq M\alpha+\frac{ML\alpha^2}{2!}+\frac{ML^2\alpha^3}{3!}+\ldots$$
$$=\frac{M}{L}\left[\alpha L+\frac{(\alpha L)^2}{2!}+\frac{(\alpha L)^3}{3!}+\ldots\right]$$
$$=\frac{M}{L}(e^{\alpha L}-1).$$

Esta cantidad es obviamente menor que infinito. Por lo tanto, las iteraciones de Picard $y_n(t)$ convergen para t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. (Un argumento similar muestra que $y_n(t)$ converge para toda t en el intervalo $t_0 - \beta \leq t \leq t_0$, donde $B =$ mín $(a, b/N)$ y N es el valor máximo de $|f(t, y)|$ para (t, y) en el rectángulo $t_0 - a \leq t \leq t_0$, $|y - y_0 \leq b|$). Se denotará con $y(t)$ al límite de $y_n(t)$. □

(c) *Demostración de que $y(t)$ satisface el problema de valor inicial* (1)

Se pondrá de relieve que $y(t)$ satisface la ecuación integral

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds \tag{11}$$

y que $y(t)$ es continua. Para esto recuérdese que las iteraciones de Picard $y_n(t)$ se definen en forma recurrente por medio de la ecuación

$$y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y_n(s))\,ds. \tag{12}$$

Tomando límites en ambos lados de (12) se obtiene

$$y(t)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds. \tag{13}$$

Para mostrar que el lado derecho de (13) es igual a

$$y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds,$$

(esto es, para justificar el paso del límite a través del signo de integral) hay que demostrar que

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds-\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds\right|$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito. Esto se logra de la siguiente manera. Obsérvese primero que la gráfica de $y(t)$ se encuentra en el rectángulo R para $t \leq t_0+\alpha$, ya que es el límite de funciones $y_n(t)$ cuyas gráficas se encuentran en R. Por lo tanto,

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds-\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds\right|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t}|f(s,y(s))-f(s,y_n(s))|\,ds \leqslant L\int_{t_0}^{t}|y(s)-y_n(s)|\,ds$$

donde L está definido en la ecuación (9). Ahora obsérvese que

$$y(s)-y_n(s)=\sum_{j=n+1}^{\infty}[y_j(s)-y_{j-1}(s)]$$

pues

$$y(s)=y_0+\sum_{j=1}^{\infty}[y_j(s)-y_{j-1}(s)]$$

y

$$y_n(s)=y_0+\sum_{j=1}^{n}[y_j(s)-y_{j-1}(s)].$$

Por lo tanto, se tiene que (10)

$$|y(s)-y_n(s)|\leqslant M\sum_{j=n+1}^{\infty}L^{j-1}\frac{(s-t_0)^j}{j!}$$

$$\leqslant M\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{L^{j-1}\alpha^j}{j!}=\frac{M}{L}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha L)^j}{j!}, \tag{14}$$

y

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds-\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds\right|\leqslant M\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha L)^j}{j!}\int_{t_0}^{t}ds$$

$$\leqslant M\alpha\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha L)^j}{j!}.$$

Esta sumatoria tiende a cero cuando n tiende a infinito, ya que es el residuo del desarrollo de la serie de Taylor convergente de $e^{\alpha L}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))\,ds=\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds,$$

e $y(t)$ satisface (11).

Para poner de manifiesto que $y(t)$ es continua hay que mostrar que para toda $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que

$$|y(t+h)-y(t)|<\varepsilon \qquad \text{si} \qquad |h| < \delta$$

Ahora bien, no es posible comparar $y(t + h)$ con $y(t)$ directamente, ya que no se conoce $y(t)$ de modo explícito. Para salvar esta dificultad se elige un entero N lo bastante grande y se observa que

$$y(t+h)-y(t)=\left[y(t+h)-y_N(t+h)\right] + \left[y_N(t+h)-y_N(t)\right]+\left[y_N(t)-y(t)\right].$$

Con más detalle se elige N suficientemente grande como para que

$$\frac{M}{L}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(\alpha L)^j}{j!}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces se sigue de (14) que

$$|y(t+h)-y_N(t+h)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad |y_N(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

para $t < t_0 + \alpha$ y h suficientemente pequeña (tal que $t + h < t_0 + \alpha$). Luego obsérvese que $y_N(t)$ es continua, pues se obtiene después de N integraciones sucesivas de funciones continuas. Por lo tanto, puede elegirse $\delta > 0$ lo bastante pequeña de modo que

$$|y_N(t+h)-y_N(t)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ para } |h|<\delta.$$

Por consiguiente,

$$|y(t+h)-y(t)|\leq|y(t+h)-y_N(t+h)|+|y_N(t+h)-y_N(t)| +|y_N(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

para $|h| < \delta$. Por lo tanto, $y(t)$ es una solución continua de la ecuación integral (11) y esto completa la demostración de que $y(t)$ satisface (1). □

Resumiendo, lo que se ha probado es el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Sean f y $\partial f/\partial y$ continuas en el rectángulo R: $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, $|y - y_0| \leq b$. Calcúlese*

$$M=\max_{(t,y)\text{ en }R}|f(t,y)|, \quad \text{y hágase} \quad \alpha=\min\left(a,\frac{b}{M}\right).$$

Entonces, el problema de valores iniciales $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ tiene al menos una solución $y(t)$ en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Un resultado similar se cumple para $t < t_0$.

OBSERVACIÓN. El número α en el Teorema 2 depende directamente de la elección de a y b. Una elección distinta de a y b lleva a un valor diferente de α. Más aún, α no necesariamente crece si a y b lo hacen, ya que un incremento en a o en b produce también un incremento en M.

Por último, es posible avocarse al problema de la unicidad de las soluciones de (1). Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=(\text{sen}2t)y^{1/3}, \qquad y(0)=0. \tag{15}$$

Una solución de (15) es $y(t) = 0$. Pueden obtenerse soluciones adicionales si se hace caso omiso del hecho de que $y(0) = 0$, y se escribe la ecuación diferencial en la forma siguiente

$$\frac{1}{y^{1/3}}\frac{dy}{dt}=\text{sen}2t,$$

o bien

$$\frac{d}{dt}\frac{3y^{2/3}}{2}=\text{sen}2t.$$

Entonces,

$$\frac{3y^{2/3}}{2}=\frac{1-\cos 2t}{2}=\text{sen}^2 t$$

y $y = \pm\sqrt{8/27}\,\text{sen}^3 t$ son dos soluciones adicionales de (15).

Ahora bien, los problemas de valor inicial que poseen más de una solución son claramente indeseables en las aplicaciones. Por lo tanto, es importante encontrar cuál es exactamente la razón por la cual el problema de valor inicial (15) tiene más de una solución. Si se observa con cuidado el segundo miembro de la ecuación diferencial se ve que no tiene derivada parcial con respecto a y en $y = 0$. De hecho, este es precisamente el problema, como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 2′ *Sean f y $\partial f/\partial y$ continuas en el rectángulo $R: t_0 \le t \le t_0 + \alpha$, $|y - y_0| \le b$. Calcúlese*

$$M=\max_{(t,y)\text{ en }R}|f(t,y)|, \text{ y hágase } \alpha=\text{mín}\left(a,\frac{b}{M}\right).$$

Entonces, el problema de valor inicial

$$y'=f(t,y), \qquad y(t_0)=y_0 \tag{16}$$

tiene una única solución en el intervalo $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. En otras palabras, si $y(t)$ y z_t son dos soluciones de (16), entonces $y(t)$ debe ser igual a $z(t)$ para $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$.

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 2 garantiza la existencia de al menos una solución $y(t)$ de (16). Supóngase que $z(t)$ es una segunda solución de (16). Entonces,

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds \quad \text{y} \quad z(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,z(s))\,ds.$$

Restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$|y(t)-z(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s,y(s)) - f(s,z(s)) \right] ds \right|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,y(s)) - f(s,z(s))| \, ds$$

$$\leqslant L \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds$$

donde L es el máximo de los valores de $|\partial f/\partial y|$ para (t, y) en R. El Lema 2, que se enuncia a continuación, indica que esta desigualdad implica que $y(t) = z(t)$. Por lo tanto, el problema de valor inicial (16) tiene una solución única $y(t)$. □

LEMA 2. Sea $w(t)$ una función no negativa, con

$$w(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} w(s) \, ds. \tag{17}$$

Entonces, $w(t)$ es idénticamente igual a cero.

DEMOSTRACIÓN ERRÓNEA. Derivando ambos lados de (17) se obtiene

$$\frac{dw}{dt} \leqslant Lw(t), \quad \text{o bien} \quad \frac{dw}{dt} - Lw(t) \leqslant 0.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por el factor integrante $e^{-L(t-t_0)}$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} e^{-L(t-t_0)} w(t) \leqslant 0, \quad \text{de modo que} \quad e^{-L(t-t_0)} w(t) \leqslant w(t_0)$$

para $t \geq t_0$. Pero $w(t_0)$ debe ser nula si $w(t)$ es no negativa y satisface (17). Por lo tanto, $e^{-L(t-t_0)} w(t) \leq 0$ y esto implica que $w(t)$ es idénticamente igual a cero.

El error en esta demostración consiste, por supuesto, en que al derivar ambos miembros de una desigualdad no es posible esperar que la desigualdad se conserve. Por ejemplo la función $f_1(t) = 2t - 2$ es menor que $f_2(t) = t$ en el intervalo $[0, 1]$ y, sin embargo, $f_1'(t)$ es mayor que $f_2'(t)$ en ese intervalo. Esta demostración puede corregirse con ayuda del siguiente artificio. Tómese

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} w(s) \, ds.$$

Entonces

$$\frac{dU}{dt} = w(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} w(s) \, ds = LU(t).$$

Por lo tanto, $e^{-L(t-t_0)} U(t) \leq U(t_0) = 0$ para $t \geq t_0$, y por ello $U(t) = 0$. Esto a su vez implica que $w(t) = 0$, pues

$$0 \leqslant w(t) \leqslant L \int_{t_0}^{t} w(s) \, ds = LU(t) = 0.$$ □

EJEMPLO 3 Demostrar que la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + e^{-y^2}, \qquad y(0) = 0$$

existe para $0 \leq t \leq ½$, y que en este intervalo se cumple $|y(t)| \leq 1$.

SOLUCIÓN. Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq ½$, $|y| \leq 1$. Calculando

$$M = \max_{(t,y) \text{ en } R} t^2 + e^{-y^2} = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{4},$$

se ve que $y(t)$ existe para

$$0 \leqslant t \leqslant \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5/4}\right) = \frac{1}{2},$$

y que en este intervalo se cumple $|y(t)| \leq 1$.

EJEMPLO 4 Demostrar que la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t^2} + y^3, \qquad y(0) = 1$$

existe para $0 \leq t \leq \frac{1}{9}$, y que en este intervalo se tiene $0 \leq y \leq 2$.

SOLUCIÓN. Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq \frac{1}{9}$, $0 \leq y \leq 2$. Al calcular

$$M = \max_{(t,y) \text{ en } R} e^{-t^2} + y^3 = 1 + 2^3 = 9,$$

se ve que $y(t)$ existe para

$$0 \leqslant t \leqslant \text{mín}\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{9}\right)$$

y que en este intervalo se cumple $0 \leq y \leq 2$.

EJEMPLO 5 ¿Cuál es el máximo intervalo para el que el Teorema 2 garantiza la existencia de la solución del problema de valor inicial $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$?

SOLUCIÓN. Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq a$, $|y| \leq b$. Calculando

$$M = \max_{(t,y) \text{ en } R} 1 + y^2 = 1 + b^2,$$

se ve que $y(t)$ existe para

$$0 \leqslant t \leqslant \alpha = \text{mín}\left(a, \frac{b}{1+b^2}\right).$$

Claramente el máximo valor de α que puede encontrarse es el valor para el cual la función $b/(1 + b^2)$ alcanza su máximo. Dicho valor máximo es ½. Por lo tanto, el Teorema 2 asegura que $y(t)$ existe para $0 \leq t \leq ½$. El hecho de que $y(t) = \tan t$ existe para $0 \leq t \leq \pi/2$ destaca las limitaciones del Teorema 2.

EJEMPLO 6 Hay que suponer que $|f(t, y)| \leq K$ en el semiplano $t_0 \leq t < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Demostrar que la solución $y(t)$ del problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ existe para toda $t \geq t_0$.

SOLUCIÓN. Sea R el rectángulo $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|y - y_0| \leq b$. La cantidad

$$M = \max_{(t,y) \text{ en } R} |f(t,y)|$$

es a lo más K. Por lo tanto, $y(t)$ existe para

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \text{mín}(a, b/K).$$

Ahora bien, la cantidad mín $(a, b/K)$ puede tomarse tan grande como se desee, eligiendo a y b suficientemente grandes. De modo que $y(t)$ existe para $t \geq t_0$.

EJERCICIOS

1. Obtenga las iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $y' = 2t(y + 1)$, $y(0) = 0$ y demuestre que convergen a la solución $y(t) = e^{t^2} - 1$.
2. Calcule las primeras dos iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
3. Calcule las primeras tres iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.

En cada uno de los Problemas 4 a 15 demuestre que la solución $y(t)$ del problema de valor inicial dado existe en el intervalo indicado.

4. $y' = y^2 + \cos t^2, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$
5. $y' = 1 + y + y^2 \cos t, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$
6. $y' = t + y^2, y(0) = 0; 0 \leqslant t \leqslant (\frac{1}{2})^{2/3}$
7. $y' = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$
8. $y' = e^{-t^2} + y^2, y(1) = 0; 1 \leqslant t \leqslant 1 + \sqrt{e}/2$
9. $y' = e^{-t^2} + y^2, \quad y(0) = 1; \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1 + (1 + \sqrt{2})^2}$
10. $y' = y + e^{-y} + e^{-t}, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
11. $y' = y^3 + e^{-5t}, \quad y(0) = 0.4; \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{10}$
12. $y' = e^{(y-t)^2}, \quad y(0) = 1; \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} e^{-((1+\sqrt{3})/2)^2}$
13. $y' = (4y + e^{-t^2})e^{2y}, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{8\sqrt{e}}$
14. $y' = e^{-t} + \ln(1 + y^2), \quad y(0) = 0; \quad 0 \leqslant t < \infty$
15. $y' = \frac{1}{4}(1 + \cos 4t)y - \frac{1}{800}(1 - \cos 4t)y^2, \quad y(0) = 100; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
16. Considere el problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 0, \tag{*}$$

Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq a$, $-b \leq y \leq b$.

(a) Demuestre que la solución $y(t)$ de (*) existe para

$$0 \leqslant t \leqslant \min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

(b) Demuestre que el valor máximo de $b/(a^2 + b^2)$, para a fija, es $\frac{1}{2}a$.
(c) Demuestre que $\alpha = \min(a, \frac{1}{2}a)$ alcanza su máximo para $a = 1/\sqrt{2}$.
(d) Concluya que la solución $y(t)$ de (*) existe para $0 \leq t \leq 1/\sqrt{2}$.

17. Pruebe que $y(t) = -1$ es la solución única del problema de valor inicial

$$y' = t(1+y), \qquad y(0) = -1.$$

18. Halle una solución no trivial del problema de valor inicial $y' = ty^a$, $y(0) = 0$, $a > 1$. ¿Contradice dicha solución al Teorema 2'? Explíque.

19. Encuentre una solución al problema de valor inicial $y' = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 1$, que no sea $y(t) = 1$. ¿Contradice dicha solución al Teorema 2'? Explique.

20. Aquí se presenta una demostración alternativa del Lema 2. Sea $w(t)$ una función negativa con

$$w(t) \leqslant L\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds \tag{*}$$

en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Dado que $w(t)$ es continua, es posible encontrar una constante A tal que $0 \leq w(t) \leq A$, para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.
(a) Demuestre que $w(t) \leq LA(t - t_0)$.
(b) Use esta estimación de $w(t)$ en (*) para obtener

$$w(t) \leqslant \frac{AL^2(t-t_0)^2}{2}.$$

(c) Procediendo inductivamente demuestre que para todo entero n, $w(t) \leq AL^n(t - t_0)^n/n!$

(d) Concluya que $w(t) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

1.11 CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE LAS ECUACIONES POR ITERACIONES

Supóngase que se desea encontrar las raíces de una ecuación de la siguiente forma

$$x = f(x). \tag{1}$$

Por ejemplo, se podría desear encontrar las raíces de la ecuación

$$x = \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{4}.$$

Los métodos descritos en la sección anterior sugieren el siguiente algoritmo para resolver el problema:

1. Probar con un primer valor x_0 y usar este número para construir una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$, donde $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etcétera.
2. Mostrar que esta sucesión de iteraciones x_n tiene un límite η cuando n tiende a infinito.
3. Probar que η es una raíz de (1), es decir, que $\eta = f(\eta)$.

El siguiente teorema responde a la pregunta de cuándo es aplicable el algoritmo.

TEOREMA 3. *Sean $f(x)$ y $f'(x)$ continuas en el intervalo $a \le x \le b$, con $|f'(x)| \le \lambda < 1$ en ese intervalo. Más aún, supóngase que todas las iteraciones x_n, definidas en forma recurrente por la ecuación*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2}$$

se encuentran en el intervalo $[a, b]$. Entonces, las iteraciones x_n convergen a un único valor η que satisface (1).

DEMOSTRACIÓN. Puede cambiarse el problema de probar que la sucesión x_n converge, por el problema más simple de probar que converge una serie infinita. Esto se hace escribiendo x_n en la forma

$$x_n = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}).$$

Claramente, la sucesión x_n converge si y solamente si la serie infinita

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$$

lo hace. Para demostrar que la serie infinita converge basta con demostrar que

$$|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| < \infty.$$

Esto se logra de la siguiente manera. Por definición, $x_n = f(x_{n-1})$ y $x_{n-1} = f(x_{n-2})$. Restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$x_n - x_{n-1} = f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) = f'(\xi)(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

donde ξ es un número entre x_{n-1} y x_{n-2}. En particular, ξ se encuentra en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, $|f'(\xi)| \le \lambda$, y

$$|x_n - x_{n-1}| < \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}|. \tag{3}$$

Iterando esta desigualdad $n - 1$ veces resulta

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &< \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &< \lambda^2 |x_{n-2} - x_{n-3}| \\ &\;\vdots \\ &< \lambda^{n-1} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}|x_1 - x_0|$$

$$= |x_1 - x_0|[1 + \lambda + \lambda^2 + \dots] = \frac{|x_1 - x_0|}{1-\lambda}.$$

Esta cantidad es obviamente menor que infinito. Por lo tanto, la sucesión de iteraciones x_n tiene un límite cuando n tiende a infinito. Tomando límites en ambos lados de (2) se obtiene

$$\eta = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\eta).$$

Por lo tanto, η es una raíz de (1).

Finalmente, supóngase que η no es única, es decir, que existen dos soluciones η_1 y η_2 de (1) en el intervalo $[a, b]$. Entonces

$$\eta_1 - \eta_2 = f(\eta_1) - f(\eta_2) = f'(\xi)(\eta_1 - \eta_2),$$

donde ξ es un número entre η_1 y η_2. Esto implica que $\eta_1 = \eta_2$, o bien que $f'(\xi) = 1$. Pero $f'(\xi)$ no puede ser igual a la unidad, ya que ξ se encuentra en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, $\eta_1 = \eta_2$. □

EJEMPLO 1 Demostrar que para todo valor inicial x_0, la sucesión de iteraciones

$$x_0, \quad x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}\arctan x_0, \quad x_2 = 1 + \tfrac{1}{2}\arctan x_1, \dots$$

converge a un único número η que satisface

$$\eta = 1 + \tfrac{1}{2}\arctan \eta$$

SOLUCIÓN. Sea $f(x) = 1 + ½ \arctan x$. Al calcular $f'(x) = ½\, 1/(1 + x^2)$ se ve que $|f'(x)|$ siempre es menor o igual que ½. Por lo tanto, por el Teorema 3, la sucesión de iteraciones $x_0, x_1, x_2, \dots$ converge a la raíz única η de la ecuación $x = 1 + ½ \arctan x$, para cualquier elección de x_0.

Hay muchas situaciones en las que a priori se sabe que la ecuación $x = f(x)$ tiene una solución única η en un intervalo dado $[a, b]$. En esos casos es posible utilizar el Teorema 3 para obtener una muy buena aproximación de η. De hecho, el trabajo es especialmente simple en estos casos, ya que no es necesario controlar que todas las iteraciones x_n se encuentren en el intervalo especificado. Si x_0 está suficientemente cerca de η, entonces las iteraciones x_n siempre convergen a η, como se verá a continuación.

TEOREMA 4. *Supóngase que $f(\eta) = \eta$, y que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ en el intervalo $|x - \eta| \leq \alpha$. Elíjase un número x_0 en dicho intervalo. Entonces la sucesión de iteraciones x_n, definidas recurrentemente por la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ convergen siempre a η.*

DEMOSTRACIÓN. Denótese por I al intervalo $|x - \eta| \leq \alpha$. Por el Teorema 3, es suficiente mostrar que todas las iteraciones x_n se encuentran en I. Para esto, obsérvese que

$$x_{j+1} - \eta = f(x_j) - f(\eta) = f'(\xi)(x_j - \eta)$$

donde ξ es algún número entre x_j y η. En particular, ξ está en I si x_j está en I. Así pues,

$$|x_{j+1} - \eta| \leqslant \lambda |x_j - \eta| < |x_j - \eta| \tag{4}$$

si x_j está en I. Esto implica que x_{j+1} está en I siempre que x_j esté en I. Por lo tanto, por inducción, todas las iteraciones x_n están en I. □

La ecuación (4) también señala que x_{n+1} está más cerca de η que x_n. Concretamente, el error que se comete al aproximar η con x_n decrece, al menos en un factor λ, cada vez que se incrementa n. Así pues, si λ es muy pequeña, entonces la convergencia de x_n a η es muy rápida, mientras que si λ es aproximadamente uno, entonces la convergencia es muy lenta.

EJEMPLO 2 (a) Demostrar que la ecuación

$$x = \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{4} \tag{5}$$

tiene una raíz única η en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$.

(b) Demostrar que la sucesión de números

$$x_0, \quad x_1 = \operatorname{sen} x_0 + \tfrac{1}{4}, \quad x_2 = \operatorname{sen} x_1 + \tfrac{1}{4}, \ldots$$

converge a η si $\pi 54 \leq x_0 \leq \pi/2$.

(c) Escribir un programa de computadora para calcular las primeras N iteraciones x_1, x_2, ... x_N.

SOLUCIÓN.
(a) Tómese $g(x) = x - \operatorname{sen} x - ¼$ y obsérvese que $g(\pi/4)$ es negativa, mientras que $g(\pi/2)$ es positiva. Más aún, $g(x)$ es una función monótona creciente en x para $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$, ya que su derivada es estrictamente positiva en dicho intervalo. Por lo tanto, la ecuación (5) tiene una raíz única $x = \eta$ en el intervalo $\pi/4 < x < \pi/2$.

(b) Denótese por I el intervalo $\eta - \pi/4 \leq x \leq \eta + \pi/4$. El extremo izquierdo del intervalo es mayor que cero, mientras que el extremo derecho es menor que $3\pi/4$. Por lo tanto, existe un número λ, con $0 < \lambda t < 1$, tal que

$$|\cos x| = \left| \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{4}\right) \right| \leqslant \lambda$$

para x en I. El intervalo $[\pi/4, \pi/2]$ está claramente contenido en I. Por lo tanto, por el Teorema 4, se tiene que la sucesión de números

$$x_0, \quad x_1 = \operatorname{sen} x_0 + \tfrac{1}{4}, \quad x_2 = \operatorname{sen} x_1 + \tfrac{1}{4}, \ldots$$

converge a η para toda x_0 en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$.

(c) Programa en APL

```
    ∇ ITERATE
[1] X←Nρ0
[2] X[1]←0.25+1○X0
[3] K←1
[4] X[K+1]←0.25+1○X[K]
[5] K←K+1
[6] →4×ιK<N
[7] ⍉(2,ρX)ρ(ιρX),X      ∇
```

OBSERVACIÓN. Si x es un vector con N componentes, entonces ιρX es el vector 1, 2, ..., N. Así pues, la instrucción [7] indica a la computadora que debe imprimir los dos vectores 1, 2, ..., N y x_1, x_2, ..., x_N en columnas adyacentes.

Programa en Fortran

```
      DIMENSION X(200)
      READ (5,10) X0,N
   10 FORMAT (F15.8,I5)
C     COMPUTE X(1) FIRST
      X(1)=0.25+SIN(X0)
      KA=0
      KB=1
      WRITE (6,20) KA,X0,KB,X(1)
   20 FORMAT (1H1,4X,'N',10X,'X'/(1H,3X,I3,4X,F15.9))
C     COMPUTE X(2) THRU X(N)
      D0 40 K=2,N
      X(K)=0.25+SIN(X(K-1))
      WRITE (6,30) K,X(K)
   30 FORMAT (1H,3X,I3,4X,F15.9)
   40 CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

Los resultados de correr estos programas con $x_0 = 1$ y $N = 15$ se muestran en la Tabla 1. Esta información implica que $\eta = 1.17122965$ hasta ocho cifras después del punto

TABLA 1.

n	x_n	n	x_n
0	1	8	1.17110411
1	1.09147099	9	1.17122962
2	1.13730626	10	1.17122964
3	1.15750531	11	1.17122965
4	1.16580403	12	1.17122965
5	1.16910543	13	1.17122965
6	1.17040121	14	1.17122965
7	1.17090706	15	1.17122965

decimal. Más aún, se necesitaron solamente once iteraciones para encontrar η con una precisión de ocho cifras decimales.

En muchos casos se desea calcular una raíz de la ecuación $x = f(x)$ con una cierta precisión. La manera más fácil y eficaz de hacerlo es dando a la computadora la instrucción de terminar el programa para $k = j$ si x_{j+1} coincide con x_j dentro de la precisión prescrita.

EJERCICIOS

1. Sea η la raíz única de la ecuación (5).
   (a) Sea $x_0 = \pi/4$. Demuestre que se requieren 20 iteraciones para encontrar η con 8 cifras significativas.
   (b) Sea $x_0 = \pi/2$. Demuestre que se requieren 20 iteraciones para obtener η con 8 cifras significativas.
   (c) Sea $x_0 = 3\pi/8$. Pruebe que se requieren 16 iteraciones para encontrar η con 8 cifras significativas.

2. (a) Determine valores adecuados de x_0 para que las iteraciones x_n, definidas por la ecuación

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{1}{4}(x_n{}^2 - 2)$$

   converjan a $\sqrt{2}$.
   (b) Tómese $x_0 = 1.4$ y demuestre que se requiren 14 iteraciones para encontrar $\sqrt{2}$ con 8 cifras decimales significativas. ($\sqrt{2} = 1.41421356$ a 8 cifras significativas.)

3. (a) Determine valores adecuados de x_0 para que las iteraciones x_n definidas por la ecuación

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{1}{10}(x_n{}^2 - 2)$$

   converjan a $\sqrt{2}$.
   (b) Tómese $x_0 = 1.4$ y demuestre que se requieren 30 iteraciones para evaluar $\sqrt{2}$ con 6 cifras significativas.

4. (a) Determine un valor adecuado de α para que las iteraciones x_n, definidas por la ecuación

$$x_{n+1} = x_n - \alpha(x_n{}^2 - 3), \qquad x_0 = 1.7$$

   converjan a $\sqrt{3}$.
   (b) Encuentre $\sqrt{3}$ con 6 cifras significativas.

5. Sea η la raíz única de la ecuación $x = 1 + ½ \arctan x$. Obtenga η con 5 cifras significativas.

6. (a) Demuestre que la ecuación $2 - x = (\ln x)/4$ tiene una raíz única $x = \eta$ en el intervalo $0 < x < \infty$.
   (b) Sea

$$x_{n+1} = 2 - (\ln x_n)/4, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Pruebe que $1 \leq x_n \leq 2$ si $1 \leq x_0 \leq 2$.

(c) Demuestre que $x_n \to \eta$ como $n \to \infty$ si $1 \leq x_0 \leq 2$.
(d) Calcule η con 5 cifras significativas.

7. (a) Demuestre que la ecuación $x = \cos x$ tiene una raíz única $x = \eta$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.
(b) Sea $x_{n+1} = \cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ con $0 < x_0 < 1$. Demuestre que $0 < x_n < 1$. Concluya que, por lo tanto, $x_n \to \eta$ cuando $n \to \infty$.
(c) Obtenga η con 5 cifras significativas.

1.11.1 *Método de Newton*

El método de iteraciones que sirvió para resolver la ecuación $x = f(x)$ también puede usarse para resolver la ecuación $g(x) = 0$. De hecho, cualquier solución $x = \eta$ de $g(x) = 0$ es también solución de la ecuación

$$x = f(x) = x - g(x), \tag{1}$$

y viceversa. Más aún, cualquier solución $x = \eta$ de $g(x) = 0$ es también solución de la ecuación

$$x = f(x) = x - \frac{g(x)}{h(x)} \tag{2}$$

para cualquier función $h(x)$. Por supuesto que $h(x)$ no debe ser cero para x cercanas a η.

La ecuación 2 contiene una función arbitraria $h(x)$. Así pues, es posible intentar elegir $h(x)$ de tal manera que: (i) se cumplan las condiciones del Teorema 4 de la Sección 1.11 y (ii) que las iteraciones

$$x_0, \quad x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{h(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{h(x_1)}, \ldots$$

converjan a la raíz deseada η tan rápido como sea posible. Para tal fin, es conveniente calcular

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{g(x)}{h(x)}\right] = 1 - \frac{g'(x)}{h(x)} + \frac{h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

y observar que

$$f'(\eta) = 1 - \frac{g'(\eta)}{h(\eta)}.$$

Esto sugiere tomar $h(x) = g'(x)$, ya que entonces $f'(\eta) = 0$. Por lo tanto, las iteradas x_n, definidas en forma recurrente por medio de la ecuación

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

convergen a η si el valor inicial x_0 está suficientemente cerca de η. (Si $f'(\eta) = 0$, entonces $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ para $|x - \eta|$ lo bastante pequeño.) De hecho, la elección de $h(x) = f'(x)$ es *óptima*, ya que la convergencia de x_n a η es en extremo rápida. Esto se sabe

del hecho de que el número λ en la ecuación (4) de la Sección 1.11 puede tomarse arbitrariamente pequeño al aproximarse x_n a η.

El método de iteración (3) se conoce como *método de Newton* para resolver la ecuación $g(x) = 0$. Es posible mostrar que si $g(\eta) = 0$, y x_0 está suficientemente cerca de η, entonces

$$|x_{n+1} - \eta| \leq c|x_n - \eta|^2,$$

para una constante positiva c. En otras palabras, el error cometido al aproximar η con x_{n+1} es proporcional al cuadrado del error cometido al aproximar η con x_n. Este tipo de convergencia se llama *convergencia cuadrática* e implica que las iteraciones x_n convergen extremadamente rápido a η. En muchos casos se requiere sólo de cinco a seis iteraciones para encontrar η con ocho o más cifras decimales significativas.

EJEMPLO 1 Usar el método de Newton para calcular $\sqrt{2}$.

SOLUCIÓN. La raíz cuadrada de 2 es una raíz de la ecuación

$$g(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Por lo tanto, la fórmula de Newton para este problema es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n^2 - 2)}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

A continuación se presentan programas en APL y Fortran para calcular las primeras N iteraciones de un valor inicial x_0.

Programa en APL

```
     ∇ NEWTON
[1]  X←Nρ0
[2]  X[1]←(X0÷2)+ ÷X0
[3]  K←1
[4]  X[K+1]←(X[K]÷2)+ ÷X[K]
[5]  K←K+1
[6]  →4×ιK<N
[7]  ⍉(2,ρX)ρ(ιρX),X      ∇
```

TABLA 1.

n	x_n	n	x_n
0	1.4	3	1.41421356
1	1.41428571	4	1.41421356
2	1.41421356	5	1.41421356

Programa en Fortran

Solamente se necesita cambiar las instrucciones en el programa en Fortran de la Sección 1.11, para calcular X(1) y X(K), por

```
X(1)=(X0/2)+1/X0
```

y

```
X(K)=(X(K-1)/2)+1/X(K-1)
```

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en corridas de estos programas con $x_0 = 1.4$ y $N = 5$. Nótese que el método de Newton requiere solamente de dos iteraciones para evaluar $\sqrt{2}$ con 8 cifras decimales significativas.

EJEMPLO 2 Usar el método de Newton para encontrar la velocidad de impacto de los recipientes de la Sección 1.7.

SOLUCIÓN. La velocidad de choque o impacto de los recipientes satisface la siguiente ecuación:

$$g(v)=v+\frac{300cg}{W}+\frac{W-B}{c}\ln\left[\frac{W-B-cv}{W-B}\right]=0 \tag{5}$$

donde

$$c=0.08,\quad g=32.2,\quad W=527.436,\quad \text{y}\quad B=470.327.$$

Tomando $a = (W-B)/c$ y $d = 300cg/W$, la ecuación (5) se simplifica y queda de la siguiente manera:

$$g(v)=v+d+a\ln(1-v/a)=0. \tag{6}$$

La fórmula de Newton para este problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=v_n-\frac{g(v_n)}{g'(v_n)}=v_n+\frac{(1-v_n/a)\left[v_n+d+a\ln(1-v_n/a)\right]}{v_n/a}\\ &=v_n+\frac{a-v_n}{v_n}\left[v_n+d+a\ln(1-v_n/a)\right],\qquad n=0,1,2,\ldots. \end{aligned}$$

A continuación, se presentan programas en APL y Fortran para calcular las primeras N iteraciones de v_0.

Programa en APL

```
    ∇ NEWTON
[1] V←Nρ0
[2] V1←V0+D+A×⍟1−V0÷A
[3] V[1]←V0+(A−V0)×V1÷V0
[4] K←1
[5] VK←V[K]+D+A×⍟1−V[K]÷A
[6] V[K+1]←V[K]+(A−V[K])×VK÷V[K]
```

```
[7]  K←K+1
[8]  →5×ιK<N
[9]  ⍉(2,ρV)ρ(ιρV),V    ∇
```

Programa en Fortran

Cámbiese X por V en el programa en Fortran de la Sección 1.11 y en vez de las instrucciones para X(1) y X(K), tómense

```
V(1)=V0+((A−V0)/V0)*(V0+D+A*A LOG(1 − (V0 / A)))
```

y

```
V(K)=V(K−1)+((A−V(K−1))/V(K−1))*(V(K−1)+D
     +A*A LOG(1−(V(K−1) / A)))
```

(Por supuesto que antes de correr estos programas hay que dar instrucciones a la computadora para evaluar $a = (W - B)/c$, y $d = 300\,cg/W$.)

Como se mostró en la Sección 1.7, $v_0 = 45.7$ es una muy buena aproximación de v. Haciendo $v_0 = 45.7$ en los programas anteriores se ve que las iteraciones v_n convergen muy rápidamente a $v = 44.51$ pie/s. Así pues, los recipientes realmente pueden quedar dañados con el impacto.

En general no es posible determinar a priori cuántas iteraciones se requieren para lograr una cierta precisión. En la práctica N se toma bastante grande, y se dan instrucciones a la computadora para terminar el programa si alguna de las iteraciones coincide con la anterior con la precisión deseada.

EJERCICIOS

1. Demuestre que las iteraciones x_n definidas por (4) convergen a $\sqrt{2}$ si

$$\sqrt{2/3} < x_0 < \sqrt{2} + (\sqrt{2} - \sqrt{2/3}).$$

2. Use el método de Newton para encontrar los siguientes números con 8 cifras decimales significativas: (a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{5}$, (c) $\sqrt{7}$.

3. El número π es una raíz de la ecuación

$$\tan\frac{x}{4} - \cot\frac{x}{4} = 0.$$

Aplique el método de Newton para encontrar π con 8 cifras decimales significativas.

Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene una solución única en el intervalo dado, y use el método de Newton para encontrarla con 5 cifras decimales significativas

4. $2x - \tan x = 0;\quad \pi < x < 3\pi/2$

5. $\frac{1}{2} - x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x = 0;\quad \frac{1}{2} < x < 1$

6. $\ln x + (x+1)^3 = 0;\quad 0 < x < 1$

7. $2\sqrt{x} = \cos\frac{\pi x}{2};\quad 0 < x < 1$

8. $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0;\quad 0 < x < 1$

9. $x - e^{-x^2} = 1;\quad 0 < x < 2.$

1.12 ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y CÁLCULO DE LOS INTERESES EN PRÉSTAMOS PARA ESTUDIANTES

En las Secciones 1.13 a 1.16 se desarrollarán varias aproximaciones de la solución del problema de valor inicial $dy/dt = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Al tratar de determinar cuán buenas son tales aproximaciones se presenta el siguiente problema: ¿Qué tamaño pueden tener los números $E_1, \ldots, E_N$ si

$$E_{n+1} \leqslant AE_n + B, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1}$$

para un par de constantes positivas A y B y $E_0 = 0$?. Este es un problema muy difícil ya que involucra *desigualdades* más que *igualdades*. Sin embargo, afortunadamente puede transformarse el problema de resolver las desigualdades (1) en otro problema más sencillo consistente en resolver un sistema de igualdades. Eso es el contenido del lema siguiente.

LEMA 1. *Supóngase que $E_1, \ldots, E_n$ satisfacen las siguientes desigualdades*

$$E_{n+1} \leqslant AE_n + B, \qquad E_0 = 0$$

para un par de constantes positivas A y B. Entonces E_n es menor que o igual a y_n, donde

$$y_{n+1} = Ay_n + B, \qquad y_0 = 0. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración del Lema 1 se hará por inducción para n. Entonces, obsérvese que dicho Lema 1 es obviamente válido para $n = 0$. Ahora, supóngase que el lema es válido para $n = j$. Entonces es necesario mostrar que el Lema 1 es válido para $n = j + 1$. Es decir, hay que probar que $E_j \leq y_j$ implica que $E_{j+1} \leq y_{j+1}$. De aquí se sigue inmediatamente, que si $E_j \leq y_j$, entonces

$$E_{j+1} \leqslant AE_j + B \leqslant Ay_j + B = y_{j+1}.$$

Por lo tanto, por inducción, se tiene $E_n \leq y_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$. □

El siguiente objetivo es resolver la ecuación (2), la cual se denomina, frecuentemente, *ecuación en diferencias*. Esto se hará en dos partes. Primero se resolverá la sencilla ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_n + B_n, \qquad y_0 = y_0. \tag{3}$$

Después se reducirá la ecuación en diferencias (2) a la ecuación en diferencias (3) por medio de un hábil cambio de variables.

La ecuación (3) se resuelve fácilmente. Obsérvese que

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= B_0 \\ y_2 - y_1 &= B_1 \\ &\vdots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= B_{n-2} \\ y_n - y_{n-1} &= B_{n-1}. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones se obtiene

$$(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_1 - y_0) = B_0 + B_1 + \ldots + B_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$y_n = y_0 + B_0 + \ldots + B_{n-1} = y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} B_j.$$

Ahora se reducirá la ecuación en diferencias (2) a la ecuación más sencilla (3), de la siguiente manera: Hágase

$$z_n = \frac{y_n}{A^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Entonces $z_{n+1} = y_{n+1}/A^{n+1}$. Pero $y_{n+1} = Ay_n + B$. Por tanto,

$$z_{n+1} = \frac{y_n}{A^n} + \frac{B}{A^{n+1}} = z_n + \frac{B}{A^{n+1}}.$$

y como consecuencia,

$$z_n = z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{B}{A^{j+1}} = y_0 + \frac{B}{A}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{A}\right)^n}{1-\frac{1}{A}}\right]$$

$$= y_0 + \frac{B}{A-1}\left[1-\left(\frac{1}{A}\right)^n\right]$$

y

$$y_n = A^n z_n = A^n y_0 + \frac{B}{A-1}(A^n - 1). \tag{4}$$

Finalmente, volviendo a las desigualdades (1) se ve que

$$E_n \leqslant \frac{B}{A-1}(A^n - 1), \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Al estar reuniendo material para este libro, un amigo presentó al autor el siguiente problema. Acababa de recibir una nota del banco para el primer pago de un préstamo de estudiante de su esposa. Dicho préstamo debía ser pagado en 10 años en 120 mensualidades iguales. De acuerdo con sus estimaciones, el banco le estaba cargando al menos 20% más de lo correcto. Sin embargo, antes de acudir al personal bancario quería calcular con precisión los pagos mensuales del préstamo.

Este problema puede considerarse en el siguiente contexto general. Supóngase que se obtiene un préstamo de valor P de un banco, con un tipo anual de interés de R%. Dicho préstamo debe ser pagado en n años en mensualidades iguales de valor x. Determinar x.

El primer paso hacia la solución del problema es encontrar el monto de los intereses sobre el préstamo. Para esto, obsérvese que el interés que se debe en el momento del primer pago es $I_1 = (r/12)P$, donde $r = R/100$. El saldo insoluto durante el segundo mes del préstamo es $(x - I_1)$ menos el saldo insoluto del primer mes. Por lo tanto el interés I_2 que se debe en el segundo mes del préstamo es

$$I_2 = I_1 - \frac{r}{12}(x - I_1).$$

De manera similar, el interés I_{j+1} que se debe en el mes $j + 1$ es

$$I_{j+1} = I_j - \frac{r}{12}(x - I_j) = \left(1 + \frac{r}{12}\right)I_j - \frac{r}{12}x, \tag{6}$$

donde I_j es el interés que se debe en el mes j.

La ecuación (6) es una ecuación en diferencias para los números

$$I_1 = \frac{r}{12}P, I_2, \ldots, I_{12n}.$$

Su solución (Ejercicio 4) es

$$I_j = \frac{r}{12}P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{j-1} + x\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{j-1}\right].$$

Por lo tanto, el monto total de los intereses pagados por el préstamo es

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 + \ldots + I_{12n} &= \sum_{j=1}^{12n} I_j \\ &= \frac{r}{12}P\sum_{j=1}^{12n}\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{j-1} + 12nx - x\sum_{j=1}^{12n}\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{j-1} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=1}^{12n}\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{j-1} = \frac{12}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= P\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right] + 12nx - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right] \\ &= 12nx - P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right]. \end{aligned}$$

Pero $12nx - P$ debe ser igual a I, ya que $12nx$ es la cantidad de dinero pagada al banco, y P era el monto del préstamo. Por lo tanto,

$$P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - \frac{12x}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right] = 0$$

y esta ecuación implica que

$$x = \frac{\frac{r}{12}P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n}}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1}. \tag{7}$$

EPÍLOGO. Usando la ecuación (7), el autor calculó x para el préstamo que adeudaban su amigo y la esposa de su amigo. En ambos casos, el banco tenía razón hasta el último centavo.

EJERCICIOS

1. Resuelva la ecuación en diferencias $y_{n+1} = -7y_n + 2$, $y_0 = 1$.

2. Encuentre y_{37} si $y_{n+1} = 3y_n + 1$, $y_0 = 0$, $n = 0, 1, \ldots, 36$.

3. Calcule los números $E_0, E_1, \ldots, E_N$ si $E_0 = 0$ y
   (a) $E_{n+1} < 3E_n + 1$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$;
   (b) $E_{n+1} < 2E_n + 2$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

4. (a) Demuestre que la transformación $y_j = I_{j+1}$ lleva la ecuación en diferencias

$$I_{j+1} = \left(1 + \frac{r}{12}\right)I_j - \frac{r}{12}x, \qquad I_1 = \frac{r}{12}P$$

   a la ecuación en diferencias

$$y_{j+1} = \left(1 + \frac{r}{12}\right)y_j - \frac{r}{12}x, \qquad y_0 = \frac{r}{12}P.$$

   (b) Use la ecuación (4) para encontrar $y_{j-1} = I_j$.

5. Resuelva la ecuación en diferencias $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$, $y_1 = \alpha$. *Sugerencia:* Haga $z_1 = y_1$ y $z_n = y_n/a_1, \ldots, a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Observe que

$$z_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{a_1 \ldots a_n} = \frac{a_n y_n}{a_1 \ldots a_n} + \frac{b_n}{a_1 \ldots a_n}$$
$$= z_n + \frac{b_n}{a_1 \ldots a_n}.$$

   Concluya que, por lo tanto, $z_n = z_1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_j / a_1 \ldots a_j$.

6. Resuelva la ecuación en diferencias $y_{n+1} - ny_n = 1 - n$, $y_1 = 2$.

7. Encuentre y_{25} si $y_1 = 1$ y $(n+1)y_{n+1} - ny_n = 2^n$, $n = 1, \ldots, 24$.

8. Un estudiante obtiene un préstamo de monto P con un tipo de interés anual de R%. Dicho préstamo debe ser pagado en n años en mensualidades iguales de valor x. Determine x si
   (a) $P = 4\,250$, $R = 3$ y $n = 5$.
   (b) $P = 5\,000$, $R = 7$ y $n = 10$.

9. El comprador de una casa obtiene un préstamo hipotecario de 30 000 (dólares) con un tipo de interés anual de 9%. El préstamo tiene que ser pagado en 20 años en 240 mensualidades iguales con valor x.
   (a) Calcule x.
   (b) Encuentre x si el tipo de interés anual es 10%.

10. La cantidad de un producto ofrecida en una semana dada es obviamente una función creciente de su precio en la semana anterior, mientras que la cantidad solicitada en una determinada semana, es función de su precio actual. Denote por S_j y D_j las cantidades ofrecida y solicitada en la semana j, respectivamente, y por P_j el precio del artículo en la semana j. Suponga que existen constantes positivas a, b y c, tales que

$$S_j = aP_{j-1} \quad \text{y} \quad D_j = b - cP_j.$$

(a) Demuestre que $P_j = b/(a + c) + (-a/c)^{\infty j}(P_0 - b/(a + c))$ si la oferta y la demanda son iguales.
(b) Demuestre que P_j tiende a $b(a + c)$ cuando j tiende a infinito si $a/c < 1$.
(c) Pruebe que $P = b/(a + c)$ representa una situación de equilibrio. Es decir, si la oferta es igual a la demanda y si el precio alguna vez llega al nivel $b/(a + c)$, entonces se mantendrá dicho nivel.

1.13 APROXIMACIONES NUMÉRICAS; MÉTODO DE EULER

En la Sección 1.9 se mostró que en general no es posible resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Por lo tanto, para que las ecuaciones diferenciales puedan tener valor práctico, es necesario descubrir maneras de obtener buenas aproximaciones de la solución $y(t)$ de (1). En las Secciones 1.13 a 1.16 se deducirán algoritmos que pueden ser aplicables en una computadora digital para obtener buenas aproximaciones de $y(t)$.

Ahora bien, una computadora obviamente no puede aproximar una función en todo un intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, ya que requeriría una cantidad infinita de información. A lo más puede calcular valores aproximados $y_1, \ldots, y_N$ de $y(t)$ en un número finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Sin embargo, esto es suficiente para efectos prácticos, ya que usando los números $y_1, \ldots, y_N$ puede obtenerse una buena aproximación $y(t)$ en todo el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + a$. De hecho, tómese $y(t)$ como la función cuya gráfica en cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ es una recta que une los puntos (t_j, y_j) y (t_{j+1}, y_{j+1}) (Fig. 1). La función $y(t)$ se puede expresar analíticamente por medio de la ecuación

$$\hat{y}(t) = y_j + \frac{1}{h}(t - t_j)(y_{j+1} - y_j), \qquad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}.$$

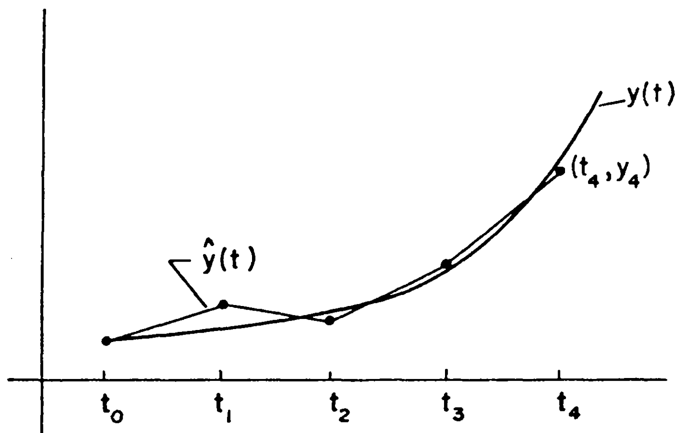


FIGURA 1. Comparación de $\hat{y}(t)$ y $y(t)$

Si $y(t)$ está cerca de $y(t)$ en $t = t_j$; es decir, si y_j está cerca de $y(t_j)$, y si t_{j+1} está cerca de t_j, entonces $y(t)$ está cerca de $y(t)$ en todo el intervalo $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. Esto se sigue inmediatamente de la continuidad de ambas funciones $y(t)$ y $y(t)$. Así pues, sólo se requiere de un método para obtener buenas aproximaciones de $y(t)$ en un número discreto de puntos $t_1, \ldots, t_N$ en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + a$. Para simplificar los cálculos se pide que los puntos $t_1, \ldots, t_N$ estén igualmente espaciados. Esto se logra tomando N suficientemente grande y haciendo $t_k = t_0 + k(a/N)$, $k = 1, \ldots, N$. Otra manera de hacerlo es escribir $t_{k+1} = t_k + h$, donde $h = a/N$.

Ahora bien, lo único que se sabe de $y(t)$ es que satisface una ecuación diferencial y que su valor en $t = t_0$ es y_0. Esta información se usará para obtener un valor aproximado y_1 de y en $t = t_1 = t_0 + h$. Luego puede usarse este valor aproximado y_1 para calcular un valor aproximado y_2 de y en $t = t_2 = t_1 + h$, y así sucesivamente. Para lograr esto se necesita un teorema que permita calcular el valor de y en $t = t_k + h$ a partir de la información de y en $t = t_k$. Tal teorema es, por supuesto, el Teorema de Taylor, el cual establece que

$$y(t_k+h)=y(t_k)+h\frac{dy(t_k)}{dt}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2y(t_k)}{dt^2}+\ldots. \tag{2}$$

Así pues, si se conoce el valor de y y de sus derivadas en $t = t_k$, entonces es posible calcular el valor de y en $t = t_k + h$. Ahora bien, $y(t)$ satisface el problema de valor inicial (1). Por lo tanto, su derivada evaluada en $t = t_k$ debe ser igual a $f(t_k, y(t_k))$. Más aún, usando repetidas veces la regla de la cadena para derivación parcial (Apéndice A) es posible calcular

$$\frac{d^2y(t_k)}{dt^2}=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right](t_k,y(t_k))$$

y todas las derivadas de orden superior de $y(t)$ en $t = t_k$. Por lo tanto, se puede escribir (2) en la siguiente forma

$$\begin{aligned}y(t_{k+1})&=y(t_k)+hf(t_k,y(t_k))\\&\quad+\frac{h^2}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right](t_k,y(t_k))+\ldots.\end{aligned} \tag{3}$$

La aproximación más sencilla de $y(t_{k+1})$ se obtiene truncando la serie de Taylor (3) después del segundo término. Esto lleva al siguiente método numérico

$$y_1=y_0+hf(t_0,y_0), \qquad y_2=y_1+hf(t_1,y_1),$$

y en general

$$y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k), \qquad y_0=y(t_0). \tag{4}$$

Nótese cómo se usa el valor inicial y_0 y el hecho de que $y(t)$ satisface la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ para calcular un valor aproximado y_1 de $y(t)$ en $t = t_1$. Después se emplea este valor aproximado de y_1 para calcular un valor aproximado y_2 de $y(t)$ en $t = t_2$, y así sucesivamente.

La ecuación (4) se conoce como el *método de Euler*. Es el procedimiento numérico más sencillo para obtener valores aproximados $y_1, \ldots, y_N$ de la solución $y(t)$ en los tiempos $t_1, \ldots, t_N$. Por supuesto que es también el método más inexacto, ya que se

conservarán solamente dos términos del desarrollo de la serie de Taylor de $y(t)$. Como se verá a continuación, el método de Euler no es lo suficientemente preciso para ser utilizado en muchos problemas. Sin embargo, constituye una introducción excelente a métodos más complicados que se expondrán a continuación.

EJEMPLO 1 Sea $y(t)$ la solución al problema de valor inicial

$$dy/dt = 1 + (y-t)^2, \qquad y(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Usar el método de Euler para calcular valores aproximados $y_1, \ldots, y_N$ de $y(t)$ en los puntos $t_1 = 1/N$, $t_2 = 2/N, \ldots, t_N = 1$.

SOLUCIÓN. La fórmula de Euler para este problema es

$$y_{k+1} = y_k + h\left[1 + (y_k - t_k)^2\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad h = 1/N$$

con $y_0 = ½$. A continuación se dan ejemplos de programas en APL y Fortran para calcular $y_1, \ldots, y_N$. Estos programas, al igual que los subsiguientes, tienen valores variables para t_0, y_0, a y N, de modo que pueden usarse para resolver el problema de valor inicial $dy/dt = 1 + (y-t)^2$, $y(t_0) = y_0$ en cualquier intervalo. Más aún, los mismos programas funcionan bien cambiando la ecuación diferencial; si se cambia la función $f(t, y)$ entonces sólo es necesario modificar las líneas 5 y 8 del programa en APL, y las expresiones para $Y(1)$ y $Y(k)$ en la Sección B del programa en Fortran.

La Tabla 1 muestra los resultados de estos cálculos con $a = 1$, $N = 10$, $t_0 = 0$ y $y_0 = ½$. Todos ellos y los que les siguen se hicieron en una computadora IBM 360 usando doble precisión (16 cifras). Los resultados se redondearon a 8 cifras decimales significativas.

TABLA 1.

t	y	t	y
0	0.5	0.6	1.29810115
0.1	0.625	0.7	1.44683567
0.2	0.7525625	0.8	1.60261202
0.3	0.88309503	0.9	1.76703063
0.4	1.01709501	1	1.94220484
0.5	1.15517564		

La solución exacta de este problema de valor inicial (Ejercicio 7) es

$$y(t) = t + 1/(2-t).$$

Así pues, el error que se comete al aproximar el valor de la solución en $t = 1$ con y_{10} es aproximadamente de 0.06, ya que $y(1) = 2$. Si se corre el programa con $N = 20$ y $N = 40$ se obtiene que $y_{20} = 1.96852339$ y $y_{40} = 1.9835109$. Por lo tanto, el error que se comete al aproximar $y(1)$ con y_{40} es ya menor que 0.02.

Programa en APL

```
     ∇ EULER
 [1]  T←Nρ0
 [2]  Y←Nρ0
 [3]  H←A+N
 [4]  T[1]←T0+H
 [5]  Y[1]←Y0+H×1+(Y0−T0)*2
 [6]  K→1
 [7]  T[K+1]←T[K]+H
 [8]  Y[K+1]←Y[K]+H×1+(Y[K]−T[K])*2
 [9]  K←K+1
[10]  ←7×ιK<N
[11]  T←T0,T
[12]  Y←Y0,Y
[13]  ⍉(2,ρY)ρT,Y      ∇
```

Programa en Fortran

```
Sección A                            DIMENSION T(1000),Y(1000)
Lectura de datos                     READ (5,10) T0,Y0,A,N
                    10               FORMAT (3F20.8,I5)
                                     H=A/N

Sección B                            T(1)=T0+H
Cálculos                             Y(1)=Y0+H*(1+(Y0−T0)**2)
                                     D0 20 K=2,N
                                     T(K)=T(K−1)+H
                                     Y(K)=Y(K−1)+H*(1+(Y(K−1)
                               1     −T(K−1))**2)
                    20               CONTINUE

Sección C                            WRITE (6,30) T0,Y0,(T(J),Y(J),J=1,N)
Impresión de los    30               FORMAT (1H1,3X,1HT,4X,1HY,/(1H,1X,
resultados                     1     F10.7,2X,F20.9/))
                                     CALL EXIT
                                     END
```

EJERCICIOS

Usando el método de Euler con incrementos $h = 0.1$, determine un valor aproximado de la solución en $t = 1$ para cada uno de los problemas de valor inicial 1 a 5. Repita los cálculos con $h = 0.025$ y compare los resultados con el valor dado de la solución.

1. $\dfrac{dy}{dt} = 1 + t - y, \quad y(0) = 0; \ (y(t) = t)$

2. $\dfrac{dy}{dt} = 2ty, \quad y(0) = 2; \ (y(t) = 2e^{t^2})$

3. $\dfrac{dy}{dt}=1+y^2-t^2, \quad y(0)=0; \ (y(t)=t)$

4. $\dfrac{dy}{dt}=te^{-y}+\dfrac{t}{1+t^2}, \quad y(0)=0; \ (y(t)=\ln(1+t^2))$

5. $\dfrac{dy}{dt}=-1+2t+\dfrac{y^2}{(1+t^2)^2}, \quad y(0)=1; \ (y(t)=1+t^2)$

6. Usando el método de Euler con $h = \pi/40$, determine un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=2\sec^2 t-(1+y^2), \qquad y(0)=0$$

en $t = \pi/4$. Repita los cálculos con $h = \pi/160$ y compare los resultados con el número 1, el cual es el valor de la solución $y(t) = \tan t$ en $t = \pi/4$.

7. (a) Demuestre que la sustitución $y = t + z$ reduce el problema de valor inicial $y' = 1 + (y - t)^2$, $y(0) = 0.5$ al problema de valor inicial más sencillo $z' = z^2$, $z(0) = 0.5$.
   (b) Demuestre que $z(t) = 1/(2 - t)$. Por lo tanto, $y(t) = t + 1/(2 - t)$.

1.13.1 *Análisis de error en el Método de Euler*

Una de las características precisas del procedimiento de Euler es que es relativamente fácil estimar el error cometido al aproximar $y(t_k)$ con y_k. Sin embargo, esto sucede sólo bajo la rigurosa restricción de que $t_1, \ldots, t_N$ no son mayores que $t_0 + \alpha$, donde α es el número definido en el teorema de existencia y unicidad de la Sección 1.10. Más precisamente, sean a y b dos números positivos y supóngase que las funciones f, $\partial f/\partial t$ y $\partial f/\partial y$ están definidas y son continuas en el rectángulo $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$. Denótese este rectángulo con R. Sea M el valor máximo de $|f(t, y)|$ para (t, y) en R y hágase $\alpha = \min(a, b/M)$. A continuación se calcula el error cometido al aproximar $y(t_k)$ con y_k para $t_k \leq t_0 + \alpha$.

Para esto, obsérvese que los números $y_0, y_1, \ldots, y_N$ satisfacen la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k), \qquad k=0,1,\ldots,N-1 \tag{1}$$

mientras que los números $y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_N)$ satisfacen la ecuación en diferencias

$$y(t_{k+1})=y(t_k)+hf(t_k,y(t_k))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right](\xi_k,y(\xi_k)) \tag{2}$$

donde ξ_k es un número entre t_k y t_{k+1}.

La ecuación (2) se deduce de la identidad

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}$$

y del hecho que

$$y(t+h)=y(t)+h\frac{dy(t)}{dt}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y(\tau)}{dt^2}.$$

para algún número τ entre t y $t+h$. Restando la ecuación (1) de la ecuación (2) se obtiene

$$\begin{aligned}y(t_{k+1})-y_{k+1}&=y(t_k)-y_k+h\left[f(t_k,y(t_k))-f(t_k,y_k)\right]\\&\quad+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right](\xi_k,y(\xi_k)).\end{aligned}$$

Ahora, obsérvese que

$$f(t_k,y(t_k))-f(t_k,y_k)=\frac{\partial f(t_k,\eta_k)}{\partial y}\left[y(t_k)-y_k\right]$$

donde η_k es algún número entre $y(t_k)$ y y_k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|y(t_{k+1})-y_{k+1}|&\leqslant|y(t_k)-y_k|+h\left|\frac{\partial f(t_k,\eta_k)}{\partial y}\right||y(t_k)-y_k|\\&\quad+\frac{h^2}{2}\left|\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right](\xi_k,y(\xi_k))\right|.\end{aligned}$$

Antes de continuar es necesario estimar las cantidades $\left(\partial f(t_k,\eta_k)\right)/\partial y$ y $[(\partial f/\partial t)+f(\partial f/\partial y)](\xi_k,y(\xi_k))$. Para ello, obsérvese que los puntos $(\xi_k,y(\xi_k))$ y (t_k,y_k) están en el rectángulo R. [En la Sección 1.10 se mostró que los puntos $(\xi_k,y(\xi_k))$ se hallan en R. Además, un sencillo argumento de inducción (Ejercicio 9) muestra que todos los puntos (t_k,y_k) están en R.] Por lo tanto, los puntos (t_k,η_k) también están en R. Sean L y D dos números positivos tales que

$$\max_{(t,y)\text{ en }R}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant L$$

y

$$\max_{(t,y)\text{ en }R}\left|\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant D.$$

Dichos números siempre existen si f, $\partial f/\partial t$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R. Entonces

$$|y(t_{k+1})-y_{k+1}|\leqslant|y(t_k)-y_k|+hL|y(t_k)-y_k|+\frac{Dh^2}{2}. \tag{3}$$

Ahora bien, tómese $E_k=|y(t_k)-y_k|$, $k=0,1,\ldots,N$. El número E_k es el error que se comete en el paso k al aproximar $y(t_k)$ con y_k. De (3) se sigue

$$E_{k+1}\leqslant(1+hL)E_k+\frac{Dh^2}{2},\qquad k=0,1,\ldots,N-1. \tag{4}$$

Más aún, $E_0=0$, ya que $y(t_0)=y_0$. Así pues, los números $E_0, E_1, \ldots, E_N$ satisfacen el siguiente conjunto de desigualdades

$$E_{k+1}\leqslant AE_k+B,\qquad E_0=0$$

con $A = 1 + hL$ y $B = Dh^2/2$. Por lo tanto, (Sección 1.12)

$$E_k < \frac{B}{A-1}(A^k - 1) = \frac{Dh}{2L}\left[(1+hL)^k - 1\right]. \tag{5}$$

También es posible obtener una estimación para E_k que es independiente de k. Obsérvese que $1 + hL \leq e^{hL}$. Esto proviene del hecho que

$$\begin{aligned} e^{hL} &= 1 + hL + \frac{(hL)^2}{2!} + \frac{(hL)^3}{3!} + \ldots \\ &= (1 + hL) + \text{“algo positivo”} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$E_k < \frac{Dh}{2L}\left[(e^{hL})^k - 1\right] = \frac{Dh}{2L}\left[e^{khL} - 1\right].$$

Finalmente, dado que $kh \leq \alpha$, entonces

$$E_k < \frac{Dh}{2L}\left[e^{\alpha L} - 1\right], \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

La ecuación (6) dice que el error que se comete al aproximar la solución $y(t)$ en el tiempo $t = t_k$ es a lo más una constante fija multiplicada por h. Esto sugiere, como regla práctica, que el error debería disminuir aproximadamente en ½ si se reduce h en ½. Esto puede verificarse directamente en el Ejemplo 1 de la sección anterior, donde el error en $t = 1$ para $h = 0.1$, 0.05 y 0.025 es 0.058, 0.032 y 0.017, respectivamente.

EJEMPLO 1 Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + y^2}{2}, \qquad y(0) = 0.$$

(a) Demostrar que $y(t)$ existe al menos para $0 \leq t \leq 1$, y que en este intervalo se cumple $-1 \leq y(t) \leq 1$.
(b) Sea N un entero positivo grande. Aplicar el método de Euler para encontrar valores aproximados de y en los puntos $t_k = k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$.
(c) Determinar un incremento $h = 1/N$ tal que el error que se comete al aproximar $y(t_k)$ con y_k no sea mayor que 0.0001.

SOLUCIÓN.

(a) Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. El valor máximo de $(t^2 + y^2)/2$ con (t, y) en R es 1. Por lo tanto, por el teorema de existencia y unicidad de la Sección 1.10, $y(t)$ existe al menos para

$$0 < t < \alpha = min\left(1, \tfrac{1}{1}\right) = 1,$$

y en este intervalo se cumple, $-1 \leq y \leq 1$.

(b) $$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{t_k^2 + y_k^2}{2}\right) = y_k + \frac{1}{2N}\left[\left(\frac{k}{N}\right)^2 + y_k^2\right]$$

con $y_0' = 0$. El entero k va de 0 a $N - 1$.

(c) Hágase $f(t, y) = (t^2 + y^2)/2$ y calcúlese

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} = t + \frac{y}{2}(t^2+y^2).$$

De (6) se sigue $|y(t_k) - y_k| \leq (Dh/2L)(e^L - 1)$, donde L y D son dos números positivos, tales que

$$\max_{(t,y)\text{ en } R} |y| < L$$

y

$$\max_{(t,y)\text{ en } R} \left| t + \frac{y}{2}(t^2+y^2) \right| < D.$$

Ahora bien, los valores máximos de las funciones $|y|$ y $|t + (y/2)(t^2 + y^2)|$ para (t, y) en R son claramente 1 y 2, respectivamente. Por lo tanto,

$$|y(t_k) - y_k| < \frac{2h}{2}(e-1) = h(e-1).$$

Esto implica que el incremento h debe ser menor que $0.0001/(e - 1)$. De manera equivalente, N debe ser mayor que $(e - 1)10^4 = 17\,183$. Así pues, se debe iterar la ecuación

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2(17{,}183)}\left[\left(\frac{k}{17{,}183}\right)^2 + y_k^2\right]$$

17 183 veces para estar seguro de que el valor de $y(1)$ es correcto con cuatro cifras decimales.

EJEMPLO 2 Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + e^{-y^2}, \qquad y(0) = 1.$$

(a) Demostrar que $y(t)$ existe al menos para $0 \leq t \leq 1$, y que en este intervalo se cumple $-1 \leq y \leq 3$.
(b) Sea N un entero positivo grande. Aplicar el método de Euler para encontrar valores aproximados de $y(t)$ en los puntos $t_k = k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$.
(c) Determinar un incremento h, tal que el error cometido al aproximar $y(t_k)$ con y_k no sea mayor que 0.0001.

SOLUCIÓN.

(a) Sea R el rectángulo $0 \leq t \leq 1$, $|y - 1| \leq 2$. El valor máximo de $t^2 + e^{-y^2}$ con (t, y) en R es 2. Por lo tanto, $y(t)$ existe al menos para $0 \leq t \leq \text{mín}(1, 2/2) = 1$ y en ese intervalo se cumple $-1 \leq y \leq 3$.
(b) $y_{k+1} = y_k + h(t_k{}^2 + e^{-y_k^2}) = y_k + (1/N)[(k/N)^2 + e^{-y_k^2}]$ con $y_0 = 1$. El entero k toma valores de 0 a $N - 1$.
(c) Hágase $f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$ y calcúlese

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} = 2t - 2y(t^2 + e^{-y^2})e^{-y^2}.$$

De (6) se sigue que $|y(t_k) - y_k| \leq (Dh/2L)(e^L - 1)$, donde L y D son dos números positivos tales que

$$\max_{(t,y)\text{ en } R} |-2ye^{-y^2}| \leq L$$

y

$$\max_{(t,y)\text{ en } R} |2t-2y(t^2+e^{-y^2})e^{-y^2}| \leq D.$$

Ahora bien, se ve fácilmente que el valor máximo de $|2ye^{-y^2}|$ para $-1 \leq y \leq 3$ es $\sqrt{2/e}$. Así pues, se toma $L = \sqrt{2/e}$. Desafortunadamente, es muy difícil calcular el valor máximo de la función

$$|2t-2y(t^2+e^{-y^2})e^{-y^2}|$$

con (t, y) en R. A pesar de ello es posible encontrar un valor aceptable D observando que para (t, y) en R

$$\begin{aligned}\text{máx}|2t-2v(t^2+e^{-y^2})e^{-y^2}| &\leq \text{máx}|2t|+\text{máx}|2y(t^2+e^{-y^2})e^{-y^2}|\\ &\leq \text{máx}|2t|+\text{máx}|2ye^{-y^2}|\times\text{máx}(t^2+e^{-y^2})\\ &=2+2\sqrt{2/e}=2\left(1+\sqrt{2/e}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede tomar $D = 2(1 + \sqrt{2/e})$ y, como consecuencia, se tiene

$$|y(t_k)-y_k| \leq \frac{2\left(1+\sqrt{2/e}\right)h\left[e^{\sqrt{2/e}}-1\right]}{2\sqrt{2/e}}.$$

Esto implica que el incremento h debe ser menor que

$$\frac{\sqrt{2/e}}{1+\sqrt{2/e}} \times \frac{0.0001}{e^{\sqrt{2/e}}-1}.$$

Los Ejemplos 1 y 2 muestran que el método de Euler no es muy preciso, ya que se requieren aproximadamente 20 000 iteraciones para lograr una precisión de cuatro cifras decimales. La desventaja obvia de un método que requiere tantas iteraciones es el costo. Los precios actuales del uso de la computadora son de alrededor de 1200.00 dólares por hora. Una segunda desventaja aún más seria es que y_k puede estar muy lejos de $y(t_k)$ si N es demasiado grande. De hecho, una computadora digital no puede realizar los cálculos con precisión, ya que conserva solamente un número finito de cifras decimales. Por lo tanto, cada vez que se realiza una operación aritmética en la computadora hay que introducir un error de "redondeo". Por supuesto que tal error es pequeño. Sin embargo, si se realizan muchas operaciones entonces el error de redondeo acumulado puede ser tan grande que los resultados obtenidos sean inservibles. El Ejercicio 8 muestra un ejemplo de esto para la aplicación del método de Euler.

EJERCICIOS

1. Determine una cota superior para el error que se comete al usar el método de Euler con un incremento h, con objeto de encontrar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+y^2}{2}, \qquad y(0)=1$$

en cualquier punto del intervalo [0, 2/5]. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

2. Determine una cota superior para el error que se comete al usar el método de Euler en un incremento h para encontrar un valor aproximado de la solución del valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=t-y^4, \qquad y(0)=0$$

en cualquier punto t del intervalo [0, 1]. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \leq t \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

3. Halle una cota superior para el error que se comete al usar el método de Euler con un incremento h, a fin de encontrar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=t+e^y, \qquad y(0)=0$$

en cualquier punto t en el intervalo $[0,\ 1/(e+1)]$. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \leq t \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

4. Halle un valor adecuado de h, de modo que el error que se comete al usar el método de Euler con incremento h para obtener un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=e^t-y^2, \qquad y(0)=0$$

en cualquier punto t en el intervalo $[0,\ 1/e]$ sea, a lo más, 0.0001. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \leq t \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

5. Determine un valor adecuado de h, de modo que el error que se comete al usar el método de Euler con un incremento h para encontrar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=t^2+\tan^2 y, \qquad y(0)=0$$

en cualquier punto t en el intervalo [0, ½] sea, a lo más, 0.00001. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \leq t \leq ½$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$.

6. Determine un valor adecuado de h, de modo que el error que se comete al usar el método de Euler con un incremento h para hallar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2+y^2}, \qquad y(0)=0$$

en cualquier punto t en el intervalo [0, 1] sea a lo sumo 0.0001. *Sugerencia:* Tómese R como el rectángulo $0 \le t \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

7. Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y), \qquad y(0)=0.$$

Suponga que $|f(t, y)| \le 1$, $|\partial f/\partial y| \le 1$ y $|\partial f/\partial t) + f(\partial f/\partial y)| \le 2$ en el rectángulo $0 \le t \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Al usar la fórmula de Euler

$$y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k), \qquad h=\frac{1}{N}$$

con $N = 10$, el valor de y_5 es $-0.15\left[\left(\frac{11}{10}\right)^5-1\right]$, y el valor de y_6 es $0.12\left[\left(\frac{11}{10}\right)^6-1\right]$. Demuestre que $y(t)$ es cero, al menos una vez, en el intervalo (½, 3/5).

8. Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$y'=f(t,y), \qquad y(t_0)=y_0.$$

La fórmula de Euler para encontrar valores aproximados de $y(t)$ es $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$. Sin embargo, la cantidad $y_k + hf(t_k, y_k)$ nunca se calcula exactamente; siempre se introduce un error ε_k con $|\varepsilon_k| < \varepsilon$. Es decir, la computadora calcula números $y_1, y_2, \ldots,$ tales que

$$\tilde{y}_{k+1}=\tilde{y}_k+hf(t_k,\tilde{y}_k)+\varepsilon_k$$

con $y_0 = y_0$. Suponga que $|\partial f/\partial y| \le L$ y $|(\partial f/\partial t) + f(\partial f/\partial y)| \le D$ para toda t e y.

(a) Demuestre que

$$E_{k+1}\equiv|y(t_{k+1})-\tilde{y}_{k+1}|\leqslant(1+hL)E_k+\frac{D}{2}h^2+\varepsilon$$

(b) Concluya de (a) que

$$E_k\leqslant\left[\frac{Dh}{2}+\frac{\varepsilon}{h}\right]\frac{e^{\alpha L}-1}{L}$$

para $kh \le \alpha$.

(c) Elija h de modo que se minimice el error E_k. Nótese que el error E_k puede ser muy grande si h es muy pequeño.

9. Sea $y_1, y_2, \ldots,$ tales que satisfacen la relación de recurrencia

$$y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k).$$

Sea R el rectángulo $t_0 \le t \le t_0 + a$, $y_0 - b \le y \le y_0 + b$ y suponga que $|f(t, y)| \le M$ para (t, y) en R. Por último haga $\alpha = \text{mín}\,(a, b/m)$.

(a) Demuestre que $|y_j - y_0| \le jhM$ siempre que $jh \le \alpha$. *Sugerencia:* Aplique inducción.

(b) Concluya de (a) que todos los puntos (t_j, y_j) están en R siempre que $j \le \alpha/h$

1.14 MÉTODO DE LOS TRES TÉRMINOS DE LA SERIE DE TAYLOR

El método de Euler se obtuvo truncando la serie de Taylor

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right](t_k, y(t_k)) + \ldots \tag{1}$$

después del segundo término. La manera más obvia de obtener mejores métodos de aproximación numérica es conservar más términos de la ecuación (1). Si se trunca la serie de Taylor después de tres términos se obtiene la siguiente fórmula

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right](t_k, y_k), \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{2}$$

con $y_0 = y(t_0)$.

La ecuación (2) se conoce como *método de los tres términos de la serie de Taylor*, el cual es obviamente más preciso que el método de Euler. Por lo tanto, se esperaría que, para h fija, los números y_k generados por la ecuación (2) fueran mejores aproximaciones de $y(t_k)$ que los números y_k generados por el método de Euler. De hecho, tal es el caso, pues se puede demostrar que $|y(t_k) = y_k|$ es proporcional a h^2, mientras que el error que se cometió al usar el método de Euler es sólo proporcional a h. La cantidad h^2 es mucho más pequeña que h si h es pequeña. Así pues, el método de los tres términos de la serie de Taylor constituye una notoria mejora sobre el método de Euler.

EJEMPLO 1 Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (y-t)^2, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Emplear el método de los tres términos de la serie de Taylor para calcular valores aproximados de $y(t)$ en los puntos $t_k = k/N$, $k = 1, \ldots, N$.

SOLUCIÓN. Sea $f(t, y) = 1 + (y - t)^2$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-t) + 2(y-t)\left[1 + (y-t)^2\right] = 2(y-t)^3.$$

Así que la fórmula de los tres términos de la serie de Taylor es

$$y_{k+1} = y_k + h\left[1 + (y_k - t_k)^2\right] + h^2(y_k - t_k)^3$$

con $h = 1/N$ y $y_0 = ½$. El entero k toma valores de 0 a $N - 1$. A continuación, se dan ejemplos de programas en APL y Fortran para calcular $y_1, \ldots, y_N$. Una vez más, los programas tienen valores variables para t_0, y_0, a y N.

Programa en APL

```
     ∇ TAYLOR
[1]  T←Nρ0
[2]  Y←Nρ0
[3]  H←A÷N
[4]  T[1]←T0+H
[5]  D2Y←H×(Y0−T0)*3
[6]  Y[1]←Y0+H×D2Y+1+(Y0−T0)*2
[7]  K←1
[8]  T[K+1]←T[K]+H
[9]  D2Y←H×(Y[K]−T[K])*3
[10] Y[K+1]←Y[K]+H×D2Y+1+(Y[K]−T[K])*2
[11] K←K+1
[12] →8×ιK<N
[13] T←T0,T
[14] Y←Y0,Y
[15] ⍉(2,ρY)ρT,Y     ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la sección B del programa en Fortran en la Sección 1.13 por lo siguiente:

```
      T(1)=T0+H
      D2Y=H*(Y0−T0)**3
      Y(1)=Y0+H*(D2Y+1+(Y0−T0)**2)
      D020 K=2,N
      T(K)=T(K−1)+H
      D2Y=H*(Y(K−1)−T(K−1))**3
      Y(K)=Y(K−1)+H*(D2Y+1+(Y(K−1)−T(K−1))**2)
20    CONTINUE
```

La Tabla 1 muestra los resultados de estos cálculos para $a = 1$, $N = 10$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 0.05$.

TABLA 1.

t	y	t	y
0	0.5	0.6	1.31331931
0.1	0.62625	0.7	1.4678313
0.2	0.7554013	0.8	1.63131465
0.3	0.88796161	0.9	1.80616814
0.4	1.02456407	1	1.99572313
0.5	1.1660084		

El método de Euler con $N = 10$ predecía un valor de 1.9422 para $y(1)$. Nótese cuánto más cercano está el número 1.9957 al valor correcto 2. Si se corre este programa para

$N = 20$ y $N = 40$ se obtiene que $y_{20} = 1.99884247$ y $y_{40} = 1.99969915$. Estos números son también mucho más precisos que los valores 1.96852339 y 1.9835109 predichos por el método de Euler.

EJERCICIOS

Aplique el método de los tres términos de la serie de Taylor con $h = 0.1$ para determinar un valor aproximado de la solución en $t = 1$ en cada uno de los problemas de valor inicial 1 a 5. Repita los cálculos con $h = 0.025$ y compare los resultados con los valores dados de la solución.

1. $dy/dt = 1 + t - y, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
2. $dy/dt = 2ty, \quad y(0) = 2; \quad (y(t) = 2e^{t^2})$
3. $dy/dt = 1 + y^2 - t^2, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
4. $dy/dt = te^{-y} + t/(1 + t^2), \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = \ln(1 + t^2))$
5. $dy/dt = -1 + 2t + y^2/(1 + t^2)^2, \quad y(0) = 1; \quad (y(t) = 1 + t^2)$
6. Use el método de los tres términos de la serie de Taylor con $h = \pi/40$ para determinar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2\sec^2 t - (1 + y^2), \qquad y(0) = 0$$

en $t = \pi/4$. Repita los cálculos con $h = \pi/160$ y compare los resultados con el número 1, que es el valor de la solución $y(t) = \tan t$ en $t = \pi/4$.

1.15 MÉTODO DE EULER MODIFICADO

El método de los tres términos de la serie de Taylor es una notoria mejora sobre el método de Euler. Sin embargo, tiene la seria desventaja de requerir el cálculo de las derivadas parciales de $f(t, y)$ y esto puede ser difícil si la función $y(t, y)$ es muy complicada. Por esta razón, es deseable obtener métodos numéricos que no requieran calcular las derivadas parciales de $f(t, y)$. Un modo de abordar el problema es integrando en ambos lados de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ entre t_k y $t_k + h$, para obtener que

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + h} f(t, y(t))\, dt. \tag{1}$$

Esto reduce el problema de encontrar un valor aproximado de $y(t_{k+1})$ al problema más sencillo de aproximar el área bajo la curva $f(t, y(t))$ entre t_k y $t_k + h$. Una aproximación burda de tal área es $hf(t_k, y(t_k))$, que es el área del rectángulo R en la Figura 1a. Esto da origen a la fórmula numérica

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

que es, por supuesto, el método de Euler.

Una aproximación aún mejor de esta área es

$$\frac{h}{2}\left[f(t_k,y(t_k))+f(t_{k+1},y(t_{k+1}))\right]$$

que es la del trapecio T en la Figura 1b. Esto lleva a la siguiente fórmula numérica

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\left[f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y_{k+1})\right]. \tag{2}$$

Sin embargo, no es posible usar esta fórmula para determinar y_{k+1} a partir de y_k, ya que y_{k+1} también aparece en el lado derecho de (2). Una manera muy ingeniosa de salvar esta dificultad es sustituir y_{k+1} en el segundo miembro de (2) por el valor $y_k + hf(t_k, y_k)$ predicho por el método de Euler. Esto lleva al siguiente procedimiento numérico:

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\left[f(t_k,y_k)+f(t_k+h,y_k+hf(t_k,y_k))\right], \qquad y_0=y(t_0). \tag{3}$$

La ecuación (3) se conoce como *método de Euler modificado*. Se puede mostrar que $|y(t_k) - y_k|$ es a lo más una constante fija por h^2. Por lo tanto, con el método de Euler modificado se obtiene la misma precisión que con el de los tres términos de la serie de Taylor, y eso sin requerir del cálculo de las derivadas parciales.

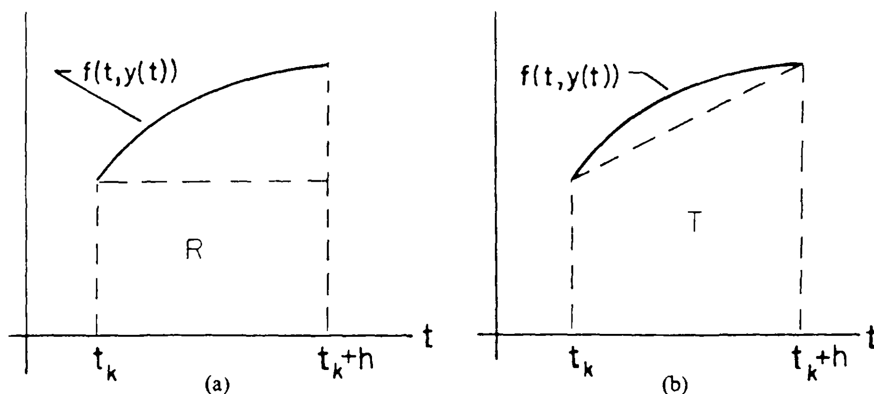


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=1+(y-t)^2, \qquad y(0)=\frac{1}{2}.$$

Usar el método de Euler modificado para obtener valores aproximados de $y(t)$ en los puntos $t_k = k/N$, $k = 1, \ldots, N$.

SOLUCIÓN. La fórmula para el método de Euler modificado de este problema es

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\left\{1+(y_k-t_k)^2+1+\left[y_k+h\left(1+(y_k-t_k)^2\right)-t_{k+1}\right]^2\right\}$$

con $h = 1/N$ y $y_0 = 0.05$. El entero k toma valores de 0 a $N - 1$. A continuación se

dan ejemplos de programas en APL y en Fortran para calcular $y_1, \ldots, y_N$. Una vez más, los programas consideran valores variables para t_0, y_0, a y N.

Programa en APL

```
     ∇ IMPROVED
[1]  T←Nρ0
[2]  Y←Nρ0
[3]  H←A÷N
[4]  T[1]←T0+H
[5]  R←1+(Y0−T0)*2
[6]  Y[1]←Y0+(H÷2)×R+1+(Y0+(H×R)−T[1])*2
[7]  K←1
[8]  T[K+1]←T[K]+H
[9]  R←1+(Y[K]−T[K])*2
[10] Y[K+1]←Y[K]+(H÷2)×R+1+(Y[K]+(H×R)−T[K+1])*2
[11] K←K+1
[12] →8×ιK<N
[13] T←T0,T
[14] Y←Y0,Y
[15] ⍉(2,ρY)ρT,Y     ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la sección B del programa en Fortran del Ejemplo 1 de la Sección 1.13 por las siguientes instrucciones

```
      T(1)=T0+H
      R=1+(Y0−T0)**2
      Y(1)=Y0+(H/2)*(R+1+(Y0+(H*R)−T(1))**2)
      DO 20 K=2,N
      T(K)=T(K−1)+H
      R=1+(Y(K−1)−T(K−1))**2
      Y(K)=Y(K−1)+(H/2)*(R+1+(Y(K−1)+(H*R)−T(K))**2)
20    CONTINUE
```

La Tabla 1 muestra los resultados de los cálculos con $a = 1$, $N = 10$, $t_0 = 0$ y $y_0 = 0.5$. Si se corre el programa con $N = 20$ y $N = 40$ se obtiene que $y_{20} = 1.99939944$ y $y_{40} = 1.99984675$. Por lo tanto, los valores y_{10}, y_{20} y y_{40} calculados con el método de Euler mejorado están aún más cerca del valor correcto 2 que los valores

TABLA 1.

t	y	t	y
0	0.5	0.6	1.31377361
0.1	0.62628125	0.7	1.46848715
0.2	0.75547445	0.8	1.63225727
0.3	0.88809117	0.9	1.80752701
0.4	1.02477002	1	1.99770114
0.5	1.16631867		

correspondientes 1.99572313, 1.99884246 y 1.99969915 calculados con el método de los tres términos de la serie de Taylor.

EJERCICIOS

Usando el método de Euler modificado con $h = 0.1$, determine un valor aproximado de la solución en $t = 1$ para cada uno de los problemas de valor inicial 1 a 5. Repita los cálculos con $h = 0.025$ y compare los resultados con el valor dado de la solución.

1. $dy/dt = 1 + t - y, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
2. $dy/dt = 2ty, \quad y(0) = 2; \quad (y(t) = 2e^{t^2})$
3. $dy/dt = 1 + y^2 - t^2, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
4. $dy/dt = te^{-y} + t/(1 + t^2), \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = \ln(1 + t^2))$
5. $dy/dt = -1 + 2t + y^2/(1 + t^2)^2, \quad y(0) = 1; \quad (y(t) = 1 + t^2)$
6. Aplique el método de Euler modificado con $h = \pi/40$ para determinar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2\sec^2 t - (1 + y^2), \qquad y(0) = 0$$

en $t = \pi/4$. Repita los cálculos con $h = \pi/160$ y compare los resultados con el número 1, que es el valor de la solución $y(t) = \tan t$ en $t = \pi/4$.

1.16 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

A continuación se presenta, sin demostraciones, un método numérico muy poderoso que fue desarrollado alrededor de 1900 por los matemáticos Runge y Kutta. Debido a su sencillez y gran precisión, el método de Runge-Kutta es uno de los procedimientos numéricos más ampliamente utilizados para resolver ecuaciones diferenciales. Está definido por la siguiente ecuación

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[L_{k,1} + 2L_{k,2} + 2L_{k,3} + L_{k,4}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

donde $y_0 = y(t_0)$, y

$$L_{k,1} = f(t_k, y_k), \qquad L_{k,2} = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hL_{k,1}\right)$$
$$L_{k,3} = f\left(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hL_{k,2}\right), \qquad L_{k,4} = f(t_k + h, y_k + hL_{k,3}).$$

En la fórmula se usa un promedio ponderado de los valores de $f(t, y)$ tomadas en diferentes puntos. Por lo tanto, la suma $1/6[L_{k,1} + 2L_{k,2} + 2L_{k,3} + L_{k,4}]$ puede interpretarse como una pendiente promedio. Es posible mostrar que el error $|y(t_k) - y_k|$ es a lo más una constante fija multiplicada por h^4. Así pues, el método de Runge-Kutta es mucho más preciso que el método de Euler, que el de los tres términos de la serie de Taylor y que el de Euler modificado.

EJEMPLO 1 Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (y - t)^2, \qquad y(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Aplicar el método de Runge-Kutta para encontrar valores aproximados $y_1, \ldots, y_N$ de y en los puntos $t_k = k/N$, $k = 1, \ldots, N$.

SOLUCIÓN. A continuación se dan ejemplos de programas en APL y en Fortran para calcular $y_1, \ldots, y_N$ con el método de Runge-Kutta. Los programas difieren de los anteriores en el hecho de que no evalúan y_1 por separado, sino que la calculan en el mismo ciclo en el que determinan $y_2, \ldots, y_N$. Esto se logra denominando los números t_0 e y_0 como t_1 e y_1, respectivamente.

Programa en APL

```
     ∇ RUNKUT
[1]  T←,T0
[2]  Y←,Y0
[3]  H←A÷N
[4]  K←1
[5]  T←T,T[K]+H
[6]  LK1←1+(Y[K]−T[K])*2
[7]  LK2←1+(Y[K]+(H×LK1÷2)−T[K]+H÷2)*2
[8]  LK3←1+(Y[K]+(H×LK2÷2)−T[K]+H÷2)*2
[9]  LK4←1+(Y[K]+(H×LK3)−T[K]+H)*2
[10] Y←Y,Y[K]+(H÷6)×LK1+LK4+2×LK2+LK3
[11] K←K+1
[12] →5×⍳K≤N
[13] ⍉(2,⍴Y)⍴T,Y   ∇
```

Programa en Fortran

```
      DIMENSION T(1000),Y(1000)
      READ (5,10) T(1),Y(1),A,N
10    FORMAT (3F20.8,I5)
      H=A/N
      DO 20 K=1,N
      T(K+1)=T(K)+H
      REAL LK1, LK2, LK3, LK4
      LK1=1+(Y(K)−T(K))**2
      LK2=1+((Y(K)+(H/2)*LK1)−(T(K)+H/2))**2
      LK3=1+((Y(K)+(H/2)*LK2)−(T(K)+H/2))**2
      LK4=1+((Y(K)+H*LK3)−(T(K)+H))**2
      Y(K+1)=Y(K)+(H/6)*(LK1+LK4+2*(LK2+LK3))
20    CONTINUE
      NA=N+1
      WRITE (6,30) (T(J),Y(J),J=1,NA)
30    FORMAT (1H1,3X,1HT,4X,1HY,/(1H,1X,F10.7,2X,F20.9/))
      CALL EXIT
      END
```

La Tabla 1 muestra los resultados de los cálculos con $a = 1$, $N = 10$, $t_0 = 0$ y $y_0 = 0.5$.

TABLA 1.

t	y	t	y
0	0.5	0.6	1.31428555
0.1	0.62631578	0.7	1.4692305
0.2	0.75555536	0.8	1.6333329
0.3	0.88823526	0.9	1.8090902
0.4	1.02499993	1	1.9999988
0.5	1.16666656		

Nótese cuánto más cerca del valor correcto 2 está el número $y_{10} = 1.9999988$ calculado por el método de Runge-Kutta, que los números $y_{10} = 1.94220484$, $y_{10} = 1.99572312$ y $y_{10} = 1.99770114$ evaluados con el método de Euler, con el de los tres términos de la serie de Taylor y con el de Euler modificado, respectivamente. Si se corre este programa con $N = 20$ y $N = 40$ se obtiene que $y_{20} = 1.99999992$ y $y_{40} = 2$. Así pues, la aproximación de $y(1)$ ya es correcta a ocho cifras decimales cuando $h = 0.025$. De manera equivalente, sólo se necesita elegir $N \geq 40$ para obtener una precisión de ocho decimales.

Para captar la precisión de los diversos métodos en la perspectiva correcta, se puede decir que se tienen tres procedimientos numéricos para resolver el problema de valor inicial $dy/dt = f(t, y)$, $y(0) = 0$ en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, y que el error que se comete al usar dichos métodos es $3h$, $11h^2$ y $42h^4$, respectivamente. Si el problema es tal que se requieren ocho cifras decimales de precisión, entonces los incrementos h_1, h_2 y h_3 para los distintos métodos deben satisfacer las desigualdades $3h_1 \leq 10^{-8}$, $11h_2^2 \leq 10^{-8}$ y $42h_3^4 \leq 10^{-8}$. Por lo tanto, el número de iteraciones N_1, N_2 y N_3 para los diferentes procedimientos debe satisfacer las desigualdades

$$N_1 \geqslant 3 \times 10^8 = 300{,}000{,}000, \qquad N_2 \geqslant \sqrt{11} \times 10^4 \approx 34{,}000$$

y

$$N_3 \geqslant (42)^{1/4} \times 10^2 \approx 260.$$

Este es un ejemplo impresionante de la diferencia que hay entre el método de Runge-Kutta y el de Euler, el de Euler modificado y el de los tres términos de la serie de Taylor.

OBSERVACIÓN. Nótese que en cada paso del método de Runge-Kutta se realizan cuatro evaluaciones funcionales, mientras que en cada paso del método de Euler se realiza solamente una evaluación. Sin embargo, el método de Runge-Kutta supera claramente al de Euler, al de Euler modificado y al de los tres términos de la serie de Taylor.

EJERCICIOS

Utilice el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ para determinar un valor aproximado de la solución en $t = 1$ para cada uno de los problemas de valor inicial 1 a 5. Repita los cálculos con $h = 0.025$ y compare los resultados con el valor dado de la solución.

1. $dy/dt = 1 + t - y, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
2. $dy/dt = 2ty, \quad y(0) = 2; \quad (y(t) = 2e^{t^2})$
3. $dy/dt = 1 + y^2 - t^2, \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = t)$
4. $dy/dt = te^{-y} + t/(1+t^2), \quad y(0) = 0; \quad (y(t) = \ln(1+t^2))$
5. $dy/dt = -1 + 2t + y^2/((1+t^2)^2), \quad y(0) = 1; \quad (y(t) = 1 + t^2)$
6. Use el método de Runge-Kutta con $h = \pi/40$ para determinar un valor aproximado de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2\sec^2 t - (1 + y^2), \qquad y(0) = 0$$

en $t = \pi/4$. Repita los cálculos con $h = \pi/160$ y compare los resultados con el número 1, que es el valor de la solución $y(t) = \tan t$ en $t = \pi/4$.

1.17 QUÉ HACER EN LA PRÁCTICA

En esta sección se analizan algunos problemas prácticos que surgen cuando se intenta resolver ecuaciones diferenciales en computadora. Primero y sobre todo está la estimación del error que se comete. No es muy difícil señalar que el error que se cometió al usar el método de Euler, el de los tres términos de la serie de Taylor, el de Euler modificado y el de Runge-Kutta con incremento h es, a lo más, c_1h, c_2h^2, c_3h^2 y c_4h^4, respectivamente. Sin embargo, con una excepción, es prácticamente imposible determinar las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4. La excepción es el método de Euler donde puede calcularse de modo explícito el error cometido al aproximar $y(t_k)$ con y_k (Sección 1.13). Sin embargo, la estimación no es muy útil ya que sólo es válida para t_k suficientemente cercana a t_0, y normalmente uno se interesa por valores de y en tiempos t bastante mayores que t_0. Así pues, por lo general no se sabe de antemano qué tan pequeño hay que elegir el incremento h para lograr la precisión buscada. Lo único que se sabe es que los valores aproximados y_k que se calculan tienden a $y(t_k)$ conforme h se hace más pequeña.

Una manera de resolver el problema es la siguiente: Usando uno de los métodos de la sección anterior se elige un incremento h y se calculan números $y_1, \ldots, y_N$. Después se repiten los cálculos con un incremento $h/2$, y se comparan los resultados. Si los cambios son mayores que lo que se está dispuesto a aceptar, entonces se necesita un incremento menor. Este procedimiento continúa hasta alcanzar la precisión deseada. Por ejemplo, supóngase que se busca la solución del problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$ en $t = 1$ con precisión de cuatro cifras decimales. Se elige un incremento $h = 1/100$ y se calcula $y_1, \ldots, y_{100}$. Después se repiten los cálculos con $h = 1/200$ y se obtienen nuevas aproximaciones $z_1, \ldots, z_{200}$. Si y_{100} y z_{200} coinciden en sus primeras cuatro cifras decimales, entonces se toma z_{200} como aproximación de $y(1)$*.

* Esto no garantiza que z_{200} coincida con $y(1)$ a cuatro cifras decimales. Como precaución adicional se podría dividir este incremento nuevamente entre 2. Si las primeras cuatro cifras decimales permanecen igual, entonces es razonable suponer que z_{200} coincide con $y(1)$ en cuatro cifras decimales.

Si y_{100} y z_{200} no coinciden en sus cuatro primeras cifras decimales, se repiten entonces los cálculos con un incremento $h = 1/400$.

EJEMPLO 1 Obtener la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt}=y(1+e^{-y})+e^{t}, \qquad y(0)=0$$

en $t = 1$ con una precisión de cuatro cifras decimales.

SOLUCIÓN. Se ilustrará cómo plantear y resolver el problema con el método de Euler, con el de los tres términos de la serie de Taylor, con el de Euler modificado y con el método de Runge-Kutta.

i. *Método de Euler.*

Programa en APL

```
     ∇ EULER
[1]  T←,T0
[2]  Y←,Y0
[3]  H←A÷N
[4]  K←1
[5]  T←T,T[K]+H
[6]  Y←Y,Y[K]+H×(Y[K]×1+*−Y[K])+*T[K]
[7]  K←K+1
[8]  →5×ιK<N
[9]  N,H,Y[N+1]   ∇
```

Programa en Fortran

```
Sección A               |     |   | DIMENSION T(1000), Y(1000)
Lectura de los Datos    |     |   | READ (5,10) T(1),Y(1),A,N,
                        | 10  |   | FORMAT (3F20.8,I5)
                        |     |   | H=A/N

Sección B               |     |   | DO20 K=1,N
Cálculos                |     |   | T(K+1)=T(K)+H
                        |     |   | Y(K+1)=Y(K)+H*(Y(K)*(1+EXP(−Y(K)))
                        |     | 1 |          +EXP(T(K)))
                        | 20  |   | CONTINUE

Sección C               |     |   | WRITE (6,30) N,H,Y(N+1)
Impresión de            | 30  |   | FORMAT (1H,1X,I5,2X,F10.7,4X,F20.9)
los resultados          |     |   | CALL EXIT
                        |     |   | END
```

Se tomó $A = 1$, $T0 = 0$, $Y0 = 0$ (en el programa en Fortran, $T(1) = Y(1) = 0$) y se corrieron los programas para $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320$ y 640. Los resultados de los cálculos aparecen en la Tabla 1. Nótese que incluso con un incremento h tan peque-

TABLA 1.

N	h	y_N
10	0.1	2.76183168
20	0.05	2.93832741
40	0.025	3.03202759
80	0.0125	3.08034440
160	0.00625	3.10488352
320	0.003125	3.11725009
640	0.0015625	3.12345786

ño como 1/640, puede garantizarse precisión solamente en la primera cifra decimal. Esto subraya las limitaciones del método de Euler. Como N es demasiado grande, es recomendable usar un método más preciso en vez de continuar con el método de Euler con incrementos cada vez menores.

ii) *Método de los tres términos de la serie de Taylor.*

Programa en APL

```
      ∇ TAYLOR
[1]   T←T0
[2]   Y←,Y0
[3]   H←A÷N
[4]   K←1
[5]   T←T,T[K]+H
[6]   DY1←1+(1−Y[K])×*−Y[K]
[7]   DY2←(Y[K]×1+*−Y[K])+*T[K]
[8]   Y←Y,Y[K]+(H×DY2)+(H×H÷2)×(*T[K])+DY1×DY2
[9]   K←K+1
[10]  →5×ιK≤N
[11]  N,H,Y[N+1]  ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la Sección B del programa en Fortran anterior por las siguientes instrucciones

```
      DO20 K=1,N
      T(K+1)=T(K)+H
      DY1=1+(1−Y(K))*EXP(−Y(K))
      DY2=Y(K)*(1+EXP(−Y(K)))+EXP(T(K))
      Y(K+1)=Y(K)+H*DY2+(H*H/2)*(EXP(T(K))+DY1*DY2)
   20 CONTINUE
```

Se tomó $A = 1$, $T0 = 0$ y $Y0 = 0$ (en el programa en Fortran, $T(1) = 0$, y $Y(1) = 0$), y se corrieron los programas para $N = 10, 20, 40, 60, 80, 160, 320$. Los resultados de los cálculos se muestran en la Tabla 2. Obsérvese que y_{160} y y_{320} coinciden en sus primeras cuatro cifras decimales. Por lo tanto, la aproximación $y(1) = 3.12966689$ es correcta con cuatro cifras decimales.

TABLA 2.

N	h	y_N
10	0.1	3.11727674
20	0.05	3.12645293
40	0.025	3.12885845
80	0.0125	3.12947408
160	0.00625	3.12962979
320	0.003125	3.12966689

iii) *Método de Euler modificado.*

Programa en APL

```
      ∇ IMPROVED
 [1]  T←,T0
 [2]  Y←,Y0
 [3]  H←A÷N
 [4]  K←1
 [5]  T←T,T[K]+H
 [6]  R←H×(Y[K]×1+*−Y[K])+*T[K]
 [7]  Y←Y,Y[K]+(÷2)×R+H×((Y[K]+R)×1+*−Y[K]+R)+*T[K+1]
 [8]  K←K+1
 [9]  →5×ιK<N
[10]  N,H,Y[N+1]  ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la Sección B del primer programa en Fortran de esta sección por las siguientes instrucciones

```
      DO20 K=1,N
      T(K+1)=T(K)+H
      R1=Y(K)*(1+EXP(−Y(K)))+EXP(T(K))
      R2=(Y(K)+H*R1)*(1+EXP(−(Y(K)+H*R1)))+EXP(T(K+1))
      Y(K+1)=Y(K)+(H/2)*(R1+R2)
 20   CONTINUE
```

TABLA 3.

N	h	y_N
10	0.1	3.11450908
20	0.05	3.12560685
40	0.025	3.1286243
80	0.0125	3.12941247
160	0.00625	3.12961399
320	0.003125	3.12964943

Se tomó $A = 1$, $T0 = 0$ y $Y0 = 0$ (en el programa en Fortran, $T(1) = 0$ y $Y(1) = 0$), y se corrieron los programas para $N = 10$, 20, 40, 80, 160 y 320. Los resultados de los cálculos aparecen en la Tabla 3. Obsérvese que y_{160} y y_{320} coinciden en las primeras cuatro cifras decimales. Por lo tanto, la aproximación $y(1) = 3.12964943$ es correcta con cuatro cifras decimales.

iv) *Método de Runge-Kutta.*

Programa en APL

```
     ∇ RUNKUT
[1]  T←,T0
[2]  Y←,Y0
[3]  H←A÷N
[4]  K←1
[5]  T←T,T[K]+H
[6]  LK1←(Y[K]×1+*−Y[K])+*T[K]
[7]  LK2←((Y[K]+(H÷2)×LK1)×1+*−Y[K]+(H÷2)×LK1)+*T[K]+
     H÷2
[8]  LK3←((Y[K]+(H÷2)×LK2)×1+*−Y[K]+(H÷2)×LK2)+*T[K]+
     H÷2
[9]  LK4←((Y[K]+H×LK3)×1+*−Y[K]+H×LK3)+*T[K]+H
[10] Y←Y,Y[K]+(H÷6)×LK1+LK4+2×LK2+LK3
[11] K←K+1
[12] →5×ιK<N
[13] N,H,Y[N+1]  ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la Sección B del primer programa en Fortran de esta sección por las siguientes instrucciones

```
      DO20 K=1,N
      T(K+1)=T(K)+H
      LK1=Y(K)*(1+EXP(-Y(K))+EXP(T(K))
      LK2=(Y(K)+(H/2)*LK1)*(1+EXP(-(Y(K)+(H/2)*LK1)))
     1 +EXP(T(K)+(H/2))
      LK3=(Y(K)+(H/2)*LK2)*(1+EXP(-(Y(K)+(H/2)*LK2)))
     1 +EXP(T(K)+(H/2))
      LK4=(Y(K)+H*LK3)*(1+EXP(-(Y(K)+H*LK3)))
     1 +EXP(T(K+1))
20    Y(K+1)=Y(K)+(H/6)*(LK1+2*LK2+2*LK3+LK4)
      CONTINUE
```

Se tomó $A = 1$, $T0 = 0$ y $Y0 = 0$ (en el programa en Fortran, $T(1) = 0$ y $Y(1) = 0$), y se corrieron los programas para $N = 10$, 20, 40, 80, 160 y 320. Los resultados de los cálculos se muestran en la Tabla 4. Nótese que la aproximación de $y(1)$ ya es correcta con cuatro cifras decimales con $h = 0.1$, y que es correcta con ocho cifras decimales

con $h = 0.00625$ ($N = 160$). Este ejemplo ilustra una vez más la fuerza del método de Runge-Kutta.

TABLA 4.

N	h	y_N
10	0.1	3.1296517
20	0.05	3.12967998
40	0.025	3.1296819
80	0.0125	3.12968203
160	0.00625	3.12968204
320	0.003125	3.12968204

La sección concluye con dos ejemplos que ilustran algunas dificultades adicionales que surgen al resolver problemas de valor inicial en computadoras digitales.

EJEMPLO 2 Usar el método de Runge-Kutta para obtener valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1$$

en los puntos $t_k = k/N$, $k = 1, \ldots, N$.

SOLUCIÓN.

Programa en APL

```
     ∇ RUNKUT
[1]  T←,T0
[2]  Y←,Y0
[3]  H←A÷N
[4]  K←1
[5]  T←T,T[K]+H
[6]  LK1←(T[K]*2)+Y[K]*2
[7]  LK2←((T[K]+H÷2)*2)+(Y[K]+H×LK1÷2)*2
[8]  LK3←((T[K]+H÷2)*2)+(Y[K]+H×LK2÷2)*2
[9]  LK4←((T[K]+H)*2)+(Y[K]+H×LK3)*2
[10] Y←Y,Y[K]+(H÷6)×LK1+LK4+2×LK2+LK3
[11] K←K+1
[12] →5×ιK<N
[13] ⍉(2,ρY)ρT,Y  ∇
```

Programa en Fortran

Sustituir la Secciones B y C del primer programa en Fortran de esta sección por las siguientes instrucciones:

Sección B
Cálculos

```
      DO20 K=1,N
      T(K+1)=T(K)+H
      LK1=T(K)**2+Y(K)**2
      LK2=(T(K)+(H/2))**2+(Y(K)+(H/2)*LK1)**2
      LK3=(T(K)+(H/2))**2+(Y(K)+(H/2)*LK2)**2
      LK4=(T(K)+H)**2+(Y(K)+H*LK3)**2
      Y(K+1)=Y(K)+(H/6)*(LK1+2*LK2+2*LK3+LK4)
20    CONTINUE
```

Sección C
Impresión de los resultados

```
      NA=N+1
      WRITE (6,30) (T(J),Y(J),J=1,NA)
30    FORMAT (1H1,3X,1HT,4X,1HY/(1H,1X,F9.7,
     1 2X,F20.9/))
      CALL EXIT
      END
```

Se trató de correr los programas con $A = 1$, $T0 = 0$, $Y0 = 1$ (en el programa en Fortran $T(1) = 0$ y $Y(1) = 1$) y $N = 10$, pero se recibió un mensaje de error consistente en que los números calculados excedían el dominio de la computadora. Es decir, eran mayores de 10^{38}. Esto indica que la solución $y(t)$ tiende a infinito para algún valor en el intervalo $[0, 1]$. Esto puede demostrarse analíticamente e incluso es posible obtener, con un artificio ingenioso, una estimación de dónde $y(t)$ tiende a infinito. Obsérvese que para $0 \leq t \leq 1$, $y(t)$ nunca es menor que la solución $\phi_1(t) = 1/(1-t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Además, $y(t)$ nunca es mayor que la solución $\phi_2(t) = \tan(t + \pi/4)$ del problema de valor inicial $dy/dt = 1 + y^2$, $y(0) = 1$. Por lo tanto, para $0 \leq t \leq 1$ se tiene

$$\frac{1}{1-t} \leqslant y(t) \leqslant \tan(t + \pi/4).$$

Esta situación se describe gráficamente en la Figura 1. Como $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ tienden a infinito en $t = 1$ y $t = \pi/4$, respectivamente, se concluye que $y(t)$ tiende a infinito en algún punto entre $\pi/4$ y 1.

Las soluciones de la mayoría de los problemas de valor inicial que surgen en las aplicaciones de la física y de la biología existen para todo tiempo futuro. Así pues, no es necesario preocuparse demasiado del problema de las soluciones que tienden a infinito en tiempo finito o del problema de soluciones que son excesivamente grandes. Sin embargo, hay algunos casos en economía en los que el problema es de importancia crucial. En esos casos, se desea con frecuencia determinar si ciertas ecuaciones diferenciales pueden modelar con precisión un fenómeno económico dado. A menudo, es posible eliminar algunas de estas ecuaciones, demostrando que permiten soluciones que son demasiado grandes para ser reales.

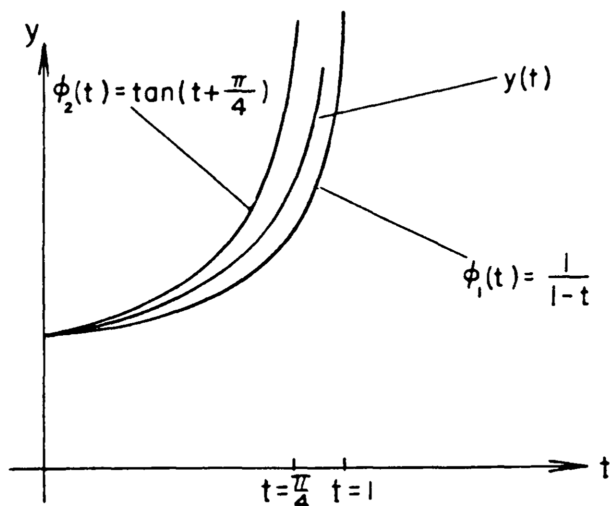


FIGURA 1.

EJEMPLO 3 Utilizar el método de Euler para determinar valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y|y|^{-3/4} + t\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{t}, \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

en los puntos $1/N, 2/N, \ldots, 2$.

SOLUCIÓN. La programación de este problema se simplifica mucho si se observa que

$$y|y|^{-3/4} = (\mathrm{sgn}\, y)|y|^{1/4}, \quad \text{donde} \quad \mathrm{sgn}\, y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

Programa en APL

```
      ∇ EULER
[1]   T←Nρ0
[2]   Y←Nρ0
[3]   H←2÷N
[4]   T[1]←H
[5]   K←1
[6]   T[K+1]←T[K]+H
[7]   Y[K+1]←Y[K]+H×((×Y[K])×(|Y[K])*0.25)+T[K]×1○○÷T[K]
[8]   K←K+1
[9]   →6×ιK<N
[10]  T←0,T
[11]  Y←0,Y
[12]  ⍉(2,ρY)ρT,Y  ∇
```

Programa en Fortran

```
      DIMENSION T(1000),Y(1000)
      READ (5,10) N
10    FORMAT (I5)
      H=2/N
      T(1)=H
      Y(1)=0
      DO20 K=2,N
      T(K)=T(K-1)+H
      Y(K)=Y(K-1)+H*(SIGN(Y(K-1)**0.25,Y(K-1))+T(K-1)*
     1 SIN(3.141592654/T(K-1))
20    CONTINUE
      WRITE(6,30) 0,0,(T(J),Y(J),J=1,N)
30    FORMAT (1H1,3X,1HT,4X,1HY/(1H,1X,F10.7,2X,F20.9/))
      CALL EXIT
      END
```

Tomando $N = 25$ se obtuvo el valor 2.4844172 para $y(2)$, pero al tomar $N = 27$ se obtuvo el valor -0.50244575 para $y(2)$. Más aún, todos los valores fueron positivos para $N = 25$ y negativos para $N = 27$. Se repitieron los cálculos con $N = 89$ y $N = 91$, y se obtuvieron los valores 2.64286349 y -0.6318074, respectivamente. Además todas las y_k fueron de nuevo positivas para $N = 89$ y negativas para $N = 91$. De hecho, es posible, aunque más bien difícil, probar que todas las y_k son positivas si $N = 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$, y negativas si $N = 3, 7, 11, 15, \ldots$. Esto sugiere que la solución del problema de valor inicial (1) no es única. La afirmación no puede probarse analíticamente, ya que no es posible resolver la ecuación diferencial de modo explícito. Sin embargo, hay que notar que el teorema de existencia y unicidad de la Sección 1.10 no se aplica aquí ya que la derivada parcial de la función $|y|^{-3/4}y + t\,\mathrm{sen}\,\pi/t$ con respecto a y no existe en $y = 0$.

La mayoría de los problemas de valor inicial que surgen de las aplicaciones tienen solución única. Así pues, no es necesario preocuparse demasiado del problema de falta de unicidad de las soluciones. Sin embargo, hay que tener siempre en mente que los problemas de valor inicial que no cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de la Sección 1.10, pueden tener más de una solución, ya que elegir la solución errónea en uno de estos casos raros puede ser desastroso.

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas 1 a 5, encuentre la solución del problema de valor inicial dado en $t = 1$ con una precisión de cuatro cifras decimales.

1. $\dfrac{dy}{dt} = y + e^{-y} + 2t, \quad y(0) = 0$

2. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + y^2, \quad y(0) = 0$

3. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2 + y^2}{1 + t + y^2}, \quad y(0) = 0$

4. $\dfrac{dy}{dt} = e^t y^2 - 2y, \quad y(0) = 1$

5. $\dfrac{dy}{dt} = ty^3 - y, \quad y(0) = 1$

2 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

2.1 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LAS SOLUCIONES

Una ecuación diferencial de segundo orden es una ecuación del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right). \tag{1}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\operatorname{sen} t+3y+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

es una ecuación diferencial de segundo orden. Una función $y = y(t)$ es la solución de (1) si $y(t)$ satisface la ecuación diferencial, es decir,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=f\left(t,y(t),\frac{dy(t)}{dt}\right).$$

Así pues, la función $y(t) = \cos t$ es la solución de la ecuación de segundo orden $d^2y/dt^2 = -y$, ya que $d^2(\cos t)/dt^2 = -\cos t$.

En las aplicaciones surgen con frecuencia ecuaciones diferenciales de segundo orden. La ecuación diferencial de este tipo más famosa es la segunda ley de Newton del movimiento (véase la Sección 1.7)

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right)$$

la cual rige el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la influencia de una fuerza F. En esta ecuación, m es la masa de la partícula, $y = y(t)$ es su posición en el tiempo t, dy/dt es su velocidad, y F es la fuerza total que actúa sobre la partícula. Como ya la notación lo indica, la fuerza F puede depender de la posición y de la velocidad de la partícula, así como también del tiempo.

Además de la ecuación diferencial (1), con frecuencia se imponen también condiciones iniciales sobre $y(t)$ de tipo

$$y(t_0)=y_0, \qquad y'(t_0)=y'_0. \tag{1'}$$

La ecuación diferencial (1) junto con las condiciones iniciales (1′) se conoce como un problema de valor inicial. Por ejemplo, si $y(t)$* indica la posición en el tiempo t de una partícula que se mueve bajo la influencia de la gravedad, entonces $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g; \qquad y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y'_0,$$

donde y_0 es la posición inicial de la partícula y y'_0 es su velocidad inicial.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden son muy difíciles de resolver. Lo cual no debiera sorprender a nadie después de la experiencia adquirida con las ecuaciones de primer orden. Solamente se pueden resolver las ecuaciones diferenciales de la forma especial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=g(t). \tag{2}$$

Afortunadamente, muchas de las ecuaciones diferenciales que surgen en las aplicaciones son de este tipo.

La ecuación diferencial (2) se conoce como *ecuación diferencial lineal de segundo orden*. Esta ecuación se distingue con la denominación de *lineal* porque tanto y como dy/dt aparecen por separado. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3t\frac{dy}{dt}+(\operatorname{sen} t)y=e^t$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2}+e^t\frac{dy}{dt}+2y=1$$

son lineales, en tanto que las ecuaciones

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+\operatorname{sen} y=t^3$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1$$

son *no lineales*, debido a la presencia de los términos $\operatorname{sen} y$ y $(dy/dt)^2$, respectivamente.

* La dirección positiva de y se toma hacia arriba.

Primero se analizará la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0 \tag{3}$$

la cual se obtiene de (2) haciendo $g(t) = 0$. En este momento, ciertamente, no es fácil encontrar todas las soluciones de (3) o resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0; \qquad y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y_0'. \tag{4}$$

Por ello, antes de tratar de exponer cualquier procedimiento elaborado para resolver la ecuación (4), se necesita determinar primero si en efecto tiene solución. La información que se requiere está contenida en el siguiente teorema, cuya demostración se presentará en el Capítulo 4.

TEOREMA 1. (Teorema de Existencia y Unicidad). *Sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones continuas en el intervalo $\alpha < t < \beta$. Entonces existe una y solamente una función $y(t)$ que satisface la ecuación diferencial* (3) *en todo el intervalo $\alpha < t < \beta$ y las condiciones iniciales prescritas $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$. Concretamente, cualquier solución $y = y(t)$ de* (3) *que satisfaga $y(t_0) = 0$ y $y'(t_0) = 0$ en un $t = t_0$ debe ser idéntica a cero.*

El Teorema 1 es muy importante. Por una parte, constituye la "autorización" para ir en busca de la solución única $y(t)$ de (4). Por otra, el Teorema 4 también ayudará a encontrar todas las soluciones de (3).

El análisis de la ecuación (3) se inicia con la importante observación de que el lado izquierdo

$$y''+p(t)y'+q(t)y \qquad \left(y'=\frac{dy}{dt}, y''=\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

de la ecuación diferencial puede considerarse como la definición de "una función de función": a cada función y que tiene dos derivadas se le asocia otra función que se llama $L[y]$, por medio de la relación siguiente:

$$L[y](t)=y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t).$$

En términos matemáticos, L es un operador que actúa sobre funciones, es decir, hay una regla precisa que asocia a cada función y una nueva función $L[y]$.

EJEMPLO 1 Sea $p(t) = 0$ y $q(t) = t$. Entonces

$$L[y](t)=y''(t)+ty(t).$$

si $y(t) = \cos t$, entonces

$$L[y](t)=(\cos t)''+t\cos t=(t-1)\cos t,$$

y si $y(t) = t^3$, entonces

$$L[y](t)=(t^3)''+t(t^3)=t^4+6t.$$

Así pues, el operador L asigna la función $(t-1)\cos t$ a la función $\cos t$, y la función $6t + t^4$ a la función t^3.

El concepto de un operador que actúa sobre funciones o el de "función de una función" es análogo al de una función de una sola variable t. Recuérdese la definición de la función f en un intervalo I: donde a cada número t en I se le asocia un número llamado $f(t)$. De manera análoga, a cada función y que tenga dos derivadas se le asocia una nueva función llamada $L[y]$. Este es un concepto matemático muy complejo, ya que —en cierto sentido— se trata a la función exactamente como si fuera un punto. Evidentemente, ésto es difícil de entender. Por ello, no es extraño que el concepto de "función de función" haya sido formulado sólo hasta principios de este siglo, y que muchos de los "grandes y poderosos teoremas" del análisis matemático se hayan demostrado únicamente después de que surgió dicho concepto.

A continuación, se deducen varias propiedades importantes del operador L, las cuales se aplicarán a continuación.

$L[cy] = cL[y]$, para toda constante c.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} L[cy](t) &= (cy)''(t) + p(t)(cy)'(t) + q(t)(cy)(t) \\ &= cy''(t) + cp(t)y'(t) + cq(t)y(t) \\ &= c\left[y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)\right] \\ &= cL[y](t). \end{aligned}$$

□

El significado de la Propiedad 1 consiste en que el operador L asigna a la función (cy) la función que asigna a y multiplicada por c.

Por ejemplo, sea

$$L[y](t) = y''(t) + 6y'(t) - 2y(t).$$

Tal operador L asigna la función

$$(t^2)'' + 6(t^2)' - 2(t^2) = 2 + 12t - 2t^2$$

a la función t^2. Por lo tanto, L debe asignar la función $5(2 + 12t - 2t^2)$ a la función $5t^2$.

PROPIEDAD 2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} L[y_1 + y_2](t) &= (y_1 + y_2)''(t) + p(t)(y_1 + y_2)'(t) + q(t)(y_1 + y_2)(t) \\ &= y_1''(t) + y_2''(t) + p(t)y_1'(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_1(t) + q(t)y_2(t) \\ &= \left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right] + \left[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right] \\ &= L[y_1](t) + L[y_2](t). \end{aligned}$$

□

El significado de la Propiedad 2 consiste en que el operador L asigna a la función $y_1 + y_2$ la suma de las funciones asignadas a y_1 y a y_2. Por ejemplo, sea

$$L[y](t) = y''(t) + 2y'(t) - y(t).$$

El operador L asigna la función

$$(\cos t)'' + 2(\cos t)' - \cos t = -2\cos t - 2\operatorname{sen} t$$

a la función $\cos t$, y la función

$$(\operatorname{sen} t)'' + 2(\operatorname{sen} t)' - \operatorname{sen} t = 2\cos t - 2\operatorname{sen} t$$

a la función $\operatorname{sen} t$. Por lo tanto, L asigna la función

$$(-2\cos t - 2\operatorname{sen} t) + 2\cos t - 2\operatorname{sen} t = -4\operatorname{sen} t$$

a la función $\operatorname{sen} t + \cos t$.

DEFINICIÓN. Un operador L que asigna funciones a otras funciones y que satisface las Propiedades 1 y 2 se llama *operador lineal*. Todos los demás operadores son no lineales. Un ejemplo de un operador *no lineal* es

$$L[y](t) = y''(t) - 2t[y(t)]^4.$$

Este operador asigna la función

$$\left(\frac{1}{t}\right)'' - 2t\left(\frac{1}{t}\right)^4 = \frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^3} = 0$$

a la función $1/t$, y la función

$$\left(\frac{c}{t}\right)'' - 2t\left(\frac{c}{t}\right)^4 = \frac{2c}{t^3} - \frac{2c^4}{t^3} = \frac{2c(1-c^3)}{t^3}$$

a la función c/t. Por lo tanto, como $c \neq 0, 1$, y $y(t) = 1/t$, puede verse que $L[cy] \neq cL[y]$.

La utilidad de las Propiedades 1 y 2 se basa en la observación de que las soluciones $y(t)$ de la ecuación diferencial (3) son exactamente las funciones y para las cuales se cumple

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

En otras palabras, las soluciones $y(t)$ de (3) son exactamente las funciones y a las que el operador L asigna la función cero*. Por lo tanto, si $y(t)$ es una solución de (3), entonces $cy(t)$ también lo es, ya que

$$L[cy](t) = cL[y](t) = 0.$$

Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones de (3), entonces $y_1(t) + y_2(t)$ también es una solución de (3), ya que

$$L[y_1 + y_2](t) = L[y_1](t) + L[y_2](t) = 0 + 0 = 0.$$

* La función cero es la función cuyo valor en todo tiempo t es cero.

Al combinar las Propiedades 1 y 2, se ve que todas las combinaciones lineales

$$c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$$

de las soluciones de (3) son también soluciones de (3).

El razonamiento anterior muestra que pueden utilizarse las dos soluciones conocidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de (3) para generar una infinidad de otras soluciones. Esta afirmación tiene algunas implicaciones muy interesantes. Considérese por ejemplo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0. \tag{5}$$

$y_1(t) = \cos t$, y $y_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ son dos soluciones de (5). Por lo tanto,

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t \tag{6}$$

es también una solución de (5) para dos constantes cualesquiera c_1 y c_2. Ahora bien, la ecuación (6) contiene dos constantes arbitrarias, por lo que es fácil suponer que la expresión (6) representa la solución general de (5), es decir, que toda solución $y(t)$ de (5) debe ser del tipo (6). De hecho, este es el caso, como se verá a continuación. Sea $y(t)$ cualquier solución de (5). Por el teorema de existencia y unicidad, $y(t)$ existe para toda t. Sea $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, y considérese la función

$$\phi(t)=y_0\cos t+y_0'\operatorname{sen} t.$$

Esta función es una solución de (5) ya que es una combinación lineal de las soluciones de (5). Además, $\phi(0) = y_0$ y $\phi'(0) = y_0'$. Así pues, $y(t)$ y $\phi(t)$ satisfacen la misma ecuación lineal homogénea de segundo orden y las mismas condiciones iniciales. Por lo tanto, por la parte que se refiere a la unicidad del Teorema 1, $y(t)$ debe ser idéntica a ϕ, de forma que

$$y(t)=y_0\cos t+y_0'\operatorname{sen} t.$$

Así pues, la ecuación (6) constituye, en realidad, la solución general de (5).

Ahora, volviendo a la ecuación lineal general (3), supóngase que de alguna manera se lograron encontrar dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de (3). Entonces cualquier función del tipo

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t) \tag{7}$$

es también una solución de (3). La pregunta es si la expresión (7) representa la solución general de (3). Es decir, si toda solución $y(t)$ de (3) tiene la forma (7). El siguiente teorema da la respuesta.

TEOREMA 2. *Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones de* (3) *en el intervalo $\alpha < t < \beta$, con*

$$y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)$$

diferente de cero en el mismo intervalo. Entonces,

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$$

es la solución general de (3).

DEMOSTRACIÓN. Sea $y(t)$ cualquier solución de (3). Se necesita encontrar las constantes c_1 y c_2 tales que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Para ello, elíjase un tiempo t_0 en el intervalo (α, β) y denótese por y_0 y y_0' a los valores de y y y' en $t = t_0$. Las constantes c_1 y c_2, si existen, deben satisfacer las dos ecuaciones siguientes:

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=y_0$$
$$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=y_0'.$$

Al multiplicar la primera ecuación por $y_2'(t_0)$, la segunda por $y_2(t_0)$ y restándolas luego se obtiene

$$c_1[y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)]=y_0y_2'(t_0)-y_0'y_2(t_0).$$

De manera similar, si se multiplica la primera ecuación por $y_1'(t_0)$, la segunda por $y_1(t_0)$ y se restan resulta

$$c_2[y_1'(t_0)y_2(t_0)-y_1(t_0)y_2'(t_0)]=y_0y_1'(t_0)-y_0'y_1(t_0).$$

Por lo tanto,

$$c_1=\frac{y_0y_2'(t_0)-y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

y

$$c_2=\frac{y_0'y_1(t_0)-y_0y_1'(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0)-y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

si $y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$. Ahora bien, sea

$$\phi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$$

para esta elección de las constantes c_1 y c_2. Se sabe que $\phi(t)$ satisface a (3) ya que es una combinación lineal de las soluciones de (3). Más aún, por construcción se tiene que $\phi(t_0) = y_0$ y $\phi'(t_0) = y_0'$. Así pues, $y(t)$ y $\phi(t)$ satisfacen la misma ecuación lineal homogénea de segundo orden y las mismas condiciones iniciales. Por lo tanto, por el enunciado de unicidad del Teorema 1, $y(t)$ debe ser idéntica a $\phi(t)$, es decir,

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t), \qquad \alpha<t<\beta. \qquad \square$$

El Teorema 2 es muy útil ya que reduce el problema de encontrar todas las soluciones de (3), que son una infinidad, al problema más sencillo de encontrar solamente dos soluciones $y_1(t)$, $y_2(t)$. La única condición que se impone a las soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ es que la cantidad $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ no sea igual a cero para $\alpha < t < \beta$. En este caso, se dice que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ constituyen un conjunto *fundamental* de soluciones de (3), ya que tódas las demás soluciones de (3) pueden obtenerse a partir de combinaciones lineales de $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

DEFINICIÓN. La cantidad $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ se denomina *wronskiano* de y_1 y y_2, y se denota por $W(t) = W[y_1, y_2](t)$.

El Teorema 2 requiere que $W[y_1, y_2](t)$ no sea igual a cero en todos los puntos del intervalo (α, β). De hecho, como se verá a continuación, el wronskiano de cualesquiera dos soluciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ de (3) es idéntico a cero o nunca igual a cero.

TEOREMA 3. *Sean $p(t)$ y $q(t)$ continuas en el intervalo $\alpha < t < \beta$, y sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones de (3). Entonces, $W[y_1, y_2](t)$ es idéntico a cero, o bien, nunca es igual a cero en el intervalo $\alpha < t < \beta$.*

El Teorema 3 se demostrará con la ayuda del lema siguiente.

LEMA 1. *Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones de la ecuación diferencial lineal $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Entonces, el wronskiano*

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

satisface la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$W' + p(t)W = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt}(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1''y_2 \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2. \end{aligned}$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, se sabe que

$$y_2'' = -p(t)y_2' - q(t)y_2$$

y

$$y_1'' = -p(t)y_1' - q(t)y_1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1[-p(t)y_2' - q(t)y_2] - y_2[-p(t)y_1' - q(t)y_1] \\ &= -p(t)[y_1y_2' - y_1'y_2] \\ &= -p(t)W(t). \end{aligned}$$ □

Ahora es posible presentar una demostración sencilla del Teorema 3.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3. Elíjase algún t_0 en el intervalo (α, β). Del Lema 1 se deduce que

$$W[y_1, y_2](t) = W[y_1, y_2](t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right).$$

Ahora bien, $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)$ es diferente de cero para $\alpha < t < \beta$. Por lo tanto, $W[y_1, y_2](t)$ es idéntico a cero o nunca igual a cero.

La situación más simple en la que el wronskiano de dos funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ es idéntico a cero se presenta cuando una de las dos funciones es idéntico a cero. De manera

más géneral, el wronskiano de dos funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$ es idéntica a cero si una de las funciones es un múltiplo de la otra. Por ejemplo, si $y_2 = cy_1$, entonces

$$W[y_1,y_2](t)=y_1(cy_1)'-y_1'(cy_1)=0.$$

Recíprocamente, supóngase que el wronskiano de dos *soluciones* $y_1(t)$, $y_2(t)$ de (3) es idéntico a cero. Entonces, una de las soluciones debe ser un múltiplo de la otra, como se verá a continuación.

TEOREMA 4. *Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones de (3) en el intervalo $\alpha < t < \beta$ y supóngase que $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ para alguna t_0 en el intervalo. Entonces una de las soluciones es un múltiplo de la otra.*

DEMOSTRACIÓN 1. Supóngase que $W[y_1, y_2](t_0) = 0$. Entonces, las ecuaciones

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0$$
$$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=0$$

tienen una solución no trivial c_1, c_2; es decir, una solución c_1, c_2 con $|c_1| + |c_2| \neq 0$. Sea $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ para esta elección de constantes c_1, c_2. Se sabe que $y(t)$ es una solución de (3), ya que es una combinación lineal de $y_1(t)$ y $y_2(t)$. Más aún, por construcción, $y(t_0) = 0$ y $y'(t_0) = 0$. Por lo tanto, por el Teorema 1, $y(t)$ es idéntico a cero, así que

$$c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=0, \qquad \alpha<t<\beta,$$

Si $c_1 \neq 0$, entonces $y_1(t) = -(c_2/c_1)y_2(t)$, y si $c_2 \neq 0$, entonces $y_2(t) = -(c_1/c_2)y_1(t)$. En cualquier caso, una de estas soluciones es un múltiplo constante de la otra.

DEMOSTRACIÓN 2. Supóngase que $W[y_1, y_2](t_0) = 0$. Entonces, por el Teorema 3 $W[y_1, y_2]$ es idéntico a cero. Supóngase que $y_1(t)y_2(t) \neq 0$ para $\alpha < t < \beta$. Entonces dividiendo ambos lados de la ecuación

$$y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=0$$

entre $y_1(t)y_2(t)$ se obtiene

$$\frac{y_2'(t)}{y_2(t)}-\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}=0.$$

Esta ecuación implica que $y_1(t) = cy_2(t)$ para una constante c.

Ahora supóngase que $y_1(t)y_2(t)$ es igual a cero en algún punto $t = t^*$ en el intervalo $\alpha < t < \beta$. Sin que haya problemas puede suponerse que $y_1(t^*) = 0$, ya que y_1 y y_2 pueden expresarse de otra manera. En ese caso se puede demostrar fácilmente (véase el Ejercicio 19) que $y_1(t) \equiv 0$, o bien $y_2(t) = [y_2'(t^*)/y_1'(t^*)]y_1(t)$. Con esto finaliza la demostración del Teorema 4. □

DEFINICIÓN. Se dice que las funciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son *linealmente dependientes* en el intervalo I si una de estas funciones es un múltiplo constante de la otra en I. Se dice que las funciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son linealmente independientes en el intervalo I si no son linealmente dependientes en I.

COROLARIO DEL TEOREMA 4. *Dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de (3) son linealmente independientes en el intervalo $\alpha < t < \beta$ si y sólo si el wronskiano no es igual a cero en el intervalo. Así pues, dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de (3) en el intervalo $\alpha < t < \beta$ si y solamente si son linealmente independientes en este intervalo.*

EJERCICIOS

1. Sea $L[y](t) = y''(t) - 3ty'(t) + 3y(t)$. Calcule
   (a) $L[e^t]$, (b) $L[\cos\sqrt{3}\,t]$, (c) $L[2e^t + 4\cos\sqrt{3}\,t]$,
   (d) $L[t^2]$, (e) $L[5t^2]$, (f) $L[t]$, (g) $L[t^2+3t]$.
2. Sea $L[y](t) = y''(t) = 6y'(t) + 5y(t)$. Calcule
   (a) $L[e^t]$, (b) $L[e^{2t}]$, (c) $L[e^{3t}]$, (d) $L[e^{rt}]$,
   (e) $L[t]$, (f) $L[t^2]$, (g) $L[t^2+2t]$.
3. Demuestre que el operador L definido por

$$L[y](t) = \int_a^t s^2 y(s)\,ds$$

   es lineal; es decir, $L[cy] = cL[y]$ y $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.
4. Sea $L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$, y suponga que $L[t^2] = t + 1$ y $L[t] = 2t + 2$. Demuestre que $y[t] = t - 2t^2$ es una solución de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.
5. (a) Demuestre que $y_1(t) = \sqrt{t}$ y $y_2(t) = 1/t$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0 \qquad (*)$$

   en el intervalo $0 < t < \infty$.
   (b) Evalúe $W[y_1, y_2]t$. ¿Qué ocurre cuando t tiende a cero?
   (c) Demuestre que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de (*) en el intervalo $0 < t < \infty$.
   (d) Resuelva el problema de valor inicial $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.
6. (a) Pruebe que $y_1(t) = e^{-t^2/2}$ y $y_2(t) = e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}\,ds$ son soluciones de

$$y'' + ty' + y = 0 \qquad (*)$$

   en el intervalo $-\infty < t < \infty$.
   (b) Evalúe $W[y_1, y_2](t)$.
   (c) Pruebe que y_1 y y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones de (*) en el intervalo $-\infty < t < \infty$.
   (d) Resuelva el problema de valor inicial $y'' + ty' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
7. Determine el wronskiano de los siguientes pares de funciones

   (a) $\operatorname{sen} at$, $\cos bt$ (b) $\operatorname{sen}^2 t$, $1 - \cos 2t$

(c) e_{at}, e^{bt} (d) e^{at}, te^{at} (e) t, $t\ nt$ (f) e^{at} sen bt, $e^{at}\cos bt$

8. Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ soluciones de (3) en el intervalo $-\infty < t < \infty$ con $y_1(0) = 3$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, y $y_2'(0) = \frac{1}{3}$. Demuestre que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son linealmente dependientes en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

9. (a) Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ soluciones de (3) en el intervalo $\alpha < t < \beta$, con $y_1(t_0) = 1$, $y_1'(t_0) = 0$, $y_2(t_0) = 0$, y $y_2'(t_0) = 1$. Demuestre que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones de (3) en el intervalo $\alpha < t < \beta$.
   (b) Demuestre que $y(t) = y_0 y_1(t) + y_0' y_2(t)$ es la solución de (3) que satisface $y(t_0) = y_0$, y $y'(t_0) = y_0'$.

10. Demuestre que $y(t) = t^2$ no puede ser una solución de (3) si las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son continuas en $t = 0$.

11. Sean $y_1(t) = t^2$, y $y_2(t) = t|t|$.
   (a) Pruebe que y_1 y y_2 son linealmente dependientes en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.
   (b) Pruebe que y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $-1 \leq t \leq 1$.
   (c) Demuestre que $W[y_1, y_2](t)$ es idéntico a cero.
   (d) Demuestre que y_1 y y_2 nunca pueden ser dos soluciones de (3) en el intervalo $-1 < t < 1$ si tanto p como q son continuas en dicho intervalo.

12. Supóngase que y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo I. Demuestre que $z_1 = y_1 + y_2$ y $z_2 = y_1 - y_2$ son también linealmente independientes en I.

13. Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación de Bessel

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

en el intervalo $0 < t < \infty$, con $y_1(1) = 1$, $y_1'(1) = 0$, $y_2(1) = 0$ y $y_2'(1) = 1$. Obtenga $W[y_1, y_2](t)$.

14. Suponga que el wronskiano de cualesquiera dos soluciones de (3) es constante con respecto al tiempo. Demuestre que $p(t) = 0$.

En los Problemas 15-18 suponga que p y q son continuas y que las funciones y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

en el intervalo $\alpha < t < \beta$.

15. Demuestre que si y_1 y y_2 se anulan en un mismo punto del intervalo $\alpha < t < \beta$; entonces no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones en dicho intervalo.

16. Demuestre que si y_1 y y_2 alcanzan un máximo o un mínimo en un mismo punto del intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces no pueden constituir un conjunto fundamental de soluciones en dicho intervalo.

17. Demuestre que si y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, entonces no pueden tener un punto de inflexión común en $\alpha < t < \beta$, a no ser que p y q se anulen simultáneamente en dicho punto.

18. Suponga que y_1 y y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Pruebe que hay un cero de y_1, y sólo uno, entre ceros consecutivos de y_2. *Sugerencia:* Derive la expresión y_2/y_1 y aplique el Teorema de Rolle.

19. Suponga que $W[y_1, y_2](t^*) = 0$, y además que $y_1(t^*) = 0$. Demuestre que, $y_1(t) \equiv 0$, o bien $y_2(t) = [y_2'(t^*)/y_1'(t^*)]y_1(t)$. *Sugerencia:* Si $W[y_1, y_2](t^*) = 0$ y $y_1(t^*) = 0$, entonces $y_2(t^*)y_1'(t^*) = 0$.

2.2 ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección se estudiarán ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

$$L[y] = a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0 \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. El Teorema 2 de la Sección 2.1 afirma que es necesario encontrar sólo dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de (1). Todas las demás soluciones de (1) se obtienen haciendo combinaciones lineales de y_1 y y_2. Desafortunadamente el Teorema 2 no dice cómo encontrar dos soluciones de (1). Por lo tanto, se intentará proponer algo sensato. Para ello, obsérvese que una función $y(t)$ es solución de (1) si una constante multiplicada por la segunda derivada más otra constante multiplicada por la primera derivada, más una tercera constante multiplicada por la propia función es idéntico a cero. En otras palabras, los tres términos ay'', by' y cy tienen que anularse entre sí. En general, esto sólo ocurre si las tres funciones $y(t)$, $y'(t)$ y $y''(t)$ son del "mismo tipo". Por ejemplo, la función $y(t) = t^5$ no puede ser solución de (1) pues los tres términos $20at^3$, $5bt^4$ y ct^5 son polinomios en t de distinto grado y por lo tanto no pueden cancelarse entre sí. Por otro lado, la función $y(t) = e^{rt}$, con r constante, tiene la propiedad de que tanto $y'(t)$ como $y''(t)$ son múltiplos de $y(t)$. Esto sugiere tomar $y(t) = e^{rt}$ como solución de (1). Al calcular

$$\begin{aligned} L[e^{rt}] &= a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + c(e^{rt}) \\ &= (ar^2 + br + c)e^{rt}, \end{aligned}$$

se ve que $y(t) = e^{rt}$ es una solución de (1) si y sólo si

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) se conoce como *ecuación característica* de (1) y tiene dos raíces r_1 y r_2 que están dadas por la fórmula cuadrática

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac$ es positiva, entonces r_1 y r_2 son reales y distintos. En ese caso $y_1(t) = e^{r_1 t}$ y $y_2(t) = e^{r_2 t}$ son dos soluciones distintas de (1). Dichas soluciones son en verdad

linealmente independientes (en cualquier intervalo I), puesto que e^{r_2t} obviamente no es múltiplo de e^{r_1t} si $r_1 \neq r_2$. (Si el lector aún no se convence de ello, calcule

$$W[e^{r_1t}, e^{r_2t}] = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t},$$

y observe que W nunca es cero. Por lo tanto, e^{r_1t} y e^{r_2t} son linealmente independientes en cualquier intervalo I).

EJEMPLO 1 Obtener la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 0. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $r^2 + 5r + 4 = (r + 4)(r + 1) = 0$ tiene dos raíces diferentes $r_1 = -4$ y $r_2 = -1$. Así pues, $y_1(t) = e^{-4t}$ y $y_2(t) = e^{-t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de (3) y cualquier solución $y(t)$ de (3) es del tipo

$$y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-t}$$

para cualesquiera constantes c_1, c_2.

EJEMPLO 2 Encontrar la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $r^2 + 4r - 2 = 0$ tiene dos raíces

$$r_1 = \frac{-4 + \sqrt{16+8}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

y

$$r_2 = \frac{-4 - \sqrt{16+8}}{2} = -2 - \sqrt{6}\,.$$

Por lo tanto, $y_1(t) = e^{r_1t}$ y $y_2(t) = e^{r_2t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de $y'' + 4y' - 2y = 0$, de modo que

$$y(t) = c_1e^{(-2+\sqrt{6})t} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})t}$$

para cualquier par de constantes c_1, c_2. Tales constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{y} \qquad (-2+\sqrt{6})c_1 + (-2-\sqrt{6})c_2 = 2.$$

De la primera ecuación se obtiene que $c_2 = 1 - c_1$. Sustituyendo el valor de c_2 en la segunda ecuación se obtiene

$$(-2+\sqrt{6})c_1 - (2+\sqrt{6})(1-c_1) = 2, \quad \text{o bien} \quad 2\sqrt{6}\,c_1 = 4 + \sqrt{6}\,.$$

Por lo tanto, $c_1 = 2/\sqrt{6} + \frac{1}{2}$, $c_2 = 1 - c_1 = \frac{1}{2} - 2/\sqrt{6}$, y

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)e^{(-2+\sqrt{6})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)e^{-(2+\sqrt{6})t}.$$

EJERCICIOS

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$

2. $6\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + y = 0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + y = 0$

4. $3\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 2y = 0$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

5. $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

6. $2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 10y = 0;\quad y(1) = 5,\ y'(1) = 2$

7. $5\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - y = 0;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

8. $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + y = 0;\quad y(2) = 1,\ y'(2) = 1$

Nota. Al resolver los Problemas 6 y 8 observe que $e^{r(t-t_0)}$ es también una solución de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ si $ar^2 + br + c = 0$. Así pues, para encontrar la solución $y(t)$ del problema de valor inicial $ay'' + by' + cy = 0; y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$, se escribe $y(t) = c_1e^{r_1(t-t_0)} + c_2e^{r_2(t-t_0)}$ y se despejan c_1 y c_2 a partir de las condiciones iniciales.

9. Sea $y(t)$ una solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0;\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = V.$$

¿Para qué valores de V permanece $y(t)$ no negativa para toda $t \geq 0$?

10. La ecuación diferencial

$$L[y] = t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0 \qquad (*)$$

se conoce como *ecuación de Euler*. Obsérvese que t^2y'', ty' y y son múltiplos de t^r si $y = t^r$. Esto sugiere que $y = t^r$ es solución de (*). Demuestre que $y = t^r$ es una solución de (*) si $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

11. Encuentre la solución general de la ecuación

$$t^2y'' + 5ty' - 5y = 0,\qquad t > 0$$

12. Resuelva el problema de valor inicial

$$t^2y'' - ty' + 2y = 0; \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

en el intervalo $0 < t < \infty$.

2.2.1 *Raíces complejas*

Si $b^2 - 4ac$ es negativo, entonces la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$ tiene raíces complejas

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Sería conveniente poder decir que $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ como soluciones de la ecuación diferencial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0. \tag{1}$$

Sin embargo, esto presenta dos dificultades serias. Por un lado, la función e^{rt} no ha sido definida hasta ahora para r compleja y, por el otro, aun si se tuviera éxito definiendo $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ como soluciones de valores complejos de (1), quedaría todavía el problema de encontrar dos soluciones con *valores reales* de (1).

Primero se resolverá la segunda dificultad, ya que de otro modo no tendría sentido tratar de resolver la primera. Supóngase que $y(t) = u(t) + iv(t)$ es una solución con valores complejos de (1). Lo que significa, por supuesto, que

$$a\left[u''(t) + iv''(t)\right] + b\left[u'(t) + iv'(t)\right] + c\left[u(t) + iv(t)\right] = 0. \tag{2}$$

Esta solución con valores complejos de (1), da lugar a *dos* soluciones con valores reales, como se verá a continuación.

LEMA 1. *Sea $y(t) = u(t) + iv(t)$ una solución con valores complejos de* (1) *con a, b y c reales. Entonces, $y_1(t) = u(t)$ y $y_2(t) = v(t)$ son dos soluciones con valores reales de* (1). *En otras palabras, tanto la parte real como la parte imaginaria de la solución con valores complejos de* (1) *son soluciones reales de* (1). (*La parte imaginaria del número complejo $\alpha + i\beta$ es β. De manera similar, la parte imaginaria de la función $u(t) + iv(t)$ es $v(t)$.*)

DEMOSTRACIÓN. De la ecuación (2) se tiene que

$$\left[au''(t) + bu'(t) + cu(t)\right] + i\left[av''(t) + bv'(t) + cv(t)\right] = 0. \tag{3}$$

Ahora bien, si un número complejo es igual a cero, entonces tanto su parte real como su parte imaginaria deben ser nulas. Por lo tanto,

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0 \quad \text{y} \quad av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0,$$

y con esto concluye la demostración del Lema 1.

El problema de definir e^{rt} para r complejo también puede resolverse fácilmente. Sea $r = \alpha + i\beta$. Según la regla de los exponentes, se tiene

$$e^{rt} = e^{\alpha t}e^{i\beta t}. \tag{4}$$

Así pues, se necesita definir solamente la cantidad $e^{i\beta t}$ para β real. Para ello, recuérdese que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots . \tag{5}$$

La ecuación (5) tiene sentido formalmente incluso para x complejo. Esto sugiere hacer

$$e^{i\beta t} = 1 + i\beta t + \frac{(i\beta t)^2}{2!} + \frac{(i\beta t)^3}{3!} + \dots .$$

Después, obsérvese que

$$\begin{aligned} 1 + i\beta t + \frac{(i\beta t)^2}{2!} + \dots &= 1 + i\beta t - \frac{\beta^2 t^2}{2!} - \frac{i\beta^3 t^3}{3!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} + \frac{i\beta^5 t^5}{5!} + \dots \\ &= \left[1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\beta t - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \frac{\beta^5 t^5}{5!} + \dots\right] \\ &= \cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t). \tag{6}$$

Volviendo a la ecuación diferencial (1) se ve que

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{[-b + i\sqrt{4ac - b^2}]t/2a} \\ &= e^{-bt/2a}\left[\cos\sqrt{4ac - b^2}\, t/2a + i\operatorname{sen}\sqrt{4ac - b^2}\, t/2a\right] \end{aligned}$$

es una solución con valores complejos de (1) si $b^2 - 4ac$ es negativo. Por lo tanto, por el Lema 1 se tiene que

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}\cos\beta t \quad \text{y} \quad y_2(t) = e^{-bt/2a}\operatorname{sen}\beta t, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

son dos soluciones con valores reales de 1. Las dos funciones son linealmente independientes en cualquier intervalo I, ya que su wronskiano (véase el Ejercicio 10) nunca es igual a cero. Por lo tanto, la solución general de (1) para $b^2 - 4ac < 0$ es

$$y(t) = e^{-bt/2a}[c_1\cos\beta t + c_2\operatorname{sen}\beta t], \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

OBSERVACIÓN 1. En sentido riguroso, debe verificarse que la fórmula

$$\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}$$

también es válida para r complejo, antes de poder afirmar que $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$ son soluciones con valores complejos de (1). Para ello, calcúlese

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{(\alpha + i\beta)t} &= \frac{d}{dt}e^{\alpha t}[\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t] \\ &= e^{\alpha t}[(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) + i(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t)] \end{aligned}$$

y esto es igual a $(\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}$, ya que

$$\begin{aligned}(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} &= (\alpha+i\beta)e^{\alpha t}[\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t]\\ &= e^{\alpha t}[(\alpha\cos\beta t - \beta\,\mathrm{sen}\,\beta t) + i(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta t + \beta\cos\beta t)].\end{aligned}$$

Así pues, $(d/dt)e^{rt} = re^{rt}$, incluso para r compleja.

OBSERVACIÓN 2. A primera vista podría pensarse que $e^{r_2 t}$ daría lugar a dos soluciones más de (1). Sin embargo, tal no es el caso, ya que

$$\begin{aligned}e^{r_2 t} &= e^{-(b/2a)t}e^{-i\beta t}, \qquad \beta = \sqrt{4ac-b^2}\,/2a\\ &= e^{-bt/2a}[\cos(-\beta t) + i\,\mathrm{sen}(-\beta t)] = e^{-bt/2a}[\cos\beta t - i\,\mathrm{sen}\,\beta t].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Re}\{e^{r_2 t}\} = e^{-bt/2a}\cos\beta t = y_1(t)$$

y

$$\mathrm{Im}\{e^{r_2 t}\} = -e^{-bt/2a}\,\mathrm{sen}\,\beta t = -y_2(t).$$

EJEMPLO 1 Encontrar dos soluciones con valores reales y linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $4r^2 + 4r + 5 = 0$ tiene raíces complejas $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ y $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Por lo tanto,

$$e^{r_1 t} = e^{(-1/2+i)t} = e^{-t/2}\cos t + ie^{-t/2}\,\mathrm{sen}\,t$$

es una solución con valores complejos de (7). Por ello, con base en el Lema 1

$$\mathrm{Re}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t/2}\cos t \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\,t$$

son dos soluciones con valores reales, linealmente independientes de (7).

EJEMPLO 2 Encontrar la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $r^2 + 2r + 4 = 0$ tiene raíces complejas $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$. Por lo tanto,

$$e^{r_1 t} = e^{(-1+\sqrt{3}i)t} = e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t + ie^{-t}\,\mathrm{sen}\sqrt{3}\,t$$

es una solución con valores complejos de $y'' + 2y' + 4y = 0$. Por lo tanto, con base en el Lema 1, tanto

$$\mathrm{Re}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t \quad \text{como} \quad \mathrm{Im}\{e^{r_1 t}\} = e^{-t}\,\mathrm{sen}\sqrt{3}\,t$$

son soluciones con valores reales y, como consecuencia,

$$y(t)=e^{-t}\left[c_1\cos\sqrt{3}\,t+c_2\sin\sqrt{3}\,t\right]$$

para cualquier par de constantes c_1, c_2. Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$1=y(0)=c_1$$

y

$$1=y'(0)=-c_1+\sqrt{3}\,c_2.$$

Esto implica que

$$c_1=1, c_2=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad y(t)=e^{-t}\left[\cos\sqrt{3}\,t+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t\right].$$

EJERCICIOS

Obtenga la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$

2. $2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+4y=0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=0$

4. $4\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+y=0$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

5. $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+2y=0;\quad y(0)=1,\ y'(0)=-2$

6. $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+5y=0;\quad y(0)=0,\ y'(0)=2$

7. Suponga que $b^2-4ac<0$. Demuestre que

$$y_1(t)=e^{(-b/2a)(t-t_0)}\cos\beta(t-t_0)$$

y

$$y_2(t)=e^{(-b/2a)(t-t_0)}\operatorname{sen}\beta(t-t_0),\qquad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

son soluciones de (1) para todo número t_0.

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

8. $2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+3y=0;\quad y(1)=1,\ y'(1)=1$

9. $3\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+4y=0;\quad y(2)=1,\ y'(2)=-1$

10. Verifique que $W[e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t]=\beta e^{2\alpha t}$.

11. Demuestre que e^{iwt} es una solución con valores complejos de la ecuación diferencial $y'' + w^2y = 0$. Encuentre dos soluciones con valores reales.

12. Demuestre que $(\cos t + i \operatorname{sen} t)^r = \cos rt + i \operatorname{sen} rt$. Use este resultado para obtener las fórmulas para el doble de un ángulo $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ y $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$.

13. Demuestre que

$$(\cos t_1 + i \operatorname{sen} t_1)(\cos t_2 + i \operatorname{sen} t_2) = \cos(t_1 + t_2) + i \operatorname{sen}(t_1 + t_2).$$

Use este resultado para obtener las siguientes igualdades trigonométricas.

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2,$$
$$\operatorname{sen}(t_1 + t_2) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \operatorname{sen} t_2.$$

14. Demuestre que todo número complejo $a + ib$ puede escribirse en la forma $Ae^{i\theta}$, donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$.

15. Defina las dos posibles raíces cuadradas de un número complejo $Ae^{i\theta}$ como $\pm\sqrt{A}\, e^{i\theta/2}$ y calcule las raíces cuadradas de i, $1 + i$, $-i$, $\sqrt{i}$.

16. Aplique el Ejercicio 14 para encontrar las tres raíces cúbicas de i.

17. (a) Sea $r_1 = \lambda + i\mu$ una raíz compleja de $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$. Demuestre que

$$t^{\lambda + i\mu} = t^{\lambda} t^{i\mu} = t^{\lambda} e^{(\ln t)i\mu} = t^{\lambda}[\cos \mu \ln t + i \operatorname{sen} \mu \ln t]$$

es una solución con valores complejos de la ecuación de Euler

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t \frac{dy}{dt} + \beta y = 0. \qquad (*)$$

(b) Demuestre que $t^{\lambda}\cos\mu \ln t$ y $t^{\lambda}\operatorname{sen}\mu \ln t$ son soluciones con valores reales de (*).

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

18. $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + t \dfrac{dy}{dt} + y = 0, \quad t > 0$

19. $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2t \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad t > 0$

2.2.2 *Raíces iguales; reducción de orden*

Si $b^2 = 4ac$, entonces la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$ tiene raíces reales iguales $r_1 = r_2 = -b/2a$. En este caso se obtiene solamente una solución

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}$$

de la ecuación diferencial

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0. \qquad (1)$$

El problema es encontrar una segunda solución que sea independiente de y_1. Una manera de abordar este problema es proponer alguna otra solución. Otro modo, quizá más sensato, es utilizar la solución conocida $y_1(t)$ para tratar de hallar una segunda solución independiente. De manera más general, supóngase que se tiene una solución $y = y_1(t)$ de la ecuación lineal de segundo orden

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0. \tag{2}$$

La pregunta es si es posible utilizar esta solución para encontrar una segunda solución independiente. La respuesta es sí. Una vez que se conoce una solución $y = y_1(t)$ de (2), puede reducirse el problema de encontrar todas las soluciones de (2) al de resolver una ecuación lineal homogénea de primer orden. Esto se logra definiendo una nueva variable dependiente v por medio de la sustitución

$$y(t)=y_1(t)v(t).$$

Entonces

$$\frac{dy}{dt}=v\frac{dy_1}{dt}+y_1\frac{dv}{dt}$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2}=v\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}\frac{dy_1}{dt}+y_1\frac{d^2v}{dt^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}L[y]&=v\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}\frac{dy_1}{dt}+y_1\frac{d^2v}{dt^2}+p(t)\left[v\frac{dy_1}{dt}+y_1\frac{dv}{dt}\right]+q(t)vy_1\\&=y_1\frac{d^2v}{dt^2}+\left[2\frac{dy_1}{dt}+p(t)y_1\right]\frac{dv}{dt}+\left[\frac{d^2y_1}{dt^2}+p(t)\frac{dy_1}{dt}+q(t)y_1\right]v\\&=y_1\frac{d^2v}{dt^2}+\left[2\frac{dy_1}{dt}+p(t)y_1\right]\frac{dv}{dt},\end{aligned}$$

ya que $y_1(t)$ es una solución de $L[y] = 0$. Por ello, $y(t) = y_1(t)v(t)$ es solución de (2) si v satisface la ecuación diferencial

$$y_1\frac{d^2v}{dt^2}+\left[2\frac{dy_1}{dt}+p(t)y_1\right]\frac{dv}{dt}=0. \tag{3}$$

Ahora obsérvese que la ecuación (3) es realmente una ecuación lineal de primer orden para dv/dt. Su solución es

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=c\exp\left[-\int\left[2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}+p(t)\right]dt\right]\\&=c\exp\left(-\int p(t)dt\right)\exp\left[-2\int\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}dt\right]\\&=\frac{c\exp\left(-\int p(t)dt\right)}{y_1^2(t)}\cdots\end{aligned} \tag{4}$$

Ya que se necesita solamente una solución $v(t)$ de (3), se toma $c = 1$ en (4). Al integrar la ecuación con respecto a t y hacer que la constante de integración sea igual a cero, se obtiene que $v(t) = \int u(t)dt$, donde

$$u(t) = \frac{\exp\left(-\int p(t)\,dt\right)}{y_1^2(t)}. \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = y_1(t)\int u(t)\,dt \tag{6}$$

es una segunda solución de (2). Esta solución es independiente de y_1, porque si $y_2(t)$ fuera un múltiplo de $y_1(t)$, entonces $v(t)$ sería constante y, por lo tanto, su derivada sería igual a cero. Sin embargo, de (4) se tiene que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\exp\left(-\int p(t)\,dt\right)}{y_1^2(t)},$$

y esta cantidad nunca se anula.

OBSERVACIÓN 1. Al escribir $v(t) = \int u(t)dt$ se está tomando la constante de integración igual a cero. Si se elige una constante diferente de cero sólo se le suma a $y_2(t)$ un múltiplo de $y_1(t)$. De la misma manera, elegir una constante diferente de uno en la ecuación (4) tendría como efecto multiplicar $y_2(t)$ por c.

OBSERVACIÓN 2. El método que acaba de presentarse para resolver la ecuación (2) se conoce como método de *reducción de orden*, ya que la sustitución, $y(t) = y_1(t)v(t)$ reduce el problema de resolver la ecuación de segundo orden (2) al de resolver una ecuación de primer orden.

Aplicación al caso de raíces iguales: En el caso de raíces iguales se encontró que $y_1(t) = e^{-bt/2a}$ es una solución de la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0. \tag{7}$$

Puede encontrarse una segunda solución a partir de las ecuaciones (5) y (6). Sin embargo, es importante resaltar que las ecuaciones (5) y (6) se obtuvieron bajo la suposición de que la ecuación diferencial estaba escrita en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0;$$

es decir, el coeficiente de y'' es uno. En la ecuación (7) el coeficiente de y'' es a. Por ello, se necesita dividir la ecuación entre a para obtener la ecuación equivalente

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{a}\frac{dy}{dt} + \frac{c}{a}y = 0.$$

Ahora, es posible sustituir $p(t) = b/a$ en (5) para obtener

$$u(t)=\frac{\exp\left(-\int \frac{b}{a}\,dt\right)}{\left[e^{-bt/2a}\right]^2}=\frac{e^{-bt/a}}{e^{-bt/a}}=1.$$

Por lo tanto,

$$y_2(t)=y_1(t)\int dt=ty_1(t)$$

es una segunda solución de (7). Las funciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son en verdad linealmente independientes en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Por lo tanto, la solución general de (7), en el caso de raíces iguales, es

$$y(t)=c_1e^{-bt/2a}+c_2te^{-bt/2a}=\left[c_1+c_2t\right]e^{-bt/2a}$$

EJEMPLO 1 Encontrar la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=3.$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$ tiene dos raíces iguales $r_1 = r_2 = -2$. Por lo tanto,

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$$

para cualquier par de constantes c_1, c_2. Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$1=y(0)=c_1 \qquad \text{y} \qquad 3=y'(0)=-2c_1+c_2.$$

Esto implica que $c_1 = 1$ y $c_2 = 5$, de modo que $y(t) = (1 + 5t)e^{-2t}$.

EJEMPLO 2 Obtener la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}+2t\frac{dy}{dt}-2y=0; \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=-4$$

en el intervalo $-1 < t < 1$.

SOLUCIÓN. Es evidente que $y_1(t) = t$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}+2t\frac{dy}{dt}-2y=0. \tag{8}$$

Se aplicará el método de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(t)$ de (8). Para ello se dividen ambos lados de (8) entre $1 - t^2$ con objeto de obtener la ecuación equivalente

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2t}{1-t^2}\frac{dy}{dt}-\frac{2}{1-t^2}y=0.$$

Entonces, de (5) se tiene que

$$u(t)=\frac{\exp\left(-\int \frac{2t}{1-t^2}\,dt\right)}{y_1^2(t)}=\frac{e^{\ln(1-t^2)}}{t^2}=\frac{1-t^2}{t^2},$$

y

$$y_2(t)=t\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt=-t\left(\frac{1}{t}+t\right)=-(1+t^2)$$

es una segunda solución de (8). Por tanto,

$$y(t)=c_1t-c_2(1+t^2)$$

para cualquier par de constantes c_1, c_2. (Nótese que todas las soluciones de (9) son continuas en $t = \pm 1$ aun cuando la ecuación diferencial no está definida en esos puntos. Así pues, no necesariamente resulta que las soluciones de una ecuación diferencial sean discontinuas en un punto donde la ecuación diferencial no está definida aunque muchas veces tal es el caso). Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$3=y(0)=-c_2 \quad \text{y} \quad -4=y'(0)=c_1.$$

Por lo tanto, $y(t) = -4t + 3(1 + t^2)$.

EJERCICIOS

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-6\dfrac{dy}{dt}+9y=0$

2. $4\dfrac{d^2y}{dt^2}-12\dfrac{dy}{dt}+9y=0$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

3. $9\dfrac{d^2y}{dt^2}+6\dfrac{dy}{dt}+y=0;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

4. $4\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+y=0;\quad y(0)=0,\ y'(0)=3$

5. Suponga que $b^2 = 4ac$. Demuestre que

$$y_1(t)=e^{-b(t-t_0)/2a} \quad \text{y} \quad y_2(t)=(t-t_0)e^{-b(t-t_0)/2a}$$

son soluciones de (1) para cualquier t_0.

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0;\quad y(2)=1,\ y'(2)=-1$

7. $9\dfrac{d^2y}{dt^2}-12\dfrac{dy}{dt}+4y=0;\quad y(\pi)=0,\ y'(\pi)=2$

8. Sean a, b y c números positivos. Pruebe que cualquier solución de la ecuación diférencial $ay'' + by' + cy = 0$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.

9. Aquí se presenta un método alterno y completo para encontrar una segunda solución $y_2(t)$ de (1).

(a) Suponga que $b^2 = 4ac$. Pruebe que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2 e^{rt}$$

para $r_1 = -b/2a$.

(b) Demuestre que

$$(\partial/\partial r)L[e^{rt}] = L\left[(\partial/\partial r)e^{rt}\right] = L[te^{rt}] = 2a(r - r_1)e^{rt} + at(r - r_1)^2 e^{rt}.$$

(c) Concluya de (a) y (b) que $L[te^{r_1 t}] = 0$. Por lo tanto $y_2(t) = te^{r_1 t}$ es una segunda solución de (1).

Use el método de reducción de orden para encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

10. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{2(t+1)}{(t^2+2t-1)}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{(t^2+2t-1)}y = 0 \quad (y_1(t) = t+1)$

11. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4t\dfrac{dy}{dt} + (4t^2-2)y = 0 \quad (y_1(t) = e^{t^2})$

12. $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (y_1(t) = t)$

13. $(1+t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (y_1(t) = t)$

14. $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2t\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \quad (y_1(t) = 3t^2 - 1)$

15. $(2t+1)\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4(t+1)\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \quad (y_1(t) = t+1)$

16. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0 \quad \left(y_1(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\right)$

17. Sabiendo que la ecuación

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (1+3t)\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

tiene una solución de la forma e^{ct}, para cualquier constante c, encuentre la solución general.

18. (a) Demuestre que t^r es una solución de la ecuación de Euler

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \quad t > 0$$

si $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

(b) Suponga que $(\alpha - 1)^2 = 4\beta$. Use el método de reducción de orden para mostrar que $(\ln t)t^{(1-\alpha)/2}$ es una segunda solución de la ecuación de Euler.

Halle la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

19. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+3t\dfrac{dy}{dt}+y=0$

20. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}-t\dfrac{dy}{dt}+y=0$

2.3 LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA

Considérese ahora la ecuación no homogénea

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=g(t) \tag{1}$$

donde las funciones $p(t)$, $q(t)$ y $g(t)$ son continuas en un intervalo abierto $\alpha < t < \beta$. La siguiente ecuación lineal de primer orden ofrece una noción conveniente de la naturaleza de las soluciones de (1)

$$\frac{dy}{dt}-2ty=-t. \tag{2}$$

La solución general de esta ecuación es

$$y(t)=ce^{t^2}+\tfrac{1}{2}.$$

Ahora bien, obsérvese que la solución es la suma de dos términos: el primero, ce^{t^2}, es la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt}-2ty=0 \tag{3}$$

mientras que el segundo, ½, es solución de la ecuación no homogénea (2). En otras palabras, toda solución $y(t)$ de (2) es la suma de una solución particular, $\psi(t)=½$, con una solución ce^{t^2} de la ecuación homogénea. En el caso de las ecuaciones de segundo orden, como se verá a continuación, ocurre algo similar.

TEOREMA 5. *Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea*

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0 \tag{4}$$

y sea $\psi(t)$ cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (1). *Entonces, toda solución $y(t)$ de* (1) *debe ser de la forma*

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t)$$

para cualquier par de constantes c_1, c_2.

La demostración del Teorema 5 se basa, sobre todo, en el lema siguiente.

LEMA 1. *La diferencia de cualesquiera dos soluciones de la ecuación no homogénea* (1) *es una solución de la ecuación homogénea* (4).

DEMOSTRACIÓN. Sean $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ dos soluciones de (1). Por la linealidad de L se tiene que

$$L[\psi_1-\psi_2](t)=L[\psi_1](t)-L[\psi_2](t)=g(t)-g(t)=0.$$

Por lo tanto, $\psi_1(t) - \psi_2(t)$ es una solución de la ecuación homogénea (4). □

Ahora es posible presentar una demostración muy sencilla del Teorema 5.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Sea $y(t)$ una solución cualquiera de (1). Por el Lema 1 se tiene que la función $\phi(t) = y(t) - \psi(t)$ es una solución de la ecuación homogénea (4). Sin embargo, toda solución $\phi(t)$ de la ecuación homogénea (4) es de la forma $\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ para dos constantes cualesquiera c_1, c_2. Por lo tanto,

$$y(t)=\phi(t)+\psi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t).$$ □

OBSERVACIÓN. El Teorema 5 es extremadamente útil, ya que reduce el problema de hallar todas las soluciones de (1) al problema mucho más sencillo de encontrar solamente dos soluciones de la ecuación homogénea (4) y una solución de la ecuación no homogénea (1).

EJEMPLO 1 Encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=t. \tag{5}$$

SOLUCIÓN. Las funciones $y_1(t) = \cos t$ y $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$. Más aún, $\psi(t) = t$ es obviamente una solución particular de (5). Por lo tanto, por el Teorema 5 toda solución $y(t)$ de (5) debe ser del tipo

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+t.$$

EJEMPLO 2 Tres soluciones de una cierta ecuación lineal no homogénea de segundo orden son

$$\psi_1(t)=t, \qquad \psi_2(t)=t+e^t \qquad \text{y} \qquad \psi_3(t)=1+t+e^t.$$

Obtener la solución general de la ecuación.

SOLUCIÓN. Por el Lema 1, las funciones

$$\psi_2(t)-\psi_1(t)=e^t \qquad \text{y} \qquad \psi_3(t)-\psi_2(t)=1$$

son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea. Más aún, estas funciones son en verdad linealmente independientes. Por lo tanto, por el Teorema 5 se tiene que toda solución $y(t)$ de la ecuación debe ser del tipo

$$y(t)=c_1e^t+c_2+t.$$

EJERCICIOS

1. Tres soluciones de una cierta ecuación lineal de segundo orden no homogénea son

$$\psi_1(t) = t^2, \psi_2(t) = t^2 + e^{2t}$$

y
$$\psi_3(t) = 1 + t^2 + 2e^{2t}.$$

Encuentre la solución general de la ecuación.

2. Tres soluciones de una ecuación lineal de segundo orden no homogénea son

$$\psi_1(t) = 1 + e^{t^2}, \psi_2(t) = 1 + te^{t^2}$$

y
$$\psi_3(t) = (t+1)e^{t^2} + 1$$

Halle la solución general de la ecuación.

$\psi_1(t) = 3e^t + e^{t^2}, \psi_2(t) = 7e^t + e^{t^2}$ y $\psi_3(t) = 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$.

3. Tres soluciones de una ecuación lineal de segundo orden $L[y] = g(t)$ son

$$L[y] = g; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Encontrar la solución del problema de valor inicial

4. Sean a, b y c constantes positivas. Demuestre que la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito.

5. Sea $\psi(t)$ una solución de la ecuación no homogénea (1), y sea $\phi(t)$ una solución de la ecuación homogénea (4). Demuestre que $\psi(t) + \phi(t)$ también es solución de (1).

2.4 MÉTODO DE VARIACION DE PARÁMETROS

En esta sección se explica un método muy general para encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

una vez que se conocen las soluciones de la ecuación homogénea

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \tag{2}$$

El principio básico de este método es usar la información que se tiene sobre las soluciones de la ecuación homogénea para tratar de encontrar una solución de la ecuación no homogénea.

Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2). Se tratará de encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea (1) del tipo

$$\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t); \tag{3}$$

es decir, se intentará encontrar funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ tales que la combinación lineal $u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ sea una solución de (1). A primera vista esto podría parecer una idea mala, ya que se está cambiando el problema de encontrar una función desconocida $\psi(t)$ por el problema aparentemente más difícil de encontrar dos funciones desconocidas $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Sin embargo, si se hace la elección adecuada, será posible encontrar a $u_1(t)$ y $u_2(t)$ como las soluciones de dos ecuaciones muy sencillas de primer orden. Esto se hará de la siguiente manera. Obsérvese que la ecuación diferencial (1) impone solamente una condición sobre las dos funciones desconocidas $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Por lo tanto, se tiene una cierta "libertad" para seleccionar $u_1(t)$ y $u_2(t)$. El objetivo es imponer una condición adicional sobre $u_1(t)$ y $u_2(t)$ que simplifique la expresión $L[u_1y_1 + u_2y_2]$ lo más posible. Al calcular

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t)&=\frac{d}{dt}[u_1y_1+u_2y_2]\\&=[u_1y_1'+u_2y_2']+[u_1'y_1+u_2'y_2]\end{aligned}$$

se ve que $d^2\psi/dt^2$, y por lo tanto $L[\psi]$ no contiene derivadas de segundo orden de u_1 y u_2 si

$$y_1(t)u_1'(t)+y_2(t)u_2'(t)=0. \tag{4}$$

Esto sugiere imponer la condición (4) a las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$. En tal caso se obtiene

$$\begin{aligned}L[\psi]&=[u_1y_1'+u_2y_2']'+p(t)[u_1y_1'+u_2y_2']+q(t)[u_1y_1+u_2y_2]\\&=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1[y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1]+u_2[y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2]\\&=u_1'y_1'+u_2'y_2'\end{aligned}$$

ya que tanto $y_1(t)$ como $y_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Por lo tanto, $\psi(t) = u_1y_1 + u_2y_2$ es una solución de la ecuación no homogénea (1) si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ satisfacen a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}y_1(t)u_1'(t)+y_2(t)u_2'(t)&=0\\y_1'(t)u_1'(t)+y_2'(t)u_2'(t)&=g(t).\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $y_2'(t)$, la segunda por $y_2(t)$ y restándolas luego se obtiene

$$[y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)]u_1'(t)=-g(t)y_2(t),$$

en tanto que multiplicando la primera ecuación por $y_1'(t)$, la segunda por $y_1(t)$ y restándolas luego se tiene,

$$[y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)]u_2'(t)=g(t)y_1(t).$$

Por lo tanto,

$$u_1'(t)=-\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)} \quad \text{y} \quad u_2'(t)=\frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1,y_2](t)}. \tag{5}$$

Finalmente, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se obtienen al integrar los miembros derechos de (5).

OBSERVACIÓN. La solución general de la ecuación homogénea (2) es

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t).$$

Al permitir que c_1 y c_2 varíen en el tiempo se obtiene una solución de la ecuación no homogénea. Por eso se conoce como método de variación de parámetros.

EJEMPLO 1

(a) Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\tan t \tag{6}$$

en el intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(b) Hallar la solución $y(t)$ de (6) que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

SOLUCIÓN.

(a) Las funciones $y_1(t) = \cos t$ y $y_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$, con

$$W[y_1,y_2](t)=y_1y_2'-y_1'y_2=(\cos t)\cos t-(-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t=1.$$

Así pues, de (5) se sigue que

$$u_1'(t)=-\tan t\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad u_2'(t)=\tan t\cos t. \tag{7}$$

Integrando la primera ecuación de (7) se obtiene

$$\begin{aligned}u_1(t)&=-\int\tan t\operatorname{sen} t\,dt=-\int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}dt\\&=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}dt=\operatorname{sen} t-\ln|\sec t+\tan t|.\\&=\operatorname{sen} t-\ln(\sec t+\tan t),\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

mientras que al integrar la segunda ecuación de (7) se obtiene

$$u_2(t)=\int\tan t\cos t\,dt=\int\operatorname{sen} t\,dt=-\cos t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\cos t[\operatorname{sen} t-\ln(\sec t+\tan t)]+\operatorname{sen} t(-\cos t)\\&=-\cos t\ln(\sec t+\tan t)\end{aligned}$$

es una solución particular de (6) en el intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$.

(b) Del Teorema 5 de la Sección 2.3, se deduce que

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t-\cos t\ln(\sec t+\tan t)$$

para constantes c_1, c_2. Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$1=y(0)=c_1 \quad \text{y} \quad 1=y'(0)=c_2-1.$$

Por lo tanto, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y

$$y(t) = \cos t + 2\operatorname{sen} t - \cos t \ln(\sec t + \tan t).$$

OBSERVACIÓN. La ecuación (5) determina $u_1(t)$ y $u_2(t)$ salvo por dos constantes de integración. Éstas se consideran usualmente iguales a cero, ya que el efecto que supone tomar constantes diferentes de cero equivale a sumar una solución de la ecuación homogénea a $\psi(t)$.

EJERCICIOS

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \sec t, \quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$
2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = te^{2t}$
3. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + y = (t^2+1)e^t$
4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = te^{3t} + 1$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

5. $3y'' + 4y' + y = (\operatorname{sen} t)e^{-t}; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
6. $y'' + 4y' + 4y = t^{5/2}e^{-2t}; \quad y(0) = y'(0) = 0$
7. $y'' - 3y' + 2y = \sqrt{t+1}\ ; \quad y(0) = y'(0) = 0$
8. $y'' - y = f(t); \quad y(0) = y'(0) = 0$

Advertencia: Al resolver los Problemas 3 y 5 es necesario recordar que la ecuación (5) se obtuvo con el supuesto de que el coeficiente de y'' era igual a 1.

9. Halle dos soluciones linealmente independientes de $t^2y'' - 2y = 0$ de la forma $y(t) = t^r$. Use las soluciones para encontrar la solución general de $t^2y'' - 2y = t^2$.

10. $(1+t)^2$ es una solución de la ecuación

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (*)$$

y el wronskiano de cualesquiera dos soluciones de (*) es constante. Encuentre la solución general de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t.$$

11. Obtenga la solución general de $y'' + (1/4t^2)y = f\cos t$, $t > 0$, sabiendo que $y_1(t) = \sqrt{t}$ es una solución de la ecuación homogénea.

12. Halle la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2t}{1+t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{1+t^2}y = 1+t^2.$$

13. Demuestre que $\sec t + \tan t$ es positivo para $-\pi/2 < t < \pi/2$.

2.5 EL MÉTODO DE LA CONJETURA SENSATA

Una desventaja seria que tiene el método de variación de parámetros es que las integraciones que se requieren son, con frecuencia, muy difíciles. En ciertos casos es a veces más sencillo conjeturar una solución particular. En esta sección se presentará un método sistemático para conjeturar soluciones de la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t) \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes, y $g(t)$ tiene una de varias formas especiales.

Primero se considerará la ecuación diferencial

$$L[y] = a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n. \tag{2}$$

Se busca una función $\psi(t)$ tal que sumadas las tres funciones $a\psi''$, $b\psi'$ y $c\psi$ sean iguales a un polinomio de grado n. La elección obvia para ψ es un polinomio de grado n. Así pues, se propone

$$\psi(t) = A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n \tag{3}$$

y se calcula

$$\begin{aligned} L[\psi](t) &= a\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) \\ &= a\left[2A_2 + \dots + n(n-1)A_nt^{n-2}\right] + b\left[A_1 + \dots + nA_nt^{n-1}\right] \\ &\quad + c\left[A_0 + A_1t + \dots + A_nt^n\right] \\ &= cA_nt^n + (cA_{n-1} + nbA_n)t^{n-1} + \dots + (cA_0 + bA_1 + 2aA_2). \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias de t iguales de la ecuación

$$L[\psi](t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

se obtiene

$$cA_n = a_n,\ cA_{n-1} + nbA_n = a_{n-1}, \dots, cA_0 + bA_1 + 2aA_2 = a_0. \tag{4}$$

La primera ecuación determina $A_n = a_n/c$, para $c \neq 0$, y luego las ecuaciones restantes determinan sucesivamente $A_{n-1}, \dots, A_0$. Así pues, la ecuación (1) tiene una solución particular $\psi(t)$ de la forma (3), para $c \neq 0$.

Para el caso $c = 0$ hay problemas, ya que la primera ecuación de (4) no tiene solución A_n. Sin embargo, esto es de esperar para $c = 0$, pues $L[\psi] = a\psi'' + b\psi'$ es un polinomio de grado $n-1$, mientras que el lado derecho de (2) es un polinomio de gra-

do n. Para garantizar que $a\psi'' + b\psi$ es un polinomio de grado n es necesario tomar a ψ como un polinomio de grado $n + 1$. Así pues, se propone

$$\psi(t)=t[A_0+A_1t+\ldots+A_nt^n]. \tag{5}$$

En (5) se omiten los términos constantes, ya que y = constante es una solución de la ecuación homogénea $ay'' + by' = 0$, y por ello puede ser restada de $\psi(t)$. Los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ están determinados de manera única (Ejercicio 19) a partir de la ecuación

$$a\psi''+b\psi'=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$$

si $b \neq 0$.

Por último, el caso $b = c = 0$ es fácil de resolver, ya que la ecuación diferencial (2) puede integrarse directamente para obtener una solución particular $\psi(t)$ de la forma

$$\psi(t)=\frac{1}{a}\left[\frac{a_0t^2}{1\cdot 2}+\frac{a_1t^3}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{a_nt^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Resumen: La ecuación diferencial (2) tiene una solución $\psi(t)$ del tipo:

$$\psi(t)=\begin{cases} A_0+A_1t+\ldots+A_nt^n, & c\neq 0 \\ t(A_0+A_1t+\ldots+A_nt^n), & c=0,\ b\neq 0. \\ t^2(A_0+A_1t+\ldots+A_nt^n), & c=b=0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=t^2. \tag{6}$$

SOLUCIÓN. Hágase $\psi(t) = A_0 + A_1t + A_1t^2$ y calcúlese

$$\begin{aligned} L[\psi](t)&=\psi''(t)+\psi'(t)+\psi(t) \\ &=2A_2+(A_1+2A_2t)+A_0+A_1t+A_2t^2 \\ &=(A_0+A_1+2A_2)+(A_1+2A_2)t+A_2t^2. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de t en la ecuación $L[\psi](t) = t^2$, se obtiene

$$A_2=1, \qquad A_1+2A_2=0$$

y

$$A_0+A_1+2A_2=0.$$

De la primera ecuación se sabe que $A_2 = 1$, de la segunda se obtiene que $A_1 = -2$ y de la tercera ecuación se tiene que $A_0 = 0$. Por lo tanto,

$$\psi(t)=-2t+t^2$$

es una solución particular de (6).

Ahora se resolverá el mismo problema usando el método de variación de parámetros. Es fácil comprobar que

$$y_1(t)=e^{-t/2}\cos\sqrt{3}\,t/2 \quad \text{y} \quad y_2(t)=e^{-t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2$$

son dos soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Por lo tanto,

$$\psi(t) = u_1(t)e^{-t/2}\cos\sqrt{3}\,t/2 + u_2(t)e^{-t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2$$

es una solución particular de (6), donde

$$u_1(t) = \int \frac{-t^2e^{-t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2}{W[y_1,y_2](t)}dt = \frac{-2}{\sqrt{3}}\int t^2e^{t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2\,dt$$

y

$$u_2(t) = \int \frac{t^2e^{-t/2}\cos\sqrt{3}\,t/2}{W[y_1,y_2](t)}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int t^2e^{t/2}\cos\sqrt{3}\,t/2\,dt.$$

Estas integrales son muy difíciles de calcular. Así pues, el método de la conjetura es preferible sin duda, al menos en este problema, al método de variación de parámetros.

Considérese ahora la ecuación diferencial

$$L[y] = a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = (a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n)e^{\alpha t}. \tag{7}$$

Sería deseable poder eliminar el factor $e^{\alpha t}$ del segundo miembro de (7) para reducir la ecuación a la forma (2). Esto se logra definiendo $y(t) = e^{\alpha t}v(t)$, pues entonces se tiene que

$$y' = e^{\alpha t}(v' + \alpha v) \quad \text{y} \quad y'' = e^{\alpha t}(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2 v)$$

de modo que

$$L[y] = e^{\alpha t}\left[av'' + (2a\alpha + b)v' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)v\right].$$

Por lo tanto, $y(t) = e^{\alpha t}v(t)$ es una solución de (7) si y sólo si

$$a\frac{d^2v}{dt^2} + (2a\alpha + b)\frac{dv}{dt} + (a\alpha^2 + b\alpha + c)v = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n. \tag{8}$$

Al buscar una solución particular $v(t)$ de (8) hay que distinguir entre los siguientes casos: (i) $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$; (ii) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, pero $2a\alpha + b \neq 0$; y (iii) tanto $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ como $2a\alpha + b = 0$. El primer caso significa que α no es raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{9}$$

En otras palabras $e^{\alpha t}$ no es solución de la ecuación homogénea $L[y] = 0$.

La segunda condición significa que α es una raíz simple de la ecuación característica (9). Eso implica que $\alpha^{\alpha t}$ es solución de la ecuación homogénea, pero $te^{\alpha t}$ no lo es. Por último, la tercera condición significa que α es una raíz doble de la ecuación característica (9), de modo que, tanto $e^{\alpha t}$ como $te^{\alpha t}$, son soluciones de la ecuación homogénea. Por lo tanto, la ecuación (7) tiene una solución particular $\psi(t)$ de la forma (i) $\psi(t) = (A_0 + \cdots + A_nt^n)e^{\alpha t}$ si $e^{\alpha t}$ no es solución de la ecuación homogénea; (ii) $\psi(t) = t(A_0 + \cdots + A_nt^n)e^{\alpha t}$ si $e^{\alpha t}$ es solución de la ecuación homogénea, pero $te^{\alpha t}$ no lo es; y (iii) $\psi(t) = t^2(A_0 + \cdots + A_nt^n)e^{\alpha t}$ si tanto $e^{\alpha t}$ como $te^{\alpha t}$ son soluciones de la ecuación homogénea.

OBSERVACIÓN. Hay dos maneras de calcular una solución particular $\psi(t)$ de (7). O bien se hace la sustitución $y = e^{\alpha t}v$ y se encuentra $v(t)$ a partir de (8), o se conjetura una solución $\psi(t)$ del tipo $e^{\alpha t}$ por un polinomio adecuado en t. Si α es una raíz doble de la ecuación característica (9), o si $n \geq z$, entonces es recomendable hacer $y = e^{\alpha t}v$, y luego encontrar $v(t)$ a partir de (8). De otro modo se conjetura $\psi(t)$ directamente.

EJEMPLO 2 Encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = (1 + t + \ldots + t^{27})e^{2t}. \tag{10}$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ tiene raíces iguales $r_1 = r_2 = 2$. Por lo tanto, $y_1(t) = e^{2t}$ y $y_2(t) = te^{2t}$ son soluciones de la ecuación homogénea $y'' - 4y' + 4y = 0$. Para hallar una solución particular $\psi(t)$ de (10) se propone $y = e^{2t}v$. Entonces se cumple necesariamente que

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{27}.$$

Al integrar esta ecuación dos veces e igualar las constantes de integración a cero se obtiene

$$v(t) = \frac{t^2}{1\cdot 2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{t^{29}}{28\cdot 29}.$$

Por lo tanto, la solución general de (10) es

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + e^{2t}\left[\frac{t^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{t^{29}}{28\cdot 29}\right] \\ &= e^{2t}\left[c_1 + c_2t + \frac{t^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{t^{29}}{28\cdot 29}\right]. \end{aligned}$$

Sería un absurdo (y un desperdicio terrible de papel) sustituir la expresión

$$\psi(t) = t^2(A_0 + A_1t + \ldots + A_{27}t^{27})e^{2t}$$

en (10) y después despejar los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_{27}$.

EJEMPLO 3 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación:

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = (1 + t)e^{3t}.$$

SOLUCIÓN. En este caso e^{3t} no es una solución de la ecuación homogénea $y'' - 3y' + 2y = 0$. Así pues, se toma $\psi(t) = (A_0 + A_1t)e^{3t}$. Al calcular

$$\begin{aligned} L[\psi](t) &= \psi'' - 3\psi' + 2\psi \\ &= e^{3t}[(9A_0 + 6A_1 + 9A_1t) - 3(3A_0 + A_1 + 3A_1t) + 2(A_0 + A_1t)] \\ &= e^{3t}[(2A_0 + 3A_1) + 2A_1t] \end{aligned}$$

y cancelar el factor e^{3t} de ambos lados de la ecuación

$$L[\psi](t) = (1+t)e^{3t},$$

se obtiene

$$2A_1 t + (2A_0 + 3A_1) = 1 + t.$$

Esto implica que $2A_1 = 1$ y $2A_0 + 3A_1 = 1$. Por lo tanto, $A_1 = ½$, $A_0 = -¼$ y $\psi(t) = (-¼ + t/2)e^{3t}$.

Considérese por último la ecuación diferencial

$$L[y] = a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) \times \begin{cases} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{cases}. \tag{11}$$

El problema de hallar una solución particular $\psi(t)$ de (11) puede reducirse al problema más simple de encontrar una solución particular de (7). La ayuda necesaria la aporta el siguiente lema que, aunque sencillo, es extremadamente útil.

LEMA 1. *Sea $y(t) = u(t) + iv(t)$ una solución con valores complejos de la ecuación*

$$L[y] = a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g(t) = g_1(t) + ig_2(t) \tag{12}$$

donde a, b y c son reales. Esto significa, por supuesto, que

$$a[u''(t) + iv''(t)] + b[u'(t) + iv'(t)] + c[u(t) + iv(t)] = g_1(t) + ig_2(t). \tag{13}$$

Entonces, $L[u](t) = g_1(t)$ y $L[v](t) = g_2(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Al igualar las partes reales e imaginarias en (13) se obtiene

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = g_1(t)$$

y

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = g_2(t). \qquad \square$$

Ahora bien, sea $\phi(t) = u(t) + iv(t)$ una solución particular de la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = (a_0 + \dots + a_n t^n)e^{i\omega t}. \tag{14}$$

La parte real del lado derecho de (14) es $(a_0 + \dots + a_n t^n)\cos\omega t$, mientras que la imaginaria es $(a_0 + \dots + a_n t^n)\text{sen}\,\omega t$. Por lo tanto, por el Lema 1,

$$u(t) = \text{Re}\{\phi(t)\}$$

es una solución de

$$ay'' + by' + cy = (a_0 + \dots + a_n t^n)\cos\omega t$$

mientras que

$$v(t)=\mathrm{Im}\{\phi(t)\}$$

es una solución de

$$ay''+by'+cy=(a_0+\ldots+a_nt^n)\mathrm{sen}\,\omega t.$$

EJEMPLO 4 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+4y=\mathrm{sen}\,2t. \tag{15}$$

SOLUCIÓN. Se hallará que $\psi(t)$ es la parte imaginaria de la solución con valores complejos $\phi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+4y=e^{2it}. \tag{16}$$

Para ello obsérvese que la ecuación característica $r^2+4=0$ tiene raíces complejas $r=\pm 2i$. Por lo tanto, la ecuación (16) tiene una solución particular $\phi(t)$ del tipo $\phi(t)=A_0te^{2it}$. Al calcular

$$\phi'(t)=A_0(1+2it)e^{2it} \qquad \text{y} \qquad \phi''(t)=A_0(4i-4t)e^{2it}$$

se ve que

$$L[\phi](t)=\phi''(t)+4\phi(t)=4iA_0e^{2it}.$$

De aquí que $A_0=1/4i=-i/4$ y

$$\phi(t)=-\frac{it}{4}e^{2it}=-\frac{it}{4}(\cos 2t+i\,\mathrm{sen}\,2t)=\frac{t}{4}\mathrm{sen}\,2t-i\frac{t}{4}\cos 2t.$$

Por lo tanto, $\psi(t)=\mathrm{Im}\{\phi(t)\}=-(t/4)\cos 2t$ es una solución particular de (15).

EJEMPLO 5 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=\cos 2t. \tag{17}$$

SOLUCIÓN. A partir del Ejemplo 4 se tiene que $\phi(t)=(t/4)\mathrm{sen}\,2t-i(t/4)\cos 2t$ es una solución con valores complejos de (16). Por lo tanto,

$$\psi(t)=\mathrm{Re}\{\phi(t)\}=\frac{t}{4}\mathrm{sen}\,2t$$

es una solución particular de (17).

EJEMPLO 6 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=te^t\cos t. \tag{18}$$

SOLUCIÓN. Obsérvese que $te^2\cos t$ es la parte real de $te^{(1+i)t}$. Por lo tanto, es posible hallar $\psi(t)$ como la parte real de una solución con valores complejos de $\phi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=te^{(1+i)t}. \tag{19}$$

Para ello, obsérvese que $1+i$ no es raíz de la ecuación característica $r^2+2r+1=0$. Por lo tanto, la ecuación (19) tiene una solución particular $\phi(t)$ de la forma $\phi(t)=(A_0+A_1t)e^{(1+i)t}$. Calculando $L[\phi]=\phi''+2\phi'+\phi$ y usando la identidad

$$(1+i)^2+2(1+i)+1=\left[(1+i)+1\right]^2=(2+i)^2$$

se ve que

$$\left[(2+i)^2A_1t+(2+i)^2A_0+2(2+i)A_1\right]=t.$$

Por igualación de los coeficientes de las potencias iguales en t de la ecuación se obtiene

$$(2+i)^2A_1=1$$

y

$$(2+i)A_0+2A_1=0.$$

Esto implica que $A_1=1/(2+i)^2$ y $A_0=-2/(2+i)^3$, de modo que

$$\phi(t)=\left[\frac{-2}{(2+i)^3}+\frac{t}{(2+i)^2}\right]e^{(1+i)t}$$

y después de un poco de operaciones algebraicas se encuentra que

$$\phi(t)=\frac{e^t}{125}\left\{\left[(15t-4)\cos t+(20t-22)\operatorname{sen} t\right]\right.$$
$$\left.+i\left[(22-20t)\cos t+(15t-4)\operatorname{sen} t\right]\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\psi(t)=\operatorname{Re}\{\phi(t)\}=\frac{e^t}{125}\left[(15t-4)\cos t+(20t-22)\operatorname{sen} t\right].$$

OBSERVACIÓN. El método de la conjetura sensata también se aplica a la ecuación

$$L[y]=a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)e^{\alpha_j t} \tag{20}$$

donde $p_j(t)$, $j=1,\ldots,n$ son polinomios en t. Sea $\psi_j(t)$ una solución particular de la ecuación

$$L[y]=p_j(t)e^{\alpha_j t},\qquad j=1,\ldots,n.$$

Entonces, $\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)$ es una solución de (20), ya que

$$L[\psi] = L\left[\sum_{j=1}^{n} \psi_j\right] = \sum_{j=1}^{n} L[\psi_j] = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)e^{\alpha_j t}.$$

Así pues, para encontrar una solución particular de la ecuación

$$y'' + y' + y = e^t + t\operatorname{sen} t$$

se buscan soluciones particulares $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ de las ecuaciones

$$y'' + y' + y = e^t \quad \text{y} \quad y'' + y' + y = t\operatorname{sen} t$$

respectivamente, y después se suman.

EJERCICIOS

Halle una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $y'' + 3y = t^3 - 1$
2. $y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$
3. $y'' - y = t^2 e^t$
4. $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$
5. $y'' + 2y' + y = e^{-t}$
6. $y'' + 5y' + 4y = t^2 e^{7t}$
7. $y'' + 4y = t\operatorname{sen} 2t$
8. $y'' - 6y' + 9y = (3t^7 - 5t^4)e^{3t}$
9. $y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2 t$
10. $y'' - 2y' + 5y = 2(\cos^2 t)e^t$
11. $y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} t + te^{2t}$
12. $y'' + y' + 4y = t^2 + (2t + 3)(1 + \cos t)$
13. $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{2t}$
14. $y'' + 2y' = 1 + t^2 + e^{-2t}$
15. $y'' + y = \cos t \cos 2t$
16. $y'' + y = \cos t \cos 2t \cos 3t$.

17. (a) Demuestre que
$$\cos^3 \omega t = \tfrac{1}{4}\operatorname{Re}\{e^{3i\omega t} + 3e^{i\omega t}\}.$$
Sugerencia: $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$.

(b) Encuentre una solución particular de la ecuación
$$10y'' + 0.2y' + 1000y = 5 + 20\cos^3 10t$$

18. (a) Sea $L[y] = y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y$. Muestre que
$$L\left[e^{r_1 t}v(t)\right] = e^{r_1 t}v''(t).$$

(a) Obtenga la solución general de la ecuación
$$y'' - 6y' + 9y = t^{3/2}e^{3t}.$$

19. Sea $\psi(t) = t(A_0 + \ldots + A_n t^n)$ y suponga que $b \neq 0$. Pruebe que la ecuación $a\psi'' + b\psi' = a_0 + \ldots + a_n t^n$ determine $A_0, \ldots, A_n$ de manera única.

2.6 VIBRACIONES MECÁNICAS

Considérese el caso de un objeto pequeño de masa m que está sujeto al extremo libre de un resorte flexible de longitud l, el cual se halla suspendido de un soporte rígido horizontal (Fig. 1). (Un resorte elástico tiene la propiedad de que si es estirado o comprimido una distancia Δl, la cual es pequeña comparada con su longitud natural, ejerce entonces una fuerza de restitución de magnitud $k\,\Delta l$. La constante k se conoce como la *constante de fuerza* del resorte y es una medida de la rigidez del mismo.) Además la masa y el resorte pueden estar sumergidos en un medio, como por ejemplo aceite, el cual se opone al movimiento del cuerpo a través de él. Con frecuencia, los ingenieros se refieren a un conjunto de este tipo como sistema masa-resorte-amortiguador, o como sistema sismométrico, ya que es similar en principio a un instrumento sismográfico que se usa para detectar un movimiento de la superficie terrestre.

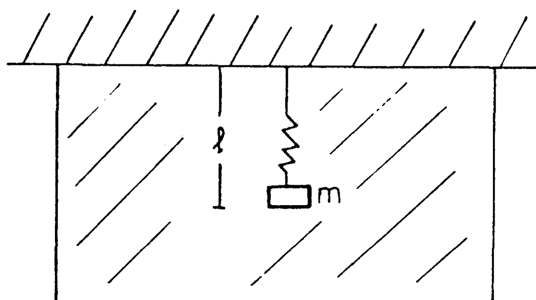


FIGURA 1.

Los sistemas masa-resorte-amortiguador tienen aplicaciones muy diversas; por ejemplo, los amortiguadores de los automóviles son sistemas de esta clase. La mayoría de los emplazamientos de cañones pesados contienen tales sistemas para minimizar el efecto de retroceso del arma. La utilidad de estos dispositivos se verá más claramente después de plantear y resolver la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa m.

Al evaluar el movimiento de m es conveniente medir las distancias desde su posición de equilibrio, y no desde el soporte horizontal. La posición de equilibrio de la masa es el punto en el cual pende en reposo si no actúan fuerzas externas sobre ella. En la citada posición, el peso mg es compensado exactamente con la fuerza de restitución del resorte. Así pues, en su posición de equilibrio, el resorte ha sido alargado una longitud Δl, donde $k\,\Delta l = mg$. Se denotará por $y = 0$ a esta posición inicial y se tomará como positiva la dirección hacia abajo. Se denotará por $y(t)$ la posición de la masa en el tiempo t. Para calcular $y(t)$ se necesita la fuerza total que actúa sobre la masa m. Ésta es la suma de las cuatro fuerzas independientes W, R, D y F.

(i) La fuerza $W = mg$ es el peso de la masa y tira de ella hacia abajo. Esta fuerza es positiva, ya que la dirección hacia abajo es la dirección positiva para y.

(ii) La fuerza R es la fuerza de restitución del resorte, que es proporcional al alargamiento o al acortamiento $\Delta l + y$ del resorte. Actúa siempre para restituir la longitud natural del resorte. Si $\Delta l + y > 0$, entonces R es negativa, así que $R = -k(\Delta l + y)$,

y si $\Delta l + y < 0$ entonces R es positiva, de modo que $R = -k(\Delta l + y)$. De cualquier modo

$$R = -k(\Delta l + y).$$

(iii) La fuerza D constituye el amortiguamiento o efecto de fricción, y la ejerce el medio sobre la masa m. (La mayoría de los fluidos, tales como aceite, agua y aire, tienden a oponerse al movimiento de un objeto a través de ellos.) Esta fuerza actúa siempre en dirección opuesta a la de movimiento y es, con frecuencia, proporcional a la magnitud de la velocidad dy/dt. Si la velocidad es positiva, es decir, si la masa se mueve en dirección hacia abajo, entonces $D = -c\,dy/dt$, y si la velocidad es negativa, entonces $D = -c\,dy/dt$. En cualquier caso,

$$D = -c\,dy/dt.$$

(iv) La fuerza F es la externa que se aplica sobre la masa. Esta acción se dirige hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si la fuerza es positiva o negativa. En general, tal fuerza dependerá explícitamente del tiempo.

De la segunda ley de Newton del movimiento se tiene que (Sección 1.7)

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= W + R + D + F \\ &= mg - k(\Delta l + y) - c\frac{dy}{dt} + F(t) \\ &= -ky - c\frac{dy}{dt} + F(t), \end{aligned}$$

ya que $mg = k\,\Delta l$. Por lo tanto, la posición $y(t)$ de la masa satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F(t) \tag{1}$$

donde m, c y k son constantes no negativas. En este caso se usará el Sistema Internacional de Unidades SI, de modo que F se medirá en newtons, y en metros, y t en segundos. En tal caso, la unidad de k es N/m; la unidad de c es N · s/m y la unidad de m es el kilogramo (N · s^2/m).

(a) *Vibraciones libres.*
Se considerará primero el caso más sencillo de movimiento libre, no amortiguado. En tal caso la ecuación (1) se reduce a

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \tag{2}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$. La solución general de (2) es

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\,\text{sen}\,\omega_0 t. \tag{3}$$

Para analizar las soluciones de (3) es conveniente escribir la ecuación como una función coseno. Esto se logra con ayuda del siguiente lema.

LEMA 1. *Toda función $y(t)$ de la forma* (3) *puede expresarse en la forma más sencilla*

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) \tag{4}$$

donde $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\delta = \tan^{-1} b/a$.

DEMOSTRACIÓN. Se comprobará que las expresiones (3) y (4) son iguales. Para ello se calcula

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos\omega_0 t\cos\delta + R\,\text{sen}\,\omega_0 t\,\text{sen}\,\delta$$

y de la Figura 2 se tiene que $R\cos\delta = a$ y $R\,\text{sen}\,\delta = b$. De manera que

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = a\cos\omega_0 t + b\,\text{sen}\,\omega_0 t. \qquad \square$$

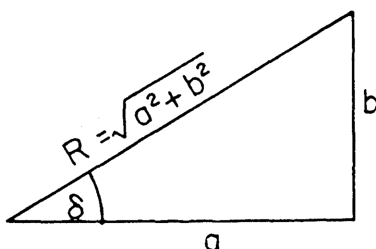


FIGURA 2.

En la Figura 3 se graficó la función $y = R\cos(\psi_0 t - \delta)$. Hay que notar que $y(t)$ siempre está entre $-R$ y $+R$, y que el movimiento de la masa es periódico (se repite en cualquier intervalo de magnitud $2\pi/\omega_0$). Este fenómeno es conocido como *movimiento armónico simple*; R se denomina *amplitud* del movimiento; δ es el *ángulo de fase* del movimiento, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ es el *período natural* del movimiento y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la *frecuencia natural* del sistema.

(b) *Vibraciones libres amortiguadas.*
Si se incluye el efecto de amortiguamiento, entonces la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{5}$$

Las raíces de la ecuación característica $mr^2 + cr + k = 0$ son

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

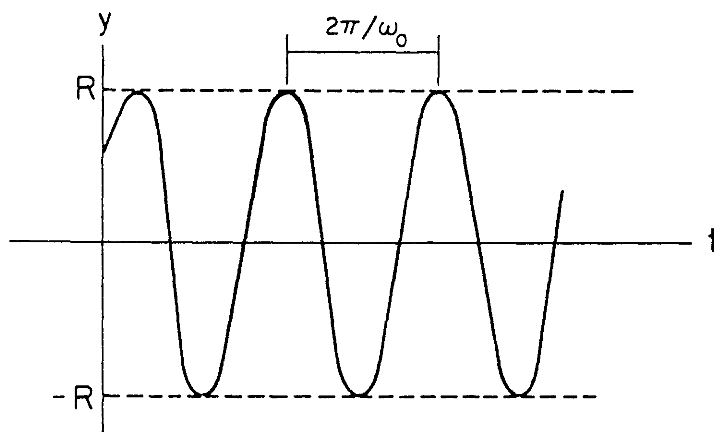


FIGURA 3. Gráfica de $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$

Así pues, hay tres casos que considerar, dependiendo de si $c^2 - 4km$ es positivo, negativo o igual a cero.

(i) $c^2 - 4km > 0$. En este caso, tanto r_1 como r_2 son negativos y toda solución $y(t)$ de (5) tiene la forma

$$y(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}.$$

(ii) $c^2 - 4km = 0$. En este caso, toda solución $y(t)$ de (5) es del tipo

$$y(t) = (a + bt)e^{-ct/2m}.$$

(iii) $c^2 - 4km < 0$. En este caso, toda solución $y(t)$ de (5) es del tipo

$$y(t) = e^{-ct/2m}[a\cos\mu t + b\operatorname{sen}\mu t], \qquad \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}.$$

Los primeros dos casos se conocen como *sobreamortiguamiento* y *críticamente amortiguado*, respectivamente, y representan movimientos en los cuales la masa, en una posición diferente de la de equilibrio, regresa lentamente a ella. Dependiendo de las condiciones iniciales, es posible pasar una vez por la posición de equilibrio, pero no en más de una ocasión (Ejercicios 2 y 3). El tercer caso, que se conoce como movimiento *subamortiguado*, ocurre con frecuencia en sistemas mecánicos y corresponde a una vibración amortiguada. Con objeto de considerar esto, se aplica el Lema 1 para escribir la función

$$y(t) = e^{-ct/2m}[a\cos\mu t + b\operatorname{sen}\mu t]$$

en la forma

$$y(t) = Re^{-ct/2m}\cos(\mu t - \delta).$$

El desplazamiento y oscila entre las curvas $y = \pm Re^{-ct/2m}$, y representa una curva coseno con amplitud decreciente, como se ve en la Figura 4.

Ahora bien, obsérvese que el movimiento de la masa siempre tiende a decrecer si existe amortiguamiento en el sistema. En otras palabras, cualquier perturbación inicial

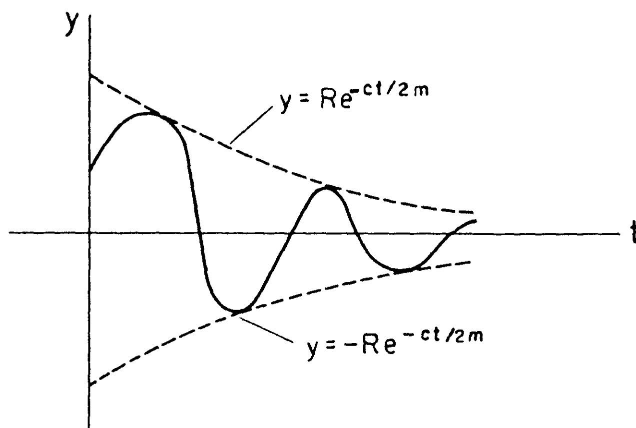


FIGURA 4. Gráfica de $Re^{-ct/2m1}\cos(\mu\tau - \delta)$

del sistema se disipa debido al término de amortiguamiento en el sistema. Ésta es la razón por la que los sistemas masa-resorte-amortiguador son tan útiles en los sistemas mecánicos; pueden servir para amortiguar cualquier perturbación indeseable. Por ejemplo, el golpe que se transmite a un automóvil debido a una irregularidad del camino es aminorado por los amortiguadores del vehículo, y el ímpetu del retroceso del cañón de un arma se disipa mediante un sistema masa-resorte-amortiguador incorporado al dispositivo.

(c) *Vibraciones forzadas amortiguadas.*
Si ahora se introduce una fuerza externa $F(t) = F_0\cos\omega t$, entonces la ecuación diferencial que regula el movimiento de la masa es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0\cos\omega t. \tag{6}$$

Con el método de la conjetura sensata, es posible obtener una solución particular $\psi(t)$ de (6) de la forma

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}\left[(k-m\omega^2)\cos\omega t + c\omega\operatorname{sen}\omega t\right]\\ &= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}\left[(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2\right]^{1/2}\cos(\omega t-\delta)\\ &= \frac{F_0\cos(\omega t-\delta)}{\left[(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2\right]^{1/2}}\end{aligned} \tag{7}$$

donde $\tan\delta = c\omega(k - m\omega^2)$. Por lo tanto, toda solución $y(t)$ de (6) debe ser del tipo

$$y(t) = \phi(t) + \psi(t) = \phi(t) + \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\left[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{1/2}} \tag{8}$$

donde $\phi(t)$ es una solución de la ecuación homogénea

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{9}$$

Sin embargo, se ha visto que la solución $\phi(t)$ de (9) tiende a cero cuando t tiende a infinito. Así pues, para t grande, la ecuación $y(t) = \psi(t)$ describe con alta precisión la posición de la masa m, independientemente de su velocidad y posición iniciales. Por tal razón se denomina a $\psi(t)$ la parte *estacionaria* de la solución (8), mientras que $\phi(t)$ es conocida como la parte *transitoria* de la solución.

(d) *Vibraciones libres forzadas.*
Ahora se considerará el caso sin amortiguamiento y con una fuerza externa que es periódica y tiene la forma $F(t) = F_0 \cos\omega t$ (vibración libre forzada). En este caso, la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa m es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \qquad \omega_0^2 = k/m. \tag{10}$$

El caso $\omega \neq \omega_0$ no tiene interés; toda solución de $y(t)$ de (10) tiene la forma

$$y(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t,$$

y es, por tanto, la suma de dos funciones periódicas con periodos distintos. Se expone un caso interesante cuando $\omega = \omega_0$; es decir, cuando la frecuencia ω de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural del sistema. Este caso se conoce como el de *resonancia*, y la ecuación diferencial del movimiento si la masa es m es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t. \tag{11}$$

Se encontrará una solución particular $\psi(t)$ de (11) como la parte real de una solución con valores complejos $\phi(t)$ de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}e^{i\omega_0 t}. \tag{12}$$

Dado que $e^{i\omega_0 t}$ es una solución de la ecuación homogénea $y'' + \omega_0^2 y = 0$, se sabe que (12) es una solución particular $\phi(t) = Ate^{i\omega_0 t}$, para cualquier constante A. Calculando

$$\phi'' + \omega_0^2\phi = 2i\omega_0 A e^{i\omega_0 t}$$

se ve que

$$A = \frac{1}{2i\omega_0}\frac{F_0}{m} = \frac{-iF_0}{2m\omega_0}.$$

Por lo tanto,

$$\phi(t) = \frac{-iF_0t}{2m\omega_0}(\cos\omega_0 t + i\operatorname{sen}\omega_0 t)$$

$$= \frac{F_0t}{2m\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t - i\frac{F_0t}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t$$

es una solución particular de (12), y

$$\psi(t) = \operatorname{Re}\{\phi(t)\} = \frac{F_0t}{2m\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

es una solución particular de (11). Por lo tanto, toda solución $y(t)$ de (11) es del tipo

$$y(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{F_0t}{2m\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t \tag{13}$$

para las constantes c_1, c_2.

Ahora bien, la suma de los primeros dos términos en (13) es una función periódica del tiempo. Sin embargo, el tercer término representa una oscilación con amplitud creciente, como se ve en la Figura 5. Así pues, si la fuerza externa $F_0\cos\omega t$ está en resonancia con la frecuencia natural del sistema, entonces provocará siempre oscilaciones no acotadas. Un fenómeno de esa naturaleza fue responsable del colapso del Puente de Tacoma (Sección 2.6.1.) y de muchas otras catástrofes mecánicas.

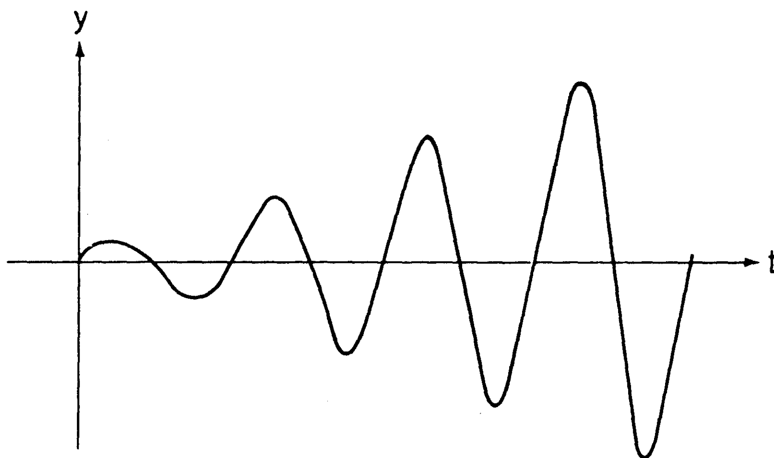


FIGURA 5. Gráfica de $f(t) = At\operatorname{sen}\omega_0 t$.

EJERCICIOS

1. Se ha encontrado experimentalmente que una masa igual a 1 kg estira un resorte (49/320) m. Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante si se desprecia la resistencia del aire y la masa es llevada a una posición (¼) m más abajo de su posición de equilibrio y luego se suelta (úsese $g = 9.8\ \text{m/s}^2$).

2. Sea $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, con $|A| + |B| \neq 0$.
   (a) Demuestre que $y(t)$ es igual a cero a lo más una vez.
   (b) Compruebe que $y'(t)$ es igual a cero cuando mucho una vez.

3. Sea $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$, con $|A| + |B| \neq 0$.
   (a) Pruebe que $y(t)$ es igual a cero a lo más una vez.
   (b) Demuestre que $y'(t)$ es igual a cero cuando mucho una vez.

4. Un pequeño objeto de masa igual a 1 kg se encuentra sujeto a un resorte con constante de restitución igual a 2 N/m. El sistema masa-resorte está inmerso en un medio viscoso con constante de amortiguamiento igual a 3 N · s/m. En el tiempo $t = 0$, la masa se encuentra ¼ m por abajo de la posición de equilibrio, desde donde es soltada. Demuestre que la masa regresará a la posición de equilibrio conforme t tiende a infinito.

5. Un pequeño objeto de masa igual a 1 kg se encuentra sujeto a un resorte con constante de restitución igual a 1 N/m y sumergido en un medio viscoso con constante de amortiguamiento igual a 2 N · s/m. En el tiempo $t = 0$, la masa es lanzada con una velocidad de 1 m/s en dirección hacia arriba desde una posición inicial ¼ m por abajo de la posición de equilibrio. Demuestre que la masa sobrepasará una vez la posición de equilibrio para volver después lentamente a dicha posición.

6. Un pequeño objeto de mas a iguala a 4 kg se encuentra sujeto a un resorte con constante de restitución igual a 64 N/m, y es afectado por una fuerza externa $F(t) = A\cos^3 \omega t$. Calcule todos los valores de ω para los cuales hay resonancia.

7. El cañón de un tanque M60 (vehículo de combate) se encuentra sujeto a un sistema con una constante de restitución de $100\alpha^2$, y una constante de amortiguamiento de 200α en las unidades apropiadas. La masa del cañón es igual a 100 kg. Suponga que el desplazamiento $y(t)$ de dicho cañón con respecto a su posición de equilibrio satisface el siguiente problema de valor inicial después de haber sido accionado en el tiempo $t = 0$.

$$100y'' + 200\alpha y' + 100\alpha^2 y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 100 \text{ m/s}.$$

   Se desea que un segundo más tarde, la cantidad $y^2 + (y')^2$ sea menor que 0.01. ¿Qué tamaño debe tener α para garantizar que pase tal cosa? (Los sistemas masa-resorte-amortiguador en tales tanques M60 que Estados Unidos surtió a Israel están críticamente amortiguados; por ello son los preferidos para combates en el desierto, donde se desea repetir los disparos lo más pronto posible.

8. Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene la propiedad de que su constante de restitución k es nueve veces su masa m, y su constante de amortiguamiento c es 6 veces su masa. Al estar la masa en la posición de equilibrio en el tiempo $t = 0$, actúa sobre ella una fuerza externa descrita por $F(t) = (3 \operatorname{sen} 3t)$. El resorte se rompe si es estirado 5 m a partir de su posición de equilibrio. Demuestre que el resorte no se rompe si $m \geq 1/5$ kg.

9. Un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 1$, $k = 2$ y $c = 2$ (en sus unidades respectivas) se halla en equilibrio. En el tiempo $t = 0$, una fuerza externa $F(t) = \pi - t\ N$ actúa sobre el sistema durante un intervalo de tiempo igual a π. Halle la posición de la masa para todo tiempo $t > \pi$.

10. Una masa de 1 kg está sujeta al extremo de un resorte con constante de restitución $k = 64$ N/m. Al hallarse la masa en la posición de equilibrio en el tiempo $t = 0$, se le aplica una fuerza externa $F(t) = (\frac{1}{2}t)$ N durante un intervalo de tiempo $t_1 = 7\pi/16$ segundos. Suponiendo que no hay amortiguamiento, calcule la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones resultantes.

11. Una masa de 1 kg se halla sujeta a un resorte con constantes de restitución $k = 4$ N/m. Al estar la masa en la posición de equilibrio en el tiempo $t = 0$, se le aplica una fuerza externa $F(t) = (1 + t + \operatorname{sen} 2t)$ N. Si el muelle es estirado en una longitud $(\frac{1}{2} + \pi/4)$ m o más, desde su posición de equilibrio, se romperá. Suponiendo que no hay amortiguamiento, halle el tiempo en el cual se rompe el resorte.

12. Un pequeño objeto de masa igual a 1 kg se encuentra sujeto a un resorte con una constante de restitución $k = 1$ N/m. El sistema masa-resorte se halla en un medio viscoso que tiene una constante de amortiguamiento c. Además se aplica sobre el sistema una fuerza externa $F(t) = (3 - \cos t)$ N. Determine el mínimo valor positivo de c, tal que la magnitud de la solución de estado estacionario no exceda de 5 m.

13. Determine una solución particular $\psi(t)$ de $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$ de la forma $\psi(t) = A \cos(\omega t - \phi)$. Demuestre que la amplitud A es máxima cuando $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}(c/m)^2$. Dicho valor se conoce como la *frecuencia de resonancia del sistema*. ¿Qué ocurre cuando $\omega_0^2 < \frac{1}{2}(c/m)^2$?

2.6.1 *El desastre del Puente de Tacoma*

El primero de julio de 1940 se terminó y abrió al público el Puente del Estrecho de Tacoma, en Puget Sound, Washington, Estados Unidos. Desde el día de su inauguración el puente empezó a presentar oscilaciones verticales, y muy pronto fue bautizado como la "yegua galopante". Aunque parezca extraño, debido a su comportamiento tan peculiar, el tránsito sobre el puente aumentó considerablemente. La gente viajaba cientos de millas en sus vehículos para disfrutar de la curiosa emoción de transitar sobre un puente que se estremecía. El puente fue un gran negocio por un lapso de cuatro meses. Conforme pasaban los días, las autoridades responsables iban adquiriendo más confianza acerca de la seguridad del puente, hasta llegar a pensar, incluso, en la cancelación de su póliza de seguro.

Aproximadamente a las 7 de la mañana del 7 de noviembre de 1940, el puente comenzó a vibrar en forma persistente durante tres horas. Algunas partes de la construcción presentaban movimientos verticales de hasta 1 m (o 3 pie). Alrededor de las 10 de la mañana algo pareció dispararse y el puente comenzó a oscilar con furia. En un mismo instante una parte de la superficie del puente se encontraba más de 8 m más alto que otra; en el momento siguiente, la primera se encontraba más de 8 m por abajo de la segunda. A las 10:30 de la mañana el puente empezó a crujir, antes de derrumbarse finalmente a las 11:10 de la mañana. Por fortuna, sólo se encontraba un automóvil sobre el puente en el momento del siniestro. Era el del reportero de un periódico local que tuvo que abandonar el vehículo con su único ocupante, un perro mascota, al momento en que el puente iniciara sus violentas sacudidas. Aunque con algunas lesiones, el reportero logró alcanzar un lugar seguro, arrastrándose de rodillas y asiéndose fuertemente

a la guarnición del puente. Su perro y el automóvil cayeron al vacío junto con la estructrua. Esa fue la única vida que cobró el desastre.

Hubieron muchos incidentes irónicos y humorísticos relacionados con el colapso del puente de Tacoma. Cuando empezó a vibrar violentamente, las autoridades notificaron al profesor F.B. Farquharson, de la Universidad de Washington. Dicho investigador había realizado muchas simulaciones con un modelo del puente y aseguraba a todos que se trataba de un sistema estable. El profesor fue la última persona en abandonar el puente. Incluso cuando la estructura oscilaba más de 8 m hacia arriba y hacia abajo, él se hallaba realizando observaciones científicas, probablemente sin percatarse del colapso inminente de la estructura. Cuando los movimientos incrementaron su violencia, el profesor se dirigió a un lugar seguro, siguiendo científicamente la línea amarilla que se encontraba en el centro del camino. El fue una de las personas que más se sorprendieron cuando la estructura cayó al agua.

Una de las pólizas de seguro que amparaban al puente había sido suscrita por un agente viajero local, quien se embolsó el dinero de la prima y no reportó la póliza por 800 000 dólares a su compañía. Al recibir, más adelante, su sentencia, señaló irónicamente que su fraude no hubiera sido descubierto nunca de haber aguantado el puente una semana más, ya que las autoridades que controlaban éste, tenían pensado cancelar todas las pólizas de seguro.

Cerca del puente se encontraba un gran anuncio de un banco local, con la frase: "Tan seguro como el puente de Tacoma". Inmediatamente después del colpaso, varios empleados del banco se apresuraron a quitar el rótulo.

Después del derrumbe del puente de Tacoma, el gobernador del estado pronunció un discurso muy emotivo en el cual declaró: "Volveremos a construir exactamente el mismo puente, y de la misma manera que antes". Al escucharlo el famoso ingeniero von Karman envió al citado gobernador un telegrama que decía: "Si construyen exactamente el mismo puente, y exactamente de la misma manera que antes, entonces se desplomará exactamente en el mismo río, y exactamente del mismo modo que antes".

El colapso del puente de Tacoma se debió a un fenómeno aerodinámico conocido como *golpeteo vibrante*, el cual puede explicarse brevemente de la siguiente manera. Si se tiene un obstáculo frente a una corriente de aire o líquido, entonces se forma una "cauda de vórtices" después del obstáculo. Dichos remolinos fluyen con una periodicidad determinada que depende de la forma y el tamaño de la estructura, así como de la velocidad de la corriente (Fig. 1). Debido a que los vórtices se separan en forma alternada hacia cada uno de los lados del obstáculo, éste se ve afectado por una fuerza periódica perpendicular a la dirección de la corriente y de una magnitud igual a $F_0 \cos \omega t$. El coeficiente F_0 depende de la forma de la estructura. Cuanto menos "aerodinámica" sea ésta, tanto mayor será el coeficiente F_0 y, por lo tanto, la amplitud de la fuerza. Por ejemplo, el flujo de aire alrededor de un ala de avión con ángulo de ataque

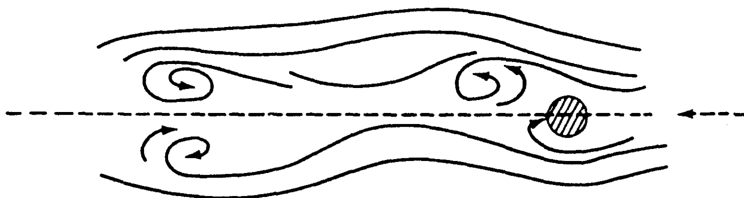


FIGURA 1.

pequeño es muy regular, de modo que la cauda de vórtices no está bien definida y el coeficiente F_0 es muy pequeño. La estructura nada aerodinámica de la suspensión de un puente es otra cosa, y es de esperar que actúe una fuerza de mayor amplitud. Así pues, una estructura suspendida en una corriente de aire sufré los efectos de dicha fuerza y pasa, por lo tanto, a un estado de vibraciones forzadas. El grado de peligrosidad del movimiento, dependerá de lo cerca que se encuentre la frecuencia natural del sistema de la frecuencia respecto de la fuerza externa (recuérdese que los puentes están hechos de acero, un material altamente elástico). Si las dos frecuencias coinciden, se presenta el fenómeno de resonancia y las oscilaciones destruirán el sistema, si éste no está suficientemente amortiguado. Ya se ha visto el tipo de oscilaciones que fueron las responsables del colapso del puente de Tacoma. También se ha observado resonancia producida por la separación de los vórtices en las chimeneas industriales de acero y en los periscopios de submarinos.

El fenómeno de resonancia fue también responsable del colapso del puente colgante de Broughton, cerca de Manchester, Inglaterra, en el año de 1831. El derrumbe ocurrió cuando una formación de soldados marchaba con ímpetu sobre el puente, aplicando una *fuerza periódica de amplitud bastante grande*. La frecuencia de dicha fuerza resultó ser igual a la frecuencia natural del puente, y se indujeron grandes oscilaciones que llevaron al puente al colapso. Esa es la razón por la cual ahora todos los soldados interrumpen la cadencia del paso al cruzar sobre un puente.

EPÍLOGO. El padre de uno de mis alumnos es un ingeniero que trabajó en la construcción del puente Bronx Whitestone, en la ciudad de Nueva York. El me informó que los planos de este puente eran muy similares a los del de Tacoma. Inmediatamente después del colapso del puente de Tacoma, los planos fueron modificados inmediatamente.

2.6.2. *Redes eléctricas*

Ahora se analizará brevemente un circuito eléctrico simple, en serie, como el que aparece en la Figura 1. El símbolo E representa la tensión de una fuente de fuerza electromo-

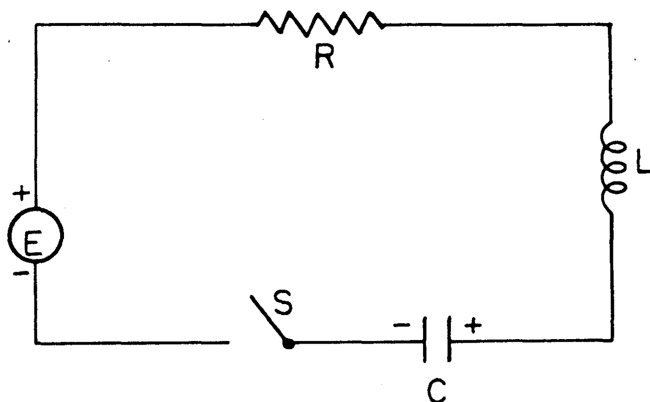


FIGURA 1. Un circuito simple en serie

triz. Puede tratarse de una batería o de un generador que produce una diferencia de potencial eléctrico (en volts), que hace fluir por el circuito una corriente I (en amperes) cuando se cierra el interruptor S. El símbolo R (un resistor) representa una resistencia al flujo, como la que se produce en una lámpara incandescente o en un tostador. Al pasar la corriente a través de una bobina L se produce un campo magnético que se opone a cualquier cambio en la corriente que circula a través de ella. El cambio en el voltaje inducido en la bobina es proporcional a la rapidez de variación de la corriente, y la constante de proporcionalidad se conoce como la inductancia L del citado elemento. Un capacitor C consiste normalmente en dos placas metálicas separadas por un material aislante que permite un flujo pequeño de corriente. Un capacitor tiene el efecto de detener el flujo de corriente cuando alguna de las placas se carga.

Sea $Q(t)$ la carga del capacitor en el tiempo t. Para obtener una ecuación diferencial que se cumpla para $Q(t)$ se usará la siguiente información:

Segunda Ley de Kirchoff. En un circuito cerrado, la tensión aplicada es igual a la suma de las caídas de potencial en cada uno de los componentes del circuito.

Ahora bien:

(i) La caída de tensión (en volts) a través de una resistencia de R ohms es igual a RI (ley de Ohm).

(ii) La caída a través de una inductancia de L henrys es igual a $L(dI/dt)$.

(iii) La caída a través de una capacitancia de C farads es igual a Q/C.

Por lo tanto,

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C},$$

y, dado que $I(t) = dQ(t)/dt$, se ve que

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{1}$$

Nótese la semejanza de la ecuación (1) con la ecuación de una masa en vibración. Entre las semejanzas de los circuitos eléctricos con las vibraciones mecánicas se tiene la propiedad de resonancia. Sin embargo, contrariamente a lo que pasa en los sistemas mecánicos, la resonancia tiene aplicaciones deseables en los sistemas eléctricos. Por ejemplo, la perilla de sintonía de un radio se utiliza para variar la capacitancia en el circuito respectivo. De tal modo se cambia la frecuencia de resonancia (Ejercicio 13 de la Sección 2.6) hasta que coincide con la frecuencia de alguna de las señales de radio que se están recibiendo. La amplitud de la corriente producida por dicha señal será mucho mayor que la de otras señales. De esta manera, el circuito de sintonía selecciona la estación deseada.

EJERCICIOS

1. Suponga que en un circuito simple en serie no hay resistencia ni se ha aplicado tensión. Demuestre que la carga Q en el capacitor es periódica en el tiempo con fre-

cuencia $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. La cantidad $\sqrt{1/LC}$ se conoce como *frecuencia natural* del circuito.

2. Suponga que está abierto un circuito simple en serie que consta de un inductor, un resistor y un capacitor, y que hay una carga inicial de $Q_0 = 10^{-8}$ coulombs (C) en el capacitor. Halle la carga en el capacitor y la corriente que fluye en el circuito, después de que el interruptor se cierra en cada uno de los siguientes casos.
   (a) $L = 0.5$ henrys, $c = 10^{-5}$ farads, $R = 1000$ ohms.
   (b) $L = 1$ henrys, $c = 10^{-4}$ farads, $R = 200$ ohms.
   (c) $L = 2$ henrys, $c = 10^{-6}$ farads, $R = 2000$ ohms.

3. Un circuito simple en serie tiene un inductor de 1 henry (H), un capacitor de 10^{-6} farads (F) y un resistor de 1000 ohms (Ω). La carga inicial del capacitor es cero. si se conecta el circuito a una batería de 12 volts (V) y se cierra su interruptor en el tiempo $t = 0$, halle la carga del capacitor un segundo más tarde, y también la carga de estado estacionario.

4. Un capacitor de 10^{-3} F está en serie con una tensión aplicada de 12 V y con un inductor de 1 H. En el tiempo $t = 0$, tanto Q como I son cero.
   (a) Calcule la frecuencia natural y el período de las oscilaciones eléctricas.
   (b) Halle la carga máxima del capacitor y la corriente máxima que fluye en el circuito.

5. Demuestre que si no hay resistencia en un circuito y si la tensión que se aplica es de la forma $E_0 \operatorname{sen} \omega t$, entonces la carga en el capacitor será no acotada para $t \to \infty$ si $\omega = \sqrt{1/LC}$. Este es el fenómeno de resonancia.

6. Considere la ecuación diferencial

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E_0 \cos \omega t. \tag{i}$$

   Es posible obtener una solución particular $\psi(t)$ de (i) como la parte real de una solución particular $\phi(t)$ de

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E_0 e^{i\omega t}. \tag{ii}$$

   (a) Demuestre que

$$i\omega\phi(t) = \frac{E_0}{R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} e^{i\omega t}.$$

   (b) La cantidad $Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$ se conoce como impedancia compleja del circuito. El reciproco de Z es conocido como admitancia, y a las partes real e imaginaria de $1/Z$ se la llama conductancia y susceptancia. Determine la admitancia, la conductancia y la susceptancia de dicho circuito.

7. Considere un circuito simple en serie con valores dados de L, R y C, y una tensión $E_0 \operatorname{sen} \omega t$. ¿Para qué valores de ω será máxima la corriente de estado estacionario?

2.7 UN MODELO PARA LA DETECCIÓN DE LA DIABETES

La diabetes mellitus es un trastorno del metabolismo que se caracteriza por el exceso de azúcar tanto en la sangre como en la orina. Un cuerpo con diabetes es incapaz de consumir los azúcares, almidones y carbohidratos debido a una insuficiencia en la cantidad de insulina disponible. La diabetes se diagnostica usualmente por medio de una prueba de tolerancia a la glucosa (PTG). Para dicha prueba, el paciente se presenta después de un ayuno de toda la noche y recibe una dosis grande de glucosa (azúcar en la forma en que aparece normalmente en la corriente sanguínea). Se realizan mediciones durante las siguientes tres a cinco horas para determinar la concentración de glucosa en la sangre de la persona. Dichas mediciones sirven para el diagnóstico de diabetes. Una seria dificultad que tiene que ver con este método de diagnosis es la falta de criterios universalmente aceptados para la interpretación de los resultados de la prueba de tolerancia a la glucosa. Tres médicos que interpreten los resultados de una PTG pueden dar tres diagnósticos diferentes. Recientemente un médico de la región de Rhode Island diagnosticó un caso de diabetes tras haber revisado los resultados de una PTG. Un segundo médico declaró que se trataba de una persona sana. Para aclarar las dudas, se enviaron los resultados de la PTG a un especialista de Boston. Después de examinar los resultados el especialista concluyó que el paciente tenía un tumor en la pituitaria.

A mediados de la década de 1960, los doctores Rosevear y Molnar de la Clínica Mayo, y Ackerman y Gatewood de la Universidad de Minnesota, descubrieron un criterio bastante confiable para interpretar los resultados de una PTG. Su descubrimiento surgió de un modelo muy sencillo que desarrollaron para el sistema regulatorio de la glucosa en la sangre. Dicho modelo se basa en los siguientes principios sencillos y bien conocidos de biología elemental.

1. La glucosa desempeña un papel importante en el metabolismo de todos los vertebrados, ya que es una fuente de energía para todos los órganos y tejidos. En cada individuo hay una concentración glucósica óptima en la sangre, y una desviación excesiva de dicho valor óptimo lleva a condiciones patológicas severas y, potencialmente, incluso a la muerte.

2. Los niveles de glucosa en la sangre tienden a constituir un proceso autorregulado, aunque también influye en ellos una gran variedad de hormonas y otros metabolitos. Entre ellos se encuentran los siguientes:

(i) *Insulina.* Hormona secretada por las células β del páncreas. Después de haber ingerido carbohidratos en alguna forma, el tracto gastrointestinal envía un mensaje al páncreas para secretar más insulina. Además, la glucosa que está en nuestro cuerpo estimula directamente las células β del páncreas para que secrete insulina. Se cree que la insulina ayuda a que los tejidos reciban la glucosa fijándola en las membranas celulares impermeables y permitiendo así que la glucosa pase a través de la membrana hacia el centro de la célula, lugar donde se llevan a cabo la mayor parte de los procesos químicos y biológicos. Sin la insulina necesaria el cuerpo no puede proveerse de la energía requerida.

(ii) *Glucagón.* Hormona secretada por las células α del páncreas. Cualquier exceso de glucosa se almacena en el hígado en forma de glucógeno. Cuando hace falta, esta sustancia se transforma nuevamente en glucosa. La hormona glucagón aumenta la tasa de degradación de glucógeno en glucosa. La evidencia acumulada hasta ahora indica que, tanto la hipoglucemia (bajo nivel de azúcar en la sangre) como el ayuno, promue-

ven la secreción de glucagón, mientras que un alto nivel de glucosa en la sangre interrumple su secreción.

(iii) *Epinefrina* (adrenalina). Hormona secretada por la médula adrenal. La epinefrina es parte de los mecanismos de emergencia para incrementar rápidamente la concentración de glucosa en la sangre en momentos de hipoglucemia extrema. Al igual que el glucagón, la epinefrina acrecienta la tasa de degradación de glucagón en glucosa. Además inhibe la asimilación de glucosa por parte de los tejidos musculares; actúa directamente sobre el páncreas para inhibir la secreción de insulina, y ayuda a la conversión de lactasa a glucosa en el hígado.

(iv) *Glucocorticoides.* Hormonas como el cortisol que son secretadas por la corteza adrenal. Los glucocorticoides desempeñan un papel muy importante en el metabolismo de los carbohidratos.

(v) *Tiroxina.* Hormona secretada por la glándula tiroides. Esta hormona ayuda al hígado a formar glucosa a partir de fuentes distintas a los carbohidratos, tales como glicerol, lactasa y aminoácidos.

(vi) *Hormona del crecimiento* (somatotropina). Hormona secretada por la glándula pituitaria en la región denominada anterior. La hormona de crecimiento no sólo afecta directamente a los niveles de glucosa, sino que también tiende a bloquear a la insulina. Se cree que la hormona de crecimiento disminuye la sensibilidad de los músculos y las membranas adiposas a la insulina, reduciendo así la efectividad de ésta para aumentar la captación de glucosa.

El objetivo de Ackerman y su equipo era construir un modelo que describiera con precisión el sistema regulador de la glucosa en la sangre durante una prueba de tolerancia a la glucosa, y en el cual uno o dos parámetros suministraron información, para distinguir entre individuos sanos, casos leves de diabetes y prediabetes. Su modelo es muy simple y requiere solamente un número limitado de muestras de sangre durante una PTG. La atención se centra en dos concentraciones, la de glucosa en la sangre, denotada por G y la concentración hormonal de la red, denotada por H. Esta última se entiende como el efecto acumulado de todas las hormonas pertinentes. Hormonas como la insulina, que abaten las concentraciones de glucosa en la sangre, se consideran hormonas que incrementan H, mientras que las que intensifican la concentración de glucosa, como el cortisol, se consideran hormonas que hacen disminuir H. Hay dos razones por las cuales un modelo simplificado puede todavía constituir una descripción precisa del sistema regulador de glucosa en la sangre. Primeramente, algunos estudios han demostrado que en condiciones normales, o cercanas a ellas, la interacción de una sola hormona, la insulina por ejemplo, con la glucosa de la sangre predomina de tal manera que el uso de un modelo simple con parámetro globalizado es muy adecuado. Además, hay evidencia de que la normoglicemia no necesariamente depende de la normalidad de cada uno de los mecanismos cinéticos del sistema regulador de la glucosa en la sangre. Más bien, depende de cómo responde el conjunto del sistema regulador de glucosa en la sangre y de si dicho sistema está dominado por las interacciones insulina-glucosa.

El modelo básico se describe con las siguientes ecuaciones

$$\frac{dG}{dt} = F_1(G,H) + J(t) \tag{1}$$

$$\frac{dH}{dt} = F_2(G,H). \tag{2}$$

La dependencia de F_1 y F_2, con respecto a G y H significa que los cambios en G y en H están determinados por los valores tanto de G como de H. La función $J(t)$ es la

rapidez externa a la cual aumenta la concentración de glucosa en la sangre. Ahora bien, supóngase que al llegar el paciente en ayunas al hospital, G y H han alcanzado valores óptimos G_0 y H_0. Eso implica que $F_1(G_0, H_0) = 0$ y que $F_2(g_0, H_0) = 0$. Dado que interesan las desviaciones de los valores de G y H respecto de los valores óptimos, se hace la siguiente sustitución

$$g = G - G_0, \qquad h = H - H_0.$$

Entonces

$$\frac{dg}{dt} = F_1(G_0 + g, H_0 + h) + J(t),$$
$$\frac{dh}{dt} = F_2(G_0 + g, H_0 + h).$$

Ahora obsérvese que

$$F_1(G_0 + g, H_0 + h) = F_1(G_0, H_0) + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G} g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H} h + e_1$$

y

$$F_2(G_0 + g, H_0 + h) = F_2(G_0, H_0) + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G} g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H} h + e_2$$

donde e_1 y e_2 son muy pequeñas comparadas con g y h. Por lo tanto, suponiendo que G y H no difieren mucho de G_0 y H_0 y, por consiguiente, omitiendo los términos e_1 y e_2, se ve que

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G} g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H} h + J(t) \tag{3}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G} g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H} h. \tag{4}$$

Ahora bien, a priori no es claro cómo determinar los números

$$\frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}, \quad \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}, \quad \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H}.$$

Sin embargo, es posible determinar sus signos. Al referirse a la Figura 1 se ve que dg/dt es negativo para $g > 0$ y $h = 0$, ya que la concentración de glucosa en la sangre disminuirá debido a la acumulación de tal sustancia en los tejidos, así como al almacenamiento en el hígado de un exceso de glucosa en forma de glucógeno. Como consecuencia $\partial F_1(G_0, H_0)/\partial G$ debe ser negativa. De manera similar, $\partial F_1(G_0, H_0)/\partial H$ es negativa, ya que un valor positivo de h tiende a disminuir los niveles de glucosa en la sangre, lo que facilita la asimilación de la misma por parte de los tejidos e incrementa la tasa con la que la glucosa se convierte en glucógeno. El número $\partial F_2(G_0, H_0)/\partial G$ debe ser positivo, ya que un valor positivo de g lleva a las glándulas endocrinas a secretar aquellas hormonas que tienden a incrementar H. Por último, $\partial F_2(G_0, H_0)/\partial H$ debe ser negativa, ya que la concentración de hormonas en la sangre decrece mediante el metabolismo hormonal.

Así pues, las ecuaciones (3) y (4) pueden escribirse en la forma

$$\frac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + J(t) \tag{5}$$
$$\frac{dh}{dt} = -m_3 h + m_4 g \tag{6}$$

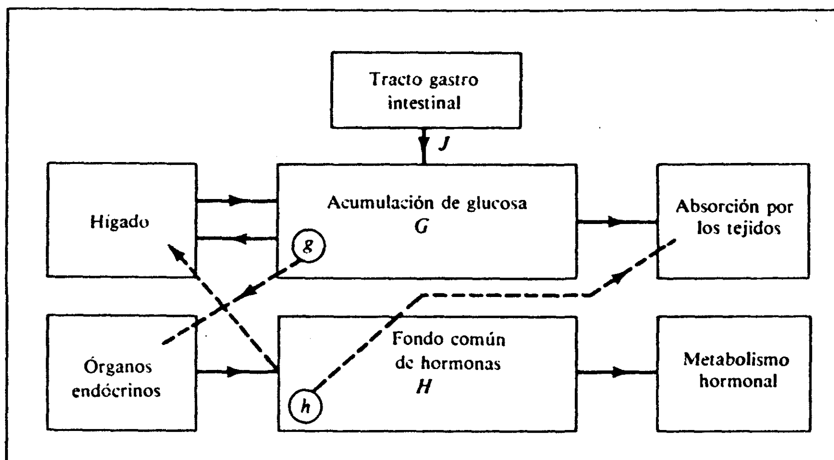


FIGURA 1. Modelo simplificado del sistema regulador de la glucosa en la sangre

donde m_1, m_2, m_3 y m_4 son constantes positivas. Las ecuaciones (5) y (6) son dos ecuaciones de primer orden para g y h. Sin embargo, dado que se mide únicamente la concentración de glucosa en la sangre, sería deseable eliminar la variable h. Eso se puede hacer de la siguiente manera: derivando (5) con respecto a t se obtiene

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} - m_2\frac{dh}{dt} + \frac{dJ}{dt}.$$

Sustituyendo dh/dt a partir de (6) se tiene

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} + m_2m_3h - m_2m_4g + \frac{dJ}{dt}. \tag{7}$$

Obsérvese ahora que a partir de (5) se obtiene que $m_2h = (-dg/dt) - m_1g + J(t)$. Por lo tanto, $g(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2g}{dt^2} + (m_1 + m_3)\frac{dg}{dt} + (m_1m_3 + m_2m_4)g = m_3J + \frac{dJ}{dt}.$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = S(t) \tag{8}$$

donde $\alpha = (m_1 + m_3)/2$, $\omega_0^2 = m_1m_3 + m_2m_4$ y $S(t) = m_3J + dJ/dt$.

Nótese que el segundo miembro de (8) es idéntico a cero, excepto por un corto intervalo de tiempo en el que se ingiere la dosis de glucosa. En la Sección 2.12 se verá cómo se maneja ese tipo de funciones. Para los propósitos del análisis, supóngase que $t = 0$ es el tiempo en el cual la dosis de glucosa se ingirió completamente. Entonces, para $t \geq 0$, $g(t)$ satisface la siguiente ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = 0. \tag{9}$$

Esta ecuación tiene coeficientes positivos. Por tanto, a partir del análisis de la Sección 2.6 (y el Ejercicio 8 de la Sección 2.2.2), $g(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Así pues, el modelo ciertamente concuerda con la realidad al predecir que las concentraciones de glucosa tienden a regresar en algún momento a sus niveles óptimos.

Las soluciones $g(t)$ de (9) son de tres tipos, dependiendo de si $\alpha^2 - \omega_0^2$ es positivo, negativo o igual a cero. Por supuesto que estos tres tipos corresponden a los casos de oscilaciones sobreamortiguadas, críticamente amortiguadas y subamortiguadas que se estudiaron en la Sección 2.6. Para el siguiente análisis se supondrá que $\alpha^2 - \omega_0^2$ es negativo; los otros dos casos pueden analizarse en forma similar. Si $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, entonces la ecuación característica de (9) tiene raíces complejas. En este caso puede verificarse fácilmente (Ejercicio 1) que cualquier solución $g(t)$ de (9) es del tipo

$$g(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta), \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \tag{10}$$

Por lo tanto,

$$G(t) = G_0 + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta). \tag{11}$$

En la ecuación (11) hay cinco incógnitas G_0, A, α, ω_0 y δ. Una manera de determinarlas es la siguiente: La concentración de glucosa en la sangre del paciente un momento antes de recibir la dosis de glucosa es G_0. Por ello, es posible determinar G_0 midiendo la concentración de glucosa en la sangre del individuo inmediatamente después de su llegada a la clínica. Además, si se toman cuatro mediciones adicionales G_1, G_2, G_3 y G_4 de la concentración de glucosa en la sangre del paciente en los tiempos t_1, t_2, t_3 y t_4, es posible determinar A, α, ω_0 y δ, a partir de las cuatro ecuaciones siguientes:

$$G_j = G_0 + Ae^{-\alpha t_j}\cos(\omega t_j - \delta), \qquad j = 1,2,3,4.$$

Un método mejor para determinar G_0, A, α, ω_0 y δ es tomar n mediciones G_1, G_2, ..., G_n de la concentración de glucosa en la sangre del paciente en los tiempos t_1, t_2, ..., t_n. Un valor característico de n es de 6 ó 7. Después se encuentran valores óptimos para G_0, A, α, ω_0 y δ, de modo que se minimice el error de mínimos cuadrados

$$E = \sum_{j=1}^{n} \left[G_j - G_0 - Ae^{-\alpha t_j}\cos(\omega t_j - \delta) \right]^2$$

El problema de minimizar E puede resolverse en una computadora digital, y Ackerman y su grupo (véase la referencia al final de la sección) ofrecen un programa en Fortran para determinar los valores óptimos para G_0, A, α, ω_0 y δ. Este método es preferible al primero, ya que la ecuación (11) es solamente una fórmula aproximada para $G(t)$. Consecuentemente, es posible encontrar valores G_0, A, α, ω_0 y δ, tales que satisfagan exactamente la ecuación (11) en cuatro puntos t_1, t_2, t_3 y t_4, pero son una mala aproximación de los datos para otros valores del tiempo. El segundo método ofrece, en general, una mejor aproximación de los datos en el intervalo completo, ya que implica más mediciones.

Ackerman y su grupo observaron en un gran número de experimentos que un pequeño error de medición en G podía producir un error muy grande en α. Por ello no es confiable cualquier criterio de diagnosis de diabetes que involucre al parámetro α. Sin embargo, el parámetro ω_0, es decir, la frecuencia natural del sistema, fue relativamente insensible a errores experimentales en las mediciones de G. Así pues, puede considerarse a ω_0 como el descriptor básico de la respuesta a una prueba de tolerancia a la glu-

cosa o PTG. Para los fines del análisis, es más conveniente usar el periodo natural correspondiente $T_0 = 2\pi/\omega_0$. El hecho importante es que los datos obtenidos de un gran número de fuentes indican que *un valor de menos de cuatro horas para T_0 indica normalidad, mientras que un valor apreciablemente mayor de cuatro horas implica diabetes leve.*

OBSERVACIÓN 1. En nuestra cultura, el periodo usual entre tomas de alimentos es de aproximadamente de 4 horas. Esto hace interesante y posible que algunos factores sociológicos puedan desempeñar también un papel importante en el sistema regulador de la glucosa en la sangre.

OBSERVACIÓN 2. Es importante insistir en que el modelo descrito puede ser usado sólo para diagnosticar casos leves de diabetes o casos de prediabetes, pues se supuso en el análisis que era pequeña la desviación g que presentaba G con respecto a su valor óptimo G_0. Desviaciones grandes de G con respecto a G_0 indican normalmente casos severos de diabetes, o de diabetes *insipidus*, la cual es un trastorno del lóbulo posterior de la glándula pituitaria.

Un grave inconveniente que tiene el modelo simplificado es que en ocasiones no se ajusta bien a los valores obtenidos en el periodo de tres a cinco horas después de la ingestión de la dosis de glucosa. Esto indica, por supuesto, que algunas variables como la epinefrina y el glucagón desempeñan un papel importante en ese tiempo, de modo que dichas variables deberían ser incluidas por separado en el modelo, y no globalizadas junto con la insulina. De hecho, la evidencia indica que los niveles de epinefrina pueden aumentar fuertemente durante la fase de recuperación de la respuesta a la PTG, una vez que los niveles de glucosa disminuyen más allá de los niveles en el periodo de ayuno. Esto también puede verse directamente de la ecuación (9). Si $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, entonces $g(t)$ puede tener la forma que se muestra en la Figura 2. Nótese que $g(t)$ desciende muy rápidamente desde un valor bastante grande hasta tomar valores negativos. Por ello, es posible que el cuerpo interprete la situación como emergencia y secrete entonces grandes cantidades de epinefrina.

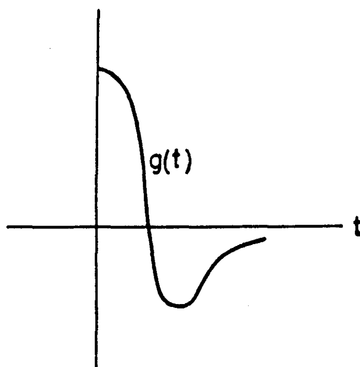


FIGURA 2. Gráfica de $g(t)$ si $\alpha^2 - \omega^2{}_0 > 0$.

Los investigadores médicos reconocieron desde hace mucho la necesidad de incluir a la epinefrina como una variable, por sí sola, en cualquier modelo del sistema regulador de glucosa en la sangre. Sin embargo, se vieron frenados por el hecho de que no había métodos confiables para medir la concentración de epinefrina en el fluido sanguíneo, así que, para fines prácticos, suponían que el nivel de dicha sustancia permanecía constante durante una prueba de tolerancia a la glucosa. El autor fue informado recientemente de que algunos investigadores del Rhode Island Hospital han estructurado un método preciso para medir la concentración de epinefrina en la sangre. De modo que será posible en un futuro inmediato desarrollar y probar modelos más extensos del sistema regulador de glucosa en la sangre. Ojalá que esto lleve a criterios más confiables para el diagnóstico de la diabetes.

BIBLIOGRAFÍA

E. Ackerman, L. Gatewook, J. Rosevear y Gl. Molnar, Blood glucose regulation and diabetes, *Concepts and Models of Biomathematics*, F. Heinmets (cap. 4), Marcel Dekker (comp.), 1969, págs. 131-156.

EJERCICIOS

1. Deduzca la ecuación (10).

2. Un paciente que llegó al hospital después de una noche de ayuno presenta una concentración de glucosa en la sangre de 70 mg/100 ml (miligramos de glucosa por 100 mililitros de sangre). Sus concentraciones glucósicas en la sangre 1, 2 y 3 horas después de haber ingerido una cantidad grande de glucosa son 96, 65 y 75 mg/100 ml, respectivamente. Demuestre que el paciente es una persona sana. *Sugerencia:* En el caso subamortiguado, el intervalo de tiempo entre dos ceros sucesivos de $G - G_0$ es mayor que un medio del periodo natural.

Según un famoso especialista en diabetes, las concentraciones de glucosa en la sangre de un paciente no diabético que ingirió una gran cantidad de glucosa se encontraron en los niveles de ayuno, o más bajos, en un máximo de 2 horas. Los Ejercicios 3 y 4 comparan sus diagnósticos con los de Ackerman y su grupo.

3. Inmediatamente después de haber absorbido por completo una gran cantidad de glucosa, la desviación $g(t)$ del nivel de glucosa en la sangre de un paciente con respecto a la concentración óptima, satisface la ecuación diferencial $(d^2g/dt^2) + 2\alpha(dg/dt) + \alpha^2 g = 0$. El tiempo se mide en minutos, de modo que la unidad de α es el inverso de minuto. Demuestre que el paciente es normal de acuerdo con Ackerman y su grupo, si $\alpha > \pi/120\,(\text{min})$, y que el paciente es normal según el famoso especialista si

$$g'(0) < -\left(\tfrac{1}{120} + \alpha\right) g(0).$$

4. La concenctración de glucosa en la sangre de un paciente, después de haber absorbido por completo una gran cantidad de glucosa, satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{1}{20\,(\text{min})}\frac{dG}{dt}+\frac{1}{2500\,(\text{min})^2}G$$

$$=\frac{1}{2500\,(\text{min})^2}75 \text{ mg gluc./100 ml sang.}$$

$$G(0)=150 \text{ mg gluc./100 ml sang.}$$

$$G'(0)=-\alpha G(0)/(\text{min}); \qquad \alpha>\frac{1}{200}\frac{1-4e^{18/5}}{1-e^{18/5}}$$

La concentración óptima del paciente es de 75 mg gluc./100 ml sangre. Muestre que dicho paciente es diabético de acuerdo con Ackerman y su grupo, pero normal según el famoso especialista.

2.8 SOLUCIONES EN SERIES

Se retoma ahora la ecuación lineal homogénea general de segundo orden

$$L[y]=P(t)\frac{d^2y}{dt^2}+Q(t)\frac{dy}{dt}+R(t)y=0 \tag{1}$$

con $P(t)$ diferente de cero en el intervalo $\alpha < t < \beta$. En la Sección 2.1 se mostró que toda solución $y(t)$ de (1) puede escribirse en la forma $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, donde $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de (1). Así pues, el problema de hallar todas las soluciones de (1) se reduce al problema de encontrar solamente dos soluciones. En la Sección 2.2 se trató el caso especial donde P, Q y R son constantes. El siguiente caso más simple es cuando $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ son polinomios en t. Por lo tanto, la forma de la ecuación diferencial indica que se trata de una solución polinomial $y(t)$ de (1). Si $y(t)$ es un polinomio en t, entonces las tres funciones $P(t)y''(t)$, $Q(t)y'(t)$ y $R(t)y(t)$ son también polinomios en t. Así pues, es posible determinar en principio una solución polinomial $y(t)$ de (1), igualando a cero la suma de los coeficientes de las potencias iguales de t en la expresión $L[y]t$. En el siguiente ejemplo se ilustra el método.

EJEMPLO 1 Encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}-2y=0. \tag{2}$$

SOLUCIÓN. Se tratará de hallar dos soluciones polinomiales de (2). Ahora bien, no es evidente de antemano cuál deba ser el grado de las soluciones polinomiales de (2).

Ni siquiera es claro que pueda resolverse el problema con un polinomio de grado finito. Por ello se propone

$$y(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

Derivando

$$\frac{dy}{dt}=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2a_2+6a_3t+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2},$$

de donde $y(t)$ es solución de (2) si

$$\begin{aligned}L[y](t)&=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-2t\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0.\end{aligned}\qquad(3)$$

El paso siguiente es escribir los términos de la primera sumatoria en (3) de modo que el exponente del término general sea n y no $n-2$. Esto se hace sumando 2 a las n en la sumatoria, y restando 2 al límite inferior, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

(Esto se puede comprobar escribiendo los primeros términos de cada una de las dos sumatorias. Una demostración más rigurosa es hacer $m=n-2$. Cuando n es cero, m es -2, y cuando n es infinito, m es también infinito. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{m=-2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}t^m,$$

y dado que m es una variable ficticia o muda, se puede sustituir por n. Más aún, obsérvese que la contribución de esta suma desde $n=-2$ y $n=-1$ es cero, ya que el factor $(n+\ )(n+1)$ es igual a cero en ambos casos. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$$

y puede escribirse (3) en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0.\qquad(4)$$

Igualando a cero la suma de los coeficientes de las potencias iguales de t en (4) se obtiene

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-2a_n=0$$

de modo que

$$a_{n+2}=\frac{2(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{2a_n}{n+2}. \tag{5}$$

La ecuación (5) es una fórmula de recurrencia para los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$. El coeficiente a_n determina al coeficiente a_{n+2}. Así pues, a_0 determina a_2 con la relación $a_2 = 2a_0/2 = a_0$; a_2, a su vez, determina a_4 mediante la relación $2a_2(2 + 2) = a_0/2$; y así sucesivamente. De manera similar, a_1 determina a_3 por medio de la relación $a_3 = 2a_1/(2 + 1) = 2a_1/3$; a_3, a su vez, determina a_5 por la relación $a_5 = 2a_3/(3 + 2) = 4a_1/3 \cdot 5$; y así sucesivamente. Por lo tanto, todos los coeficientes quedan determinados de manera única, una vez que se asignen valores para a_0 y a_1. Los valores de a_0 y a_1 son completamente arbitrarios. Sin embargo, eso era de esperar, ya que si

$$y(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots$$

entonces los valores de y y y' en $t = 0$ son a_0 y a_1, respectivamente. Así pues, los coeficientes a_0 y a_1 serán arbitrarios hasta el momento en que se especifiquen condiciones iniciales para y.

Para encontrar dos soluciones de (2), se eligen dos valores diferentes para a_0 y a_1. Las elecciones más sencillas son (i) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, y (ii) $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

(i) $$a_0=1, \qquad a_1=0.$$

En este caso todos los coeficientes impares $a_1, a_3, a_5, \ldots$ son iguales a cero, ya que $a_3 = 2a_1/3 = 0$, $a_5 = 2a_3/5 = 0$, etcétera. Los coeficientes pares se determinan a partir de las relaciones

$$a_2=a_0=1, \qquad a_4=\frac{2a_2}{4}=\frac{1}{2}, \qquad a_6=\frac{2a_4}{6}=\frac{1}{2\cdot 3},$$

y así sucesivamente. Procediendo por inducción, se encuentra que

$$a_{2n}=\frac{1}{2\cdot 3\cdots n}=\frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto,

$$y_1(t)=1+t^2+\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}+\ldots=e^{t^2}$$

es una solución de (2).

(ii) $$a_0=0, \qquad a_1=1.$$

En este caso, todos los coeficientes pares son iguales a cero, y los coeficientes impares se determinan a partir de las relaciones

$$a_3=\frac{2a_1}{3}=\frac{2}{3}, \qquad a_5=\frac{2a_3}{5}=\frac{2}{5}\frac{2}{3}, \qquad a_7=\frac{2a_5}{7}=\frac{2}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3},$$

y así sucesivamente. Procediendo por inducción, se encuentra que

$$a_{2n+1}=\frac{2^n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Así pues, se tiene que

$$y_2(t)=t+\frac{2t^3}{3}+\frac{2^2t^5}{3\cdot 5}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t^{2n+1}}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

es una segunda solución de (2).

Obsérvese ahora que $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son polinomios de grado infinito, a pesar de que los coeficientes $P(t) = 1$, $Q(t) = -2t$ y $R(t) = -2$ son polinomios de grado finito. Este tipo de polinomios se conoce como series de potencias. Antes de continuar se repasarán, brevemente, algunas de las propiedades de las series de potencias.

1. Una serie infinita de la forma

$$y(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n \tag{6}$$

se conoce como *serie de potencias* alrededor de $t = t_0$.

2. Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. Es decir, existe un número ρ no negativo tal que la serie infinita (6) converge para $|t - t_0| < \rho$ y diverge para $|t - t_0| > \rho$. El número ρ se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias.
3. La serie de potencias (6) puede ser derivada o integrada término por término, y la serie resultante tiene el mismo intervalo de convergencia.
4. El método más sencillo (si es que es aplicable) para determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias (6) es el *criterio de Cauchy de la razón*. Supóngase que el valor absoluto de a_{n+1}/a_n tiende a un límite λ cuando n tiende a infinito. Entonces, la serie de potencias (6) converge para $|t - t_0| < 1/\lambda$ y diverge para $|t - t_0| > 1/\lambda$.
5. El producto de dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t - t_0)^n$ da por resultado una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t - t_0)^n$, con $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. El cociente

$$\frac{a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots}{b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots}$$

de dos series de potencias es también una serie de potencias, para toda $b_0 \neq 0$.

6. Muchas de las funciones $f(t)$ que surgen en las aplicaciones pueden desarrollarse en series de potencias, es decir, es posible encontrar coeficientes a_0, a_1, a_2, ... tales que

$$f(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n. \tag{7}$$

Se dice que estas funciones son *analíticas* en $t = t_0$, y la serie (7) se denomina *serie de Taylor* de f alrededor de $t = t_0$. Es posible demostrar fácilmente que si f admite un desarrollo tal, entonces necesariamente $a_n = f^{(n)}(t_0)/n!$, donde $f^{(n)}(t) = d^nf(t)/dt^n$.

7. El intervalo de convergencia de la serie de Taylor de una función $f(t)$ alrededor de t_0, puede determinarse directamente por medio del criterio de la razón de Cauchy y otros métodos similares, o bien, indirectamente por el siguiente teorema de análisis complejo.

TEOREMA 6. *Supóngase que la varible t toma valores complejos, y sea z_0 el punto más cercano a t_0 para el cual no existe f o alguna de sus derivadas. Calcúlese en el plano complejo la distancia ρ entre t_0 y z_0. Entonces la serie de Taylor de f alrededor de t_0 converge para $|t - t_0| < \rho$ y diverge para $|t - t_0| > \rho$.*

Como ejemplo del Teorema 6, considérese la función $f(t) = 1/(1 + t^2)$. La serie de Taylor de f alrededor de $t = 0$ es

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots,$$

y dicha serie tiene un radio de convergencia igual a 1. Aunque la función $(1 + t^2)^{-1}$ está definida para t real, tiende a infinito cuando $t = \pm i$, y la distancia de cada uno de estos puntos en relación con el origen es igual a 1.

Una segunda aplicación del Teorema 6 consiste en que el radio de convergencia de la serie de Taylor alrededor de $t = 0$, del cociente de dos polinomios $a(t)$ y $b(t)$, es el valor del menor de los ceros de $b(t)$.

Cabe mencionar que no fue realmente necesario suponer que eran polinomios las funciones $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ en (1). El método que se usa para resolver el Ejemplo 1 debe poderse aplicar también a la ecuación diferencial más general

$$L[y] = P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$$

donde $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ son series de potencias alrededor de t_0. (Por supuesto que para este caso, las operaciones algebraicas son más complicadas.) Si

$$P(t) = p_0 + p_1(t - t_0) + \ldots, \qquad Q(t) = q_0 + q_1(t - t_0) + \ldots,$$
$$R(t) = r_0 + r_1(t - t_0) + \ldots$$

y $y(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + \ldots$, entonces $L[y](t)$ será la suma de tres series de potencias alrededor de $t = t_0$. Por lo tanto, será posible encontrar una fórmula de recurrencia para los coeficientes a_n igualando a cero la suma de los coeficientes de potencias iguales en la expresión $L[y](t)$. Este es el contenido del siguiente teorema, el cual se enunciará sin demostración.

TEOREMA 7. *Supóngase que las funciones $Q(t)/P(t)$ y $R(t)/P(t)$ tienen series de Taylor convergentes alrededor de $t = t_0$ para $|t - t_0| < \rho$. Entonces toda solución $y(t)$ de la ecuación diferencial*

$$P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = 0 \tag{8}$$

es analítica en $t = t_0$, y el radio de convergencia de la serie de Taylor alrededor de $t = t_0$ es como mínimo ρ. Los coeficientes $a_2, a_3, \ldots$ en la serie de Taylor

$$y(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots \tag{9}$$

se determinan sustituyendo las series (9) en la ecuación diferencial (8) e igualando a cero la suma de los coeficientes de potencias iguales de t en la expresión resultante.

OBSERVACIÓN. El intervalo de convergencia del desarrollo la serie de Taylor de cualquier solución $y(t)$ de (8) está determinado, usualmente, por el intervalo de convergencia de las series de potencias $Q(t)/P(t)$ y $R(t)/P(t)$, más que por los intervalos de convergencia de las series de potencias $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$. Esto se debe a que, siempre que se examina la cuestión de existencia y unicidad, la ecuación (8) debe estar expresada en la forma estándar.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0$$

EJEMPLO 2 Encontrar dos soluciones linealmente independientes de

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3t}{1+t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{1+t^2}y = 0. \tag{10}$$

(b) Hallar la solución $y(t)$ de (10) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

SOLUCIÓN.

(a) La manera *equivocada* de resolver este problema es desarrollar la función $3t/(1 + t^2)$ y $1/(1 + t^2)$ en series de potencias alrededor de $t = 0$. La manera correcta es multiplicar por $1 + t^2$ ambos lados de (10) para obtener la ecuación equivalente

$$L[y] = (1+t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Esto se hace debido a que el álgebra resulta mucho más simple cuando son polinomios los coeficientes de la ecuación diferencial (8), que cuando son series de potencias. Al hacer $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, se calcula

$$\begin{aligned} L[y](t) &= (1+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 3t\sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) + 3n + 1\right] a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_n t^n. \end{aligned}$$

Igualando a cero la suma de los coeficientes de potencias iguales de t se obtiene $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)^2a_n=0$. Por lo tanto,

$$a_{n+2}=-\frac{(n+1)^2a_n}{(n+2)(n+1)}=-\frac{(n+1)a_n}{n+2}. \tag{11}$$

La ecuación (11) es una fórmula de recurrencia para los coeficientes a_2, a_3, ... en términos de a_0 y a_1. Para encontrar dos soluciones linealmente independientes de (10), se eligen los dos casos más sencillos (i) $a_0=1$, $a_1=0$ y (ii) $a_0=0$, $a_1=1$

(i) $$a_0=1, \qquad a_1=0.$$

En este caso, todos los coeficientes impares son iguales a cero, ya que $a_3=-2a_1/3=0$, $a_5=-4a_3/5=0$, etcétera. Los coeficientes pares se determinan a partir de las relaciones

$$a_2=-\frac{a_0}{2}=-\frac{1}{2}, \qquad a_4=-\frac{3a_2}{4}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \qquad a_6=-\frac{5a_4}{6}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$$

y así sucesivamente. Procediendo de manera inductiva se ve que

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}.$$

Así pues,

$$y_1(t)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n} \tag{12}$$

es una solución de (10). La razón del término $(n+1)$-ésimo al término n-ésimo de $y_1(t)$ es

$$-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)t^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\times\frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)t^{2n}}=\frac{-(2n+1)t^2}{2(n+1)},$$

y el valor absoluto de esta cantidad tiende a t^2 cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, a partir del criterio de Cauchy de la razón, la serie infinita (12) converge para $|t|<1$ y diverge para $|t|>1$.

(ii) $$a_0=0, \qquad a_1=1.$$

En este caso, todos los coeficientes pares son iguales a cero y los coeficientes impares están determinados por las relaciones.

$$a_3=-\frac{2a_1}{3}=-\frac{2}{3}, \qquad a_5=-\frac{4a_3}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \qquad a_7=-\frac{6a_5}{7}=-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7},$$

y así sucesivamente. Por inducción se encuentra que

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Por consiguiente,

$$y_2(t)=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}t^{2n+1} \tag{13}$$

es una segunda solución de (10) y puede verificarse fácilmente que esta solución también converge para $|t| < 1$ y diverge para $|t| > 1$.

Esto, por supuesto, no es sorprendente, ya que el desarrollo en series de Taylor alrededor de $t = 0$ de las funciones $3t/(1 + t^2)$ y $1/(1 + t^2)$ converge solamente para $|t| < 1$.

(b) La solución $y_1(t)$ satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, mientras que $y_2(t)$ satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Por lo tanto, $y(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t)$.

EJEMPLO 3 Resolver el problema de valor inicial

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+t^2\frac{dy}{dt}+2ty=0; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

SOLUCIÓN. Al hacer $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ se calcula

$$\begin{aligned}
L[y](t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + t^2 \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n-1} + 2t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n t^{n+1}.
\end{aligned}$$

El siguiente paso es escribir la primera sumatoria de modo que el exponente del término general sea $n + 1$ en vez de $n - 2$. Esto se logra sumando 3 a las n de la sumatoria, y disminuyendo el límite inferior en 3; es decir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} &= \sum_{n=-3}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} t^{n+1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} t^{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
L[y](t) &= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n t^{n+1} \\
&= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n t^{n+1}.
\end{aligned}$$

Al igualar a cero las sumas de los coeficientes de las potencias iguales de t se obtiene $2a_2 = 0$, y $(n + 3)(n + 2)a_{n+3} + (n + 2)a_n = 0$; $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Por lo tanto,

$$a_2=0, \quad \text{y} \quad a_{n+3}=-\frac{a_n}{n+3}; \qquad n>0. \tag{14}$$

La fórmula de recurrencia (14) determina a a_3 en términos de a_0; a a_4, en términos de a_1; a a_5 en términos de a_2, y así sucesivamente. Dado que $a_2 = 0$, entonces a_5, a_8, a_{11},

... son iguales a cero, independientemente de los valores de a_0 y a_1. Para cumplir con las condiciones iniciales, se toma $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$. Entonces a partir de (14) a_4, a_7, a_{10}, ... son iguales a cero, mientras que

$$a_3 = -\frac{a_0}{3} = -\frac{1}{3}, \qquad a_6 = -\frac{a_3}{6} = \frac{1}{3\cdot 6}, \qquad a_9 = -\frac{a_6}{9} = -\frac{1}{3\cdot 6\cdot 9}$$

y así sucesivamente. Procediendo de manera inductiva, resulta que

$$a_{3n} = \frac{(-1)^n}{3\cdot 6\cdots 3n} = \frac{(-1)^n}{3^n 1\cdot 2\cdots n} = \frac{(-1)^n}{3^n n!}.$$

Por lo tanto,

$$y(t) = 1 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3\cdot 6} - \frac{t^9}{3\cdot 6\cdot 9} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n}}{3^n n!}.$$

Según el Teorema 7, estas series convergen para toda t, ya que las series de potencias t^2 y $2t$ convergen obviamente para toda t. (Este hecho puede verificarse también más directo usando el criterio de Cauchy de la razón).

EJEMPLO 4 Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$L[y] = (t^2 - 2t)\frac{d^2y}{dt^2} + 5(t-1)\frac{dy}{dt} + 3y = 0; \qquad y(1) = 7, \quad y'(1) = 3. \tag{15}$$

SOLUCIÓN. Dado que las condiciones iniciales están dadas para $t = 1$, los coeficientes de la ecuación diferencial (15) se expresan como polinomios en $(t - 1)$ y entonces se hallará $y(t)$ como una serie de potencias alrededor de $t = 1$. Para ello, obsérvese que

$$t^2 - 2t = t(t-2) = \left[(t-1)+1\right]\left[(t-1)-1\right] = (t-1)^2 - 1.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial (15) puede escribirse en la forma

$$L[y] = \left[(t-1)^2 - 1\right]\frac{d^2y}{dt^2} + 5(t-1)\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Haciendo $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-1)^n$, se calcula

$$\begin{aligned} L[y](t) &= \left[(t-1)^2 - 1\right] \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(t-1)^{n-2} \\ &\quad + 5(t-1)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (t-1)^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-1)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(t-1)^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(t-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(5n+3)a_n(t-1)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(t-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+4n+3)a_n(t-1)^n. \end{aligned}$$

Igualando a cero las sumas de los coeficientes de potencias iguales de t, se obtiene $-(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2+4n+3)a_n=0$, de modo que

$$a_{n+2}=\frac{n^2+4n+3}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{n+3}{n+2}a_n, \qquad n\geqslant 0. \tag{16}$$

Para satisfacer las condiciones iniciales, se toma $a_0=7$ y $a_1=3$. Entonces, a partir de (16)

$$a_2=\frac{3}{2}a_0=\frac{3}{2}\cdot 7, \qquad a_4=\frac{5}{4}a_2=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}\cdot 7, \qquad a_6=\frac{7}{6}a_4=\frac{7\cdot 5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot 7,\ldots$$
$$a_3=\frac{4}{3}a_1=\frac{4}{3}\cdot 3, \qquad a_5=\frac{6}{5}a_3=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}\cdot 3, \qquad a_7=\frac{8}{7}a_5=\frac{8\cdot 6\cdot 4}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot 3,\ldots$$

y así sucesivamente. Procediendo de manera inductiva, se encuentra que

$$a_{2n}=\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot 7 \quad \text{y} \quad a_{2n+1}=\frac{4\cdot 6\cdots(2n+2)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\cdot 3 \qquad (\text{para } n\geq 1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y(t)&=7+3(t-1)+\frac{3}{2}\cdot 7(t-1)^2+\frac{4}{3}\cdot 3(t-1)^3+\ldots \\ &=7+7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)(t-1)^{2n}}{2^n n!}+3(t-1)+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!(t-1)^{2n+1}}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Resolver el problema de valor inicial

$$L[y]=(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+(1-t)y=0; \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

SOLUCIÓN. Haciendo $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$, se calcula

$$\begin{aligned} L[y](t)&=(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2} \\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}+(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-1} \\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+1} \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-2)a_nt^{n-1} \end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n-1)a_{n+1}t^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

$$=2a_2 + a_1 + a_0$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)(n-1)a_{n+1}+a_n-a_{n-1}\}t^n.$$

Igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias se obtiene

$$a_2 = -\frac{a_1+a_0}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+2} = \frac{(n+1)(n-1)a_{n+1}-a_n+a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \qquad n \geqslant 1. \tag{17}$$

Para satisfacer las condiciones iniciales se toma $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$. Entonces a partir de (17)

$$a_2 = -1, \qquad a_3 = \frac{-a_1+a_0}{6} = 0, \qquad a_4 = \frac{3a_3-a_2+a_1}{12} = \frac{1}{6},$$

$$a_5 = \frac{8a_4-a_3+a_2}{20} = \frac{1}{60}, \qquad a_6 = \frac{15a_5-a_4+a_3}{30} = \frac{1}{360}$$

y así sucesivamente. Sin embargo, no es posible hallar una fórmula general para los coeficientes a_n, como en los ejemplos anteriores. (Ello se debe a que el coeficiente a_{n+2} depende de los valores de a_{n+1}, a_n y a_{n-1}, mientras que en los ejemplos anteriores el coeficiente a_{n+2} dependía únicamente de uno de sus antecesores.) Sin embargo, el problema no es tan serio, ya que pueden encontrarse los coeficientes a_n fácil y rápido con la ayuda de una computadora digital. A continuación, se dan ejemplos de programas APL y Fortran para calcular los coeficientes $a_2, \ldots, a_n$ en términos de a_0 y a_1, y así calcular en cualquier punto t la solución "aproximada"

$$y(t) \cong a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

en cualquier punto t se dan a continuación. Estos programas tienen distintos valores para a_0 y a_1, de modo que pueden emplearse también para resolver el problema de valor inicial más general

$$(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + (1-t)y = 0; \qquad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1.$$

Programa en APL

```
    ∇ SERIES
[1]  A←Nρ0
[2]  A[1]←A1
[3]  A[2]←−(A1+A0)÷2
```

```
 [4]  A[3]←(A0−A1)÷6
 [5]  SUM←A0+(A1×T)+(A[2]×T*2)+A[3]×T*3
 [6]  K←2
 [7]  A[K+2]←((A[K−1]−A[K])+(K−1)×(K+1)×A[K+1])÷(K+1)×
      K+2
 [8]  SUM←SUM+A[K+2]×T*K+2
 [9]  K←K+1
[10]  →7×ιK<N−2
[11]  SUM  ∇
```

Programa en Fortran

```
         DIMENSION A(200)
         READ (5, 10) A0, A(1), T, N
10       FORMAT (3F15.8, I5)
         A(2)= −0.5*(A(1)+A0)
         A(3)=(A0−A(1))/2.*3.
         SUM=A0+A(1)*T+A(2)*T**2+A(3)*T**3
         NA=N−2
         DO20 K=2,NA
         A(K+2)=(A(K−1)−A(K)+(K+1.)*(K−1.)*
      1  A(K+1))/(K+1.)*(K+2.)
         SUM=SUM+A(K+2)*T**(K+2)
20       CONTINUE
         WRITE (6,30) N,T,SUM
30       FORMAT (1H1, 'FOR N=', I3, ', AND T=',F10.4/1H, 'THE
      1  SUM IS', F20.9)
         CALL EXIT
         END
```

Si en los programas A0 = 1, A1 = 1, (se tiene que A(1) = 1 para el programa en Fortran), T = 0.5 y N = 20 resulta

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) \cong a_0 + a_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + \ldots + a_{20}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{20} = 1.26104174.$$

Esto es correcto hasta ocho cifras decimales, ya que cualquier valor mayor que N conduce al mismo valor.

EJERCICIOS

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $y'' + ty' + y = 0$

2. $y'' - ty = 0$

3. $(2 + t^2)y'' - ty' - 3y = 0$

4. $y'' - t^3 y = 0$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

5. $t(2-t)y''-6(t-1)y'-4y=0; \quad y(1)=1,\ y'(1)=0$

6. $y''+t^2y=0; \quad y(0)=2,\ y'(0)=-1$

7. $y''-t^3y=0; \quad y(0)=0,\ y'(0)=-2$

8. $y''+(t^2+2t+1)y'-(4+4t)y=0; \quad y(-1)=0,\ y'(-1)=1$

9. La ecuación $y''-2yt'+\lambda y=0$, con λ constante, se conoce como *ecuación diferencial de Hermite* y se presenta en muchas áreas de las matemáticas y de la física.
(a) Obtenga dos soluciones linealmente independientes para la ecuación de Hermite.
(b) Demuestre que la ecuación mencionada tiene una solución polinomial de grado n si $\lambda = 2n$. Si el polinomio se normaliza adecuadamente, es decir, si se multiplica por una constante apropiada, entonces se conoce como *polinomio de Hermite* $H_n(t)$.

10. La ecuación diferencial $(1-t^2)y''-2ty'+\alpha(\alpha+1)y=0$, con α constante, es conocida como *ecuación diferencial de Legendre* y se presenta en muchas áreas de las matemáticas y de la física.
(a) Encuentre dos soluciones linealmente independientes para la ecuación de Legendre.
(b) Muestre que la ecuación diferencial de Legendre tiene una solución polinomial de grado n si $\alpha = n$.
(c) Se define al *polinomio de Legendre* $P_n(t)$ como la solución polinomial de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$ que satisface $P_n(1)=1$. Encuentre $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $P_3(t)$.

11. A la ecuación $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y(\ )=0$, con α constante, se le conoce como la ecuación diferencial de Chebyshev (o Tchebycheff) y se presenta en muchas áreas de las matemáticas y de la física.
(a) Halle dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Chebyshev.
(b) Muestre que la ecuación de Chebyshev tiene una solución polinomial de grado n si $\alpha = n$. Estos polinomios, con una normalización adecuada, se llaman *polinomios de Chebyshev*.

12. (a) Obtenga dos soluciones linealmente independientes de

$$y''+t^3y'+3t^2y=0.$$

(b) Halle los primeros cinco términos del desarrollo en series de Taylor alrededor de $t=0$ de la solución $y(t)$ del siguiente problema de valor inicial

$$y''+t^3y'+3t^2y=e^t; \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

En cada uno de los Problemas 13 a 17, (a) obtenga los primeros cinco términos del desarrollo en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ para la solución $y(t)$ del problema de valor inicial dado. (b) Redacte un programa para que una computadora halle los primeros $N+1$ coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_N$, y evalúe el polinomio $a_0 + a_1t + \ldots + a_Nt^N$. Por último, obtenga una aproximación de $y(½)$ calculando $\sum_{n=0}^{20} a_n(½)^n$

13. $(1-t)y''+ty'+y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

14. $y''+y'+ty=0$; $y(0)=-1$, $y'(0)=2$

15. $y''+ty'+e^ty=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

16. $y''+y'+e^ty=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-1$

17. $y''+y'+e^{-t}y=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=5$

OBSERVACIÓN. La instrucción !N en APL indica a la computadora que calcule el factorial N!.

2.8.1 *Puntos singulares — Ecuaciones de Euler*

Se dice que la ecuación diferencial

$$L[y]=P(t)\frac{d^2y}{dt^2}+Q(t)\frac{dy}{dt}+R(t)y=0 \tag{1}$$

es *singular* en $t = t_0$ si $P(t_0) = 0$. Las soluciones de (1) con frecuencia, se hacen muy grandes, o bien, oscilan muy rápidamente en un entorno del punto singular t_0. Así que las soluciones de (1) pueden incluso no ser continuas, ni mucho menos analíticas en t_0, de modo que el método de solución en series de potencias, por lo general no se podrá aplicar.

El objetivo es encontrar una clase de ecuaciones singulares que se pueda resolver para t cercano a t_0. Para ello, se iniciará con el estudio de una ecuación muy sencilla conocida como la ecuación de Euler, la cual, aunque es singular, puede resolverse fácilmente. Después se utilizará la ecuación de Euler para introducir una clase más general de ecuaciones singulares que también es posible resolver en la vecindad de un punto singular.

DEFINICIÓN. La ecuación diferencial

$$L[y]=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha t\frac{dy}{dt}+\beta y=0. \tag{2}$$

donde α y β son constantes, se conoce como la *ecuación de Euler*.

Para simplificar el problema se supondrá inicialmente que $t > 0$. Obsérvese que tanto t^2y'' como ty' son múltiplos de t^r si $y = t^r$. Esto sugiere que se utilice a $y = t^r$ como solución de (2). Calculando

$$\frac{d}{dt}t^r=rt^{r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2}{dt^2}t^r=r(r-1)t^{r-2}$$

se ve que

$$\begin{aligned} L[t^r] &= r(r-1)t^r + \alpha r t^r + \beta t^r \\ &= [r(r-1) + \alpha r + \beta]t^r \\ &= F(r)t^r \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} F(r) &= r(r-1) + \alpha r + \beta \\ &= r^2 + (\alpha - 1)r + \beta. \end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto $y = t^r$ es una solución de (2) si y sólo si r es solución de la ecuación cuadrática

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0. \tag{5}$$

Las soluciones r_1 y r_2 de (5) son

$$\begin{aligned} r_1 &= -\tfrac{1}{2}\left[(\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}\right] \\ r_2 &= -\tfrac{1}{2}\left[(\alpha - 1) - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}\right]. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de coeficientes constantes, se deben examinar por separado los casos donde $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ es positivo, negativo o igual a cero.

CASO 1. $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$. En este caso la ecuación (5) tiene dos raíces reales y distintas, y por ende la ecuación (2) tiene dos soluciones de la forma $y_1(t) = t^{r_1}$ y $y_2(t) = t^{r_2}$. Por supuesto que t^{r_1} y t^{r_2} son linealmente independientes si $r_1 \neq r_2$. Así que la solución general de (2) (para $t > 0$) es

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}.$$

EJEMPLO 1 Encontrar la solución general de

$$L[y] = t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4t\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \qquad t > 0. \tag{6}$$

SOLUCIÓN. Al sustituir $y = t^r$ en (6) se obtiene

$$\begin{aligned} L[t^r] &= r(r-1)t^r + 4rt^r + 2t^r \\ &= [r(r-1) + 4r + 2]t^r \\ &= (r^2 + 3r + 2)t^r \\ &= (r+1)(r+2)t^r \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ y

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2}$$

es la solución general de (6).

CASO 2. $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$. En este caso

$$r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$$

y se tiene solamente una solución $y = t^{r_1}$ de (2). Es posible encontrar una segunda solución por el método de reducción de orden (Ejercicio 11). Sin embargo se presentará aquí otro método para obtener y_2, el cual se generalizará explícitamente en la Sección 2.8.3. Obsérvese que en el caso de raíces iguales $F(r) = (r - r_1)^2$. Por lo tanto,

$$L[t^r] = (r - r_1)^2 t^r. \tag{7}$$

Al derivar parcialmente ambos lados de (7) con respecto a r, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial r} L[t^r] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} t^r\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_1)^2 t^r\right].$$

Dado que $\partial(t^r)/\partial r = t^r \ln t$, se ve que

$$L[t^r \ln t] = (r - r_1)^2 t^r \ln t + 2(r - r_1)t^r. \tag{8}$$

El lado derecho de (8) se anula para $r = r_1$. Por lo tanto,

$$L[t^{r_1} \ln t] = 0$$

lo cual implica que $y_2(t) = t^{r_1} \ln t$ es una segunda solución de (2). Además, dado que t^{r_1} y $t^{r_1} \ln t$ son linealmente independientes, se tiene entonces que la solución general de (2) en el caso de raíces iguales es

$$y(t) = (c_1 + c_2 \ln t)t^r, \qquad t > 0.$$

EJEMPLO 2 Encontrar la solución general de

$$L[y] = t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 5t \frac{dy}{dt} + 9y = 0, \qquad t > 0. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Al sustituir $y = t^r$ en (9) se obtiene que

$$\begin{aligned} L[t^r] &= r(r-1)t^r - 5rt^r + 9t^r \\ &= [r(r-1) - 5r + 9]t^r \\ &= (r^2 - 6r + 9)t^r \\ &= (r-3)^2 t^r. \end{aligned}$$

La ecuación $(r - 3)^2 = 0$ tiene una raíz doble $r = 3$. Por lo tanto,

$$y_1(t) = t^3, \; y_2(t) = t^3 \ln t$$

y la solución general de (9) es

$$y(t) = (c_1 + c_2 \ln t)t^3, \qquad t > 0.$$

CASO 3. $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$. En este caso

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{y} \quad r_2 = \lambda - i\mu$$

con

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{2}, \mu = \frac{\left[4\beta - (\alpha - 1)^2\right]^{1/2}}{2} \tag{10}$$

son raíces complejas. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= t^{\lambda + i\mu} = t^{\lambda}t^{i\mu} \\ &= t^{\lambda}(e^{\ln t})^{i\mu} = t^{\lambda}e^{i\mu \ln t} \\ &= t^{\lambda}[\cos(\mu \ln t) + i\text{sen}(\mu \ln t)]\end{aligned}$$

es una solución de (2) con valores complejos. Pero entonces (Sección 2.2.1)

$$y_1(t) = \text{Re}\{\phi(t)\} = t^{\lambda}\cos(\mu \ln t)$$

y

$$y_2(t) = \text{Im}\{\phi(t)\} = t^{\lambda}\text{sen}(\mu \ln t)$$

son dos soluciones reales de (2) linealmente independientes. De modo que la solución general de (2), en el caso de raíces complejas, es

$$y(t) = t^{\lambda}[c_1\cos(\mu \ln t) + c_2\text{sen}(\mu \ln t)]$$

con λ y μ dados por (10).

EJEMPLO 3 Encontrar la solución general de la ecuación

$$L[y] = t^2y'' - 5ty' + 25y = 0, \qquad t > 0. \tag{11}$$

SOLUCIÓN. Sustituyendo $y = t^r$ en 11 se obtiene

$$\begin{aligned}L[t^r] &= r(r-1)t^r - 5rt^r + 25t^r \\ &= [r(r-1) - 5r + 25]t^r \\ &= [r^2 - 6r + 25]t^r\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación $r^2 - 6r + 25 = 0$ son

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = 3 \pm 4i$$

de modo que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= t^{3+4i} = t^3t^{4i} \\ &= t^3e^{(\ln t)4i} = t^3e^{i(4\ln t)} \\ &= t^3[\cos(4\ln t) + i\text{sen}(4\ln t)]\end{aligned}$$

es una solución de (11) con valores complejos. Por lo tanto,

$$y_1(t) = \text{Re}\{\phi(t)\} = t^3\cos(4\ln t)$$

y

$$y_2(t) = \mathrm{Im}\{\phi(t)\} = t^3 \mathrm{sen}(4 \ln t)$$

son dos soluciones linealmente independientes de (11), y la solución general es

$$y(t) = t^3[c_1 \cos(4 \ln t) + c_2 \mathrm{sen}(4 \ln t)], \qquad t > 0.$$

De nuevo se analizará el caso $t < 0$. Una dificultad es que t^r puede no estar definido si t es negativa. Por ejemplo $(-1)^{1/2}$ es igual a i, que es imaginaria. Una segunda dificultad es que $\ln t$ no está definido si t es negativa. Aplicando el siguiente cambio de variable se pueden evitar ambos problemas. Se define

$$t = -x, \qquad x > 0,$$

y sea $y = u(x)$, $x > 0$. A partir de la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Así, la ecuación (2) puede reescribirse en la forma

$$(-x)^2\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha(-x)\left(-\frac{du}{dx}\right) + \beta u = 0$$

o bien

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha x\frac{du}{dx} + \beta u = 0, \qquad x > 0 \tag{12}$$

Sin embargo, la ecuación (12) es exactamente la misma que la ecuación (2) con t sustituida por x y y reemplazada por u. Por lo tanto, la ecuación (12) tiene soluciones de la forma

$$u(x) = \begin{cases} c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \\ (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1} \\ [c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \mathrm{sen}(\mu \ln x)]x^{\lambda} \end{cases} \tag{13}$$

dependiendo de si $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ es positivo, igual a cero o negativo. Obsérvese además que

$$x = -t = |t|$$

para t negativa. Así, para t negativa, las soluciones de (2) tienen alguna de las formas

$$\begin{cases} c_1|t|^{r_1} + c_2|t|^{r_2} \\ [c_1 + c_2 \ln|t|]|t|^{r_1} \\ [c_1 \cos(\mu \ln|t|) + c_2 \mathrm{sen}(\mu \ln|t|)]|t|^{\lambda} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. La ecuación

$$(t-t_0)^2\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha(t-t_0)\frac{dy}{dt}+\beta y=0 \tag{14}$$

es también una ecuación de Euler con una singularidad en $t = t_0$, en vez de en $t = 0$. En este caso se buscan soluciones de la forma $(t - t_0)^r$. Otra manera de resolver el problema es reducir la ecuación (14) a la forma (2), con el cambio de variable $x = t - t_0$.

EJERCICIOS

En los Problemas 1 a 8, halle la solución general de la ecuación dada.

1. $t^2y''+5ty'-5y=0$

2. $2t^2y''+3ty'-y=0$

3. $(t-1)^2y''-2(t-1)y'+2y=0$

4. $t^2y''+3ty'+y=0$

5. $t^2y''-ty'+y=0$

6. $(t-2)^2y''+5(t-2)y'+4y=0$

7. $t^2y''+ty'+y=0$

8. $t^2y''+3ty'+2y=0$

9. Resuelva el problema de valor inicial

$$t^2y''-ty'-2y=0;\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1$$

en el intervalo $0 < t < \infty$.

10. Resuelva el problema de valor inicial

$$t^2y''-3ty'+4y=0;\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0$$

en el intervalo $0 < t < \infty$.

11. Use el método de reducción de orden para mostrar que, en el caso de raíces iguales, $y_2(t) = t^{r_1}\ln t$.

2.8.2 *Puntos singulares regulares —el método de Frobenius*

El objetivo ahora es encontrar una clase de ecuaciones diferenciales singulares que sea más general que la ecuación de Euler

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha t\frac{dy}{dt}+\beta y=0 \tag{1}$$

pero que también puedan resolverse con técnicas analíticas. Para ello se escribe (1) en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\alpha}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{\beta}{t^2}y=0. \tag{2}$$

Una generalización normal de (2) es la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0 \tag{3}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ pueden desarrollarse en series de la forma

$$p(t)=\frac{p_0}{t}+p_1+p_2t+p_3t^2+\cdots$$
$$q(t)=\frac{q_0}{t^2}+\frac{q_1}{t}+q_2+q_3t+q_4t^2+\cdots \tag{4}$$

DEFINICIÓN. Se dice que la ecuación (3) tiene un *punto singular regular* en $t = 0$, si $p(t)$ y (t) tienen desarrollos en serie del tipo (4). De manera equivalente, $t = 0$ es un punto singular regular de (3) si las funciones $tp(t)$ y $t^2q(t)$ son analíticas en $t = 0$. Se dice que la ecuación (3) tiene un punto singular regular en $t = t_0$ si las funciones $(t - t_0)p(t)$ y $(t - t_0)^2q(t)$ son analíticas en $t = t_0$. Un punto singular de (3) que no es regular se llama *irregular*.

EJEMPLO 1 Clasificar los puntos singulares de la ecuación de Bessel de orden ν

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)y=0, \tag{5}$$

donde ν es una constante.

SOLUCIÓN. En este caso $P(t) = t^2$ se anula en $t = 0$. Por lo tanto, $t = 0$ es el único punto singular de (5). Al dividir ambos lados de (5) entre t^2 se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)y=0.$$

Obsérvese que tanto $\qquad tp(t)=1 \quad \text{y} \quad t^2q(t)=t^2-\nu^2$

son analíticas en $t = 0$. Por lo tanto, la ecuación de Bessel de orden ν tiene un punto singular regular en $t = 0$.

EJEMPLO 2 Clasificar los puntos singulares de la ecuación de Legendre

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{6}$$

donde α es una constante.

SOLUCIÓN. Dado que $1 - t^2$ se anula para $t = 1$ y $t = -1$, entonces (6) es singular en $t = \pm1$. Al dividir ambos lados de (6) entre $1 - t^2$ resulta

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{2t}{1-t^2}\frac{dy}{dt}+\alpha\frac{(\alpha+1)}{1-t^2}y=0.$$

Obsérvese que tanto

$$(t-1)p(t)=-(t-1)\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2t}{1+t}$$

como

$$(t-1)^2q(t)=\alpha(\alpha+1)\frac{(t-1)^2}{1-t^2}=\alpha(\alpha+1)\frac{1-t}{1+t}$$

son analíticas en $t = 1$. De manera similar, $(t + 1)p(t)$ y $(t + 1)^2q(t)$ son analíticas en $t = -1$. Por lo tanto, $t = 1$ y $t = -1$ son puntos singulares regulares de (6).

EJEMPLO 3 Mostrar que $t = 0$ es un punto singular irregular de la ecuación

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+ty=0. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. Al dividir entre t^2 se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{3}{t^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=0.$$

En este caso, la función

$$tp(t)=t\left(\frac{3}{t^2}\right)=\frac{3}{t}$$

no es analítica en $t = 0$. Por lo tanto, $t = 0$ es un punto singular irregular de (7).

Ahora se vuelve a la ecuación

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0 \tag{8}$$

donde $t = 0$ es un punto singular regular. Para simplificar el problema, considérese solamente el intervalo $t > 0$. Multiplicando (8) por t^2 se obtiene la ecuación equivalente

$$L[y]=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t(tp(t))\frac{dy}{dt}+t^2q(t)y=0. \tag{9}$$

Puede decirse que la ecuación (9) se obtuvo de (1) al sumar potencias mayores de t a los coeficientes α y β. Ello sugiere que tal vez es posible obtener soluciones de (9) al sumar términos de la forma t^{r+1}, t^{r+2}, $\ldots$, a las soluciones t^r de (1). Concretamente se tratarán de obtener soluciones de (9) del tipo

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r}=t^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

EJEMPLO 4 Encontrar dos soluciones linealmente independientes de la siguiente ecuación:

$$L[y]=2t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+ty=0, \qquad 0<t<\infty. \tag{10}$$

SOLUCIÓN. Sea

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \qquad a_0 \neq 0.$$

Derivando

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n t^{n+r-1}$$

y

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$$

entonces

$$\begin{aligned} L[y]=t^r\Bigg[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n-1} \\ +\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}\Bigg] \\ =t^r\Bigg[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n-1} \\ +\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2} t^{n-1}\Bigg] \\ =[2r(r-1)a_0+ra_0]t^{r-1}+[2(1+r)ra_1+(1+r)a_1]t^r \\ +\sum_{n=2}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n+a_{n-2}]t^{n+r-1}. \end{aligned}$$

Al igualar a cero los coeficientes de cada una de las potencias de t, se obtiene

(i) $2r(r-1)a_0+ra_0=r(2r-1)a_0=0$,
(ii) $2(r+1)ra_1+(r+1)a_1=(r+1)(2r+1)a_1=0$,
y
(iii) $2(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n=(n+r)[2(n+r)-1]a_n=-a_{n-2}$, $n\geqslant 2$.

La primera ecuación determina a r; de hecho implica que $r = 0$, o bien $r = ½$. La segunda ecuación implica, entonces, $a_1 = 0$, y la tercera ecuación determina a a_n para $n \geq 2$.

(i) $r = 0$. En este caso, la fórmula de recurrencia (iii) es

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(2n-1)}, \qquad n\geqslant 2.$$

Dado que $a_1 = 0$, resulta que todos los coeficientes impares son iguales a cero. Los coeficientes pares quedan determinados por las relaciones

$$a_2=\frac{-a_0}{2\cdot 3}, \quad a_4=\frac{-a_2}{4\cdot 7}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}, \quad a_6=\frac{-a_4}{6\cdot 11}=\frac{-a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11}$$

y así sucesivamente. Tomando $a_0 = 1$, se ve que

$$y_1(t)=1-\frac{t^2}{2\cdot 3}+\frac{t^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!3\cdot 7\cdots(4n-1)}$$

es una solución de (10). Es fácil verificar, si se usa el criterio de Cauchy de la razón, que esta serie converge para toda t.

(ii) $r = ½$. En este caso la fórmula de recurrencia (iii) es

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+\frac{1}{2})[2(n+\frac{1}{2})-1]}=\frac{-a_{n-2}}{n(2n+1)},\quad n\geq 2.$$

Una vez más todos los coeficientes impares son iguales a cero. Los coeficientes pares quedan determinados por las relaciones

$$a_2=\frac{-a_0}{2\cdot 5},\quad a_4=\frac{-a_2}{4\cdot 9}=\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9},\quad a_6=\frac{-a_4}{6\cdot 13}=\frac{-a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13}$$

y así sucesivamente. Al hacer $a_0 = 1$, se encuentra que

$$y_2(t)=t^{1/2}\left[1-\frac{t^2}{2\cdot 5}+\frac{t^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}+\cdots\right]$$
$$=t^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!5\cdot 9\cdots(4n+1)}\right]$$

es una segunda solución de (10) en el intervalo $0 < t < \infty$.

OBSERVACIÓN. Si se multiplican ambos lados de (10) por t se obtiene

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+t^2y=0.$$

A esta ecuación se le puede considerar como una generalización de la ecuación de Euler

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}=0. \tag{11}$$

La ecuación (11) tiene soluciones de la forma t^r, donde

$$2r(r-1)+r=0.$$

Esta expresión matemática equivale a la ecuación (i) que determinó a r para las soluciones de (10).

A continuación, se verá si la técnica expuesta, conocida como *método de Frobenius*, funciona también para la ecuación más general (9). (En el resto de la sección se supondrá que $t > 0$). De acuerdo con el supuesto, la ecuación puede escribirse en la forma

$$L[y]=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t[p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots]\frac{dy}{dt}+[q_0+q_1t+q_2t^2+\cdots]y=0.$$

Hágase

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r},\ \text{con } a_0\neq 0.$$

Derivando

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^{n+r-1}$$

y

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r-2}$$

de donde resulta

$$L[y]=t^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^n+\left(\sum_{m=0}^{\infty}p_mt^m\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^n\right]\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{m=0}^{\infty}q_mt^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\right\}.$$

Al realizar la multiplicación y reagrupar términos se obtiene que

$$\begin{aligned}L[y]=&\left[r(r-1)+p_0r+q_0\right]a_0t^r\\&+\left\{\left[(1+r)r+p_0(1+r)+q_0\right]a_1+(rp_1+q_1)a_0\right\}t^{r+1}\\&\vdots\\&+\left\{\left[(n+r)(n+r-1)+p_0(n+r)+q_0\right]a_n\right.\\&\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\right\}t^{n+r}\\&+\cdots.\end{aligned}$$

Esta expresión puede simplicarse haciendo

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0. \tag{12}$$

Entonces

$$\begin{aligned}L[y]=&\,a_0F(r)t^r+\left[a_1F(1+r)+(rp_1+q_1)a_0\right]t^{1+r}+\cdots\\&+a_nF(n+r)t^{n+r}+\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\right\}t^{n+r}\\&+\cdots.\end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de cada una de las potencias de t, se obtiene que

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0 \tag{13}$$

y

$$F(n+r)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k,\quad n\geq 1. \tag{14}$$

A la ecuación (13) se la conoce como ecuación *indicial* de (9). Se trata de una ecuación cuadrática en r, y sus raíces determinan los dos valores posibles r_1 y r_2 de r, para los que puede haber soluciones de (9) de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}.$$

Nótese que la ecuación indicial (13) es la ecuación que se obtendría al buscar soluciones del tipo t^2 para la ecuación de Euler.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+p_0t\frac{dy}{dt}+q_0y=0.$$

La ecuación (14) muestra que, en general, a_n depende de r y de todos los coeficientes que le preceden: $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Es posible resolver la ecuación recurrentemente para despejar a_n suponiendo que $F(1+r), F(2+r), \ldots, F(n+r)$ son diferentes de cero. Sin embargo, obsérvese que si $F(n+r)=0$ para algún entero positivo n, entonces $n+r$ es una raíz de la ecuación indicial (13). De aquí, se tiene que si (13) tiene dos raíces reales r_1, r_2 con $r_1 > r_2$, y $r_1 - r_2$ no es un número entero, entonces la ecuación (9) tiene dos soluciones de la forma

$$y_1(t)=t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)t^n,\ y_2(t)=t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)t^n,$$

y es posible demostrar que dichas soluciones convergen en el mismo intervalo, donde convergen tanto $tp(t)$ como $t^2q(t)$.

OBSERVACIÓN 1. La notación $a_n(r_1)$ y $a_n(r_2)$ se introdujo para destacar que a_n queda determinado al elegir $r=r_1$, o bien $r=r_2$.

EJEMPLO 5 Encontrar la solución general de la ecuación

$$L[y]=4t\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+3y=0. \qquad (15)$$

SOLUCIÓN. La ecuación (15) tiene un punto singular regular en $t=0$, ya que tanto

$$tp(t)=\tfrac{3}{4} \quad \text{y} \quad t^2q(t)=\tfrac{3}{4}t$$

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r},\quad a_0\neq 0.$$

Derivando

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$$

y

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$$

entonces

$$L[y]=4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-1}$$

$$+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)+3(n+r)]a_n t^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}3a_{n-1}t^{n+r-1}.$$

Igualando a cero las sumas de los coeficientes de potencias iguales de t se obtiene

$$4r(r-1)+3r=4r^2-r=r(4r-1)=0 \tag{16}$$

y

$$[4(n+r)(n+r-1)+3(n+r)]a_n \equiv (n+r)[4(n+r)-1]a_n=-3a_{n-1},\ n\geqslant 1. \tag{17}$$

La ecuación (16) es la ecuación indicial e implica que $r = 0$, o bien $r = 1/4$. Dado que la diferencia de las raíces no es un número entero, entonces es posible encontrar dos soluciones de (15) de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}$$

con a_n determinada a partir de (17).

$r = 0$. En este caso la fórmula de recurrencia (17) se reduce a

$$a_n=-3\frac{a_{n-1}}{4n(n-1)+3n}=\frac{-3a_{n-1}}{n(4n-1)}.$$

Haciendo $a_0 = 1$ se obtiene

$$a_1=-1,\quad a_2=\frac{-3a_1}{2\cdot 7}=3\frac{1}{2\cdot 7},$$

$$a_3=\frac{-3a_2}{3\cdot 11}=-3^2\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11},$$

$$a_4=\frac{-3a_3}{4\cdot 15}=3^3\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 11\cdot 15},$$

y en general

$$a_n=\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)}.$$

Por lo tanto,

$$y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n-1)}t^n \tag{18}$$

es una solución de (15). Además, es fácil notar, usando el criterio de Cauchy de la razón, que $y_1(t)$ converge para toda t. Por lo tanto, $y_1(t)$ es una solución analítica de (15).

$r = \frac{1}{2}$. En este caso, la fórmula de recurrencia (17) se reduce a

$$a_n = \frac{-3a_{n-1}}{\left(n+\frac{1}{4}\right)\left[4\left(n-\frac{3}{4}\right)+3\right]} = \frac{-3a_{n-1}}{n(4n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Haciendo $a_0 = 1$, resulta

$$a_1 = \frac{-3}{5}, \quad a_2 = \frac{3^2}{2\cdot 5\cdot 9}, \quad a_3 = \frac{-3^3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 9\cdot 13},$$

$$a_4 = \frac{3^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17}, \ldots .$$

Procediendo de manera inductiva se ve que

$$a_n = \frac{(-1)^n 3^n}{n!5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)}.$$

Por lo tanto,

$$y_2(t) = t^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)}t^n$$

es una segunda solución de (15).

Además puede demostrarse fácilmente, usando el criterio de Cauchy de la razón, que esta solución converge para toda t positiva. Nótese, sin embargo, que $y_2(t)$ no es diferenciable en $t = 0$.

El método de Frobenius encuentra obstáculos en dos casos diferentes. El primer caso ocurre cuando la ecuación indicial (13) tiene raíces iguales $r_1 = r_2$. Aquí, puede hallarse solamente una solución de (9) de la forma

$$y_1(t) = t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

En la siguiente sección se demostrará que (9) tiene una segunda solución $y_2(t)$ de la forma

$$y_2(t) = y_1(t)\ln t + t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

y se expondrá cómo calcular los coeficientes b_n. El cálculo de las b_n es, por lo general, un problema muy difícil. Sin embargo, cabe señalar que para muchas aplicaciones en física se rechaza la solución $y_2(t)$, con la explicación de que es singular. Así en muchos casos basta encontrar $y_1(t)$ solamente. También es posible hallar una segunda solución $y_2(t)$ por el método de reducción de orden, pero esto pesenta mucha dificultad.

El segundo caso ocurre cuando las raíces r_1, r_2 de la ecuación indicial difieren en un número entero. Supóngase que $r_1 = r_2 + N$, donde N es un entero positivo. Aquí es posible encontrar una solución de la forma

$$y_1(t) = t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Sin embargo, puede que no sea posible hallar una segunda solución $y_2(t)$ de la forma

$$y_2(t)=t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Esto es porque $F(r_2+n)=0$, cuando $n=N$. Así el primer miembro de (14) es

$$0\cdot a_N=-\sum_{k=0}^{N-1}\left[(k+r_2)p_{N-k}+q_{N-k}\right]a_k \tag{19}$$

cuando $n=N$. Esta ecuación no se satisface para ninguna elección de a_N, si

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left[(k+r_2)p_{N-k}+q_{N-k}\right]a_k\neq 0.$$

En este caso (Sección 2.8.3), la ecuación (9) tiene una segunda solución de la forma

$$y_2(t)=y_1(t)\ln t+t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

donde, una vez más, el cálculo de las b_n es difícil.

Por otro lado, si se anula la suma en el segundo miembro de (19), entonces a_N es arbitrario, y puede obtenerse una segunda solución del tipo

$$y_2(t)=t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

A continuación se ilustra un caso así con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encontrar dos soluciones de la ecuación de Bessel de orden ½

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-1/4)y=0,\quad 0<t<\infty. \tag{20}$$

SOLUCIÓN. Esta ecuación tiene un punto singular regular en $t=0$, ya que tanto

$$tp(t)=1 \quad \text{and} \quad t^2q(t)=t^2-\tfrac{1}{4}$$

son analíticas en $t=0$. Hágase

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r},\quad a_0\neq 0.$$

Derivando

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$$

y

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$$

por lo que

$$L[y]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nt^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r+2}-\tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+r}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-\tfrac{1}{4}\right]a_nt^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}t^{n+r}.$$

Igualando a cero las sumas de los coeficientes de potencias iguales de t, se obtiene

$$F(r)a_0=\left[r(r-1)+r-\tfrac{1}{4}\right]a_0=\left(r^2-\tfrac{1}{4}\right)a_0=0 \qquad \text{(i)}$$

$$F(1+r)a_1=\left[(1+r)r+(1+r)-\tfrac{1}{4}\right]a_1=\left[(1+r)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_1=0 \qquad \text{(ii)}$$

y

$$F(n+r)a_n=\left[(n+r)^2-\tfrac{1}{4}\right]a_n=-a_{n-2}, \quad n\geq 2 \qquad \text{(iii)}$$

La ecuación (i) es la indicial, e implica que $r_1 = ½$, $r_2 = -½$.
$r_1 = ½$: Hágase $a_0 = 1$. La ecuación (ii) exige que a_1 sea igual a cero, y la fórmula de recurrencia (iii) implica que

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{F\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad n\geq 2.$$

Esta ecuación, a su vez, implica que todos los coeficientes impares $a_3, a_5, \ldots$ son iguales a cero y que los coeficientes pares están determinados por las relaciones

$$a_2=\frac{-a_0}{2\cdot 3}=\frac{-1}{2\cdot 3}=-\frac{1}{3!}$$
$$a_4=\frac{-a_2}{4\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{5!}$$
$$a_6=\frac{-a_4}{6\cdot 7}=\frac{-1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=-\frac{1}{7!}$$

y así sucesivamente. Procediendo de manera inductiva, resulta

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)}$$

Por lo tanto,

$$y_1(t)=t^{1/2}\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\frac{t^6}{7!}+\cdots\right)$$

es una solución de (20). Dicha solución puede escribirse como

$$y_1(t)=\frac{t^{1/2}}{t}\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{sen} t.$$

$r = -½$: Hágase $a_0 = 1$. Dado que $1 + r_2 = ½$ también es una raíz de la ecuación indicial, se podría pensar que tal vez haya problemas si se trata de despejar a_1. Sin embargo, la ecuación (ii) se satisface por sí misma sin importar qué valor tome a_1. En lo sucesivo, se tomará $a_1 = 0$. [Un valor de a_1 diferente de cero daría como resultado un múltiplo de $y_1(t)$.] La fórmula de recurrencia (iii) toma la forma

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{-a_{n-2}}{n^2 - n} = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}, \quad n \geq 2.$$

Los coeficientes impares son, una vez más, todos iguales a cero, y los coeficientes pares son

$$a_2 = \frac{-a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2!}$$
$$a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4!}$$
$$a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{1}{6!}$$

y así sucesivamente. Procediendo de manera inductiva, se ve que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Por lo tanto,

$$y_2(t) = t^{-1/2}\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \cos t$$

es una segunda solución de (20).

OBSERVACIÓN 1. Si r es una raíz compleja de la ecuación indicial, entonces

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

es una solución de (9) con valores complejos. Es posible verificar fácilmente que para este caso tanto la parte real como la imaginaria de $y(t)$ son soluciones de (9) con valores reales.

OBSERVACIÓN 2. Si se desea resolver (9) en un intervalo donde t es negativa, entonces es necesario hacer

$$y(t) = |t|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

La demostración es completamente análoga a la indicada para la ecuación de Euler en la Sección 2.8.1, y se deja al lector como ejercicio.

Los resultados obtenidos hasta ahora se resumen en el siguiente teorema:

TEOREMA 8. *Considérese la ecuación diferencial* (9) *con* $t = 0$ *un punto singular regular. Entonces las funciones* $tp(t)$ y $t^2q(t)$ *son analíticas en* $t = 0$, *con desarrollo en series de potencias.*

$$tp(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \cdots, t^2q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + \cdots$$

la cual es convergente para $|t| < \rho$. *Sean* r_1 y r_2 *las dos raíces de la ecuación indicial*

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

con $r_1 \geq r_2$ *si son reales. Entonces la ecuación* (9) *tiene dos soluciones* $y_1(t)$ y $y_2(t)$ *linealmente independientes en el intervalo* $0 < t < \varrho$ *de la siguiente forma:*

(a) *Si* $r_1 - r_2$ *no es un entero positivo, entonces*

$$y_1(t) = t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n, \quad y_2(t) = t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n.$$

(b) *Si* $r_1 = r_2$, *entonces*

$$y_1(t) = t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n, \quad y_2(t) = y_1(t)\ln t + t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$$

(c) *Si* $r_l - r_2 = N$, *N entero positivo, entonces*

$$y_1(t) = t^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n, \quad y_2(t) = ay_1(t)\ln t + t^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_nt^n$$

donde la constante a podría ser igual a cero.

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas 1 a 6, determine si el valor especificado de t es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada.

1. $t(t-2)^2y'' + ty' + y = 0;\ t = 0$ **2.** $t(t-2)^2y'' + ty' + y = 0;\ t = 2$

3. $(\operatorname{sen} t)y'' + (\cos t)y' + \frac{1}{t}y = 0;\ t = 0$ **4.** $(e^t - 1)y'' + e^ty' + y = 0;\ t = 0$

5. $(1-t^2)y'' + \frac{1}{\operatorname{sen}(t+1)}y' + y = 0;\ t = -1$

6. $t^3y'' + (\operatorname{sen} t^2)y' + ty = 0;\ t = 0$

Obtenga la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

7. $2t^2y'' + 3ty' - (1+t)y = 0$ **8.** $2ty'' + (1-2t)y' - y = 0$

9. $2ty''+(1+t)y'-2y=0$

10. $2t^2y''-ty'+(1+t)y=0$

11. $4ty''+3y'-3y=0$

12. $2t^2y''+(t^2-t)y'+y=0$

En cada uno de los Problemas 13 a 18, encuentre dos soluciones linealmente independientes de la ecuación dada. En cada uno de los problemas las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero positivo; sin embargo, existen dos soluciones de la forma

13. $t^2y''-ty'-(t^2+\frac{5}{4})y=0$

14. $t^2y''+(t-t^2)y'-y=0$

15. $ty''-(t^2+2)y'+ty=0$

16. $t^2y''+(3t-t^2)y'-ty=0$

17. $t^2y''+t(t+1)y'-y=0$

18. $ty''-(4+t)y'+2y=0$

19. Considere la ecuación

$$t^2y''+(t^2-3t)y'+3y=0 \qquad (*)$$

(a) Demuestre que $r = 1$ y $r = 3$ son dos raíces de la ecuación indicial de (*).
(b) Encuentre una solución en series de potencias para (*) de la forma

$$y_1(t)=t^3\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n, \quad a_0=1.$$

(c) Demuestre que $y_1(t) = t^3e^{-t}$.
(d) Pruebe que (*) no tiene solucione de la forma

$$t\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n.$$

(e) Halle una segunda solución para (*) usando el método de reducción de orden. Exprese la respuesta en forma integral.

20. Considere la ecuación

$$t^2y''+ty'-(1+t)y=0.$$

(a) Demuestre que $r = -1$ y $r = 1$ son dos raíces de la ecuación indicial.
(b) Encuentre una solución de la forma

$$y_1(t)=t\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

(c) Halle una segunda solución usando el método de reducción de orden.

21. Considere la ecuación

$$ty''+ty'+2y=0.$$

(a) Demuestre que $r = 0$ y $r = 1$ son dos raíces de la ecuación indicial.
(b) Encuentre una solución de la forma

$$y_1(t)=t\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

(c) Halle una segunda solución usando el método de reducción de orden.

22. Considere la ecuación

$$ty'' + (1 - t^2)y' + 4ty = 0.$$

(a) Demuestre que $r = 0$ es una raíz doble de la ecuación indicial.
(b) Encuentre una solución de la forma
(c) Halle una segunda solución usando el método de reducción de orden.

23. Considere la ecuación de Bessel de orden cero.

$$t^2y'' + ty' + t^2y = 0.$$

(a) Demuestre que $r = 0$ es una raíz doble de la ecuación indicial.
(b) Encuentre una solución de la forma

$$y_1(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots.$$

Esta solución se designa como $J_0(t)$.
(c) Halle una segunda solución usando el método de reducción de orden.

24. Considere la ecuación de Bessel de orden ν

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$$

donde ν es real y positivo.
(a) Encuentre una solución en serie de potencias.

$$J_\nu(t) = \frac{t^\nu}{2^\nu \nu!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad a_0 = 1.$$

La función $J_\nu(t)$ se conoce como *función de Bessel de orden* ν.
(b) Halle una segunda solución si 2ν no es un entero.

25. La ecuación diferencial

$$ty'' + (1 - t)y' + \lambda y = 0, \quad \lambda \text{ es una constante}$$

se conoce como *ecuación diferencial de Laguerre*.
(a) Demuestre que la ecuación indicial es $r^2 = 0$.
(b) Encuentre una solución $y(t)$ de la ecuación de Laguerre de la forma
(c) Demuestre que dicha solución se reduce a un polinomio si $\lambda = n$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

26. La ecuación diferencial

$$t(1 - t)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)t]y' - \alpha\beta y = 0$$

donde α, β y γ son constantes se denomina *ecuación hipergeométrica*.
(a) Demuestre que $t = 0$ es un punto singular regular, y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $1 - \delta$.
(b) Demuestre que $t = 1$ también es un punto singular regular, y que las raíces de la ecuación indicial, en este caso, son 0 y $\gamma - \alpha - \beta$.
(c) Suponga que γ no es un entero. Encuentre dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de la ecuación hipergeométrica de la forma

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t) = t^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

27. (a) Pruebe que la ecuación

$$2(\text{sen}\,t)y''+(1-t)y'-2y=0$$

tiene dos soluciones de la forma

$$y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad y_2(t)=t^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

(b) Encuentre los primeros cinco términos en estos desarrollos en serie suponiendo que $a_0 = b_0 = 1$.

28. Sea $y(t) = u(t) + iv(t)$ una solución de (3) con valores complejos, siendo $p(t)$ y $q(t)$ funciones con valores reales. Muestre que tanto $u(t)$ como $v(t)$ son soluciones de (3) con valores reales.

29. (a) Demuestre que la ecuación indicial de

$$t^2y''+ty'+(1+t)y=0 \qquad (*)$$

tiene raíces complejas $r = \pm i$.

(b) Demuestre que (*) tiene dos soluciones $y(t)$ linealmente independientes de la forma

$$y(t)=\text{sen}(\ln t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n+\cos(\ln t)\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

2.8.3 *Raíces iguales y raíces que difieren por un número entero*

Raíces iguales.

El problema que se presenta si la ecuación indicial tiene raíces iguales $r_1 = r_2$ es que la ecuación diferencial

$$P(t)\frac{d^2y}{dt^2}+Q(t)\frac{dy}{dt}+R(t)y=0 \qquad (1)$$

tiene solamente una solución de la forma

$$y(t)=t^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \qquad (2)$$

El método para encontrar una segunda solución es muy similar al que se emplea para encontrar una segunda solución de la ecuación de Euler, para el caso de raćies iguales. Escríbase la ecuación (2) de la siguiente manera,

$$y(t)=y(t,r)=t^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)t^n$$

para hacer notar que la solución $y(t)$ depende de la elección de r. Entonces (Sección 2.8.2). 2.8.2).

$$L[y](t,r)=a_0F(r)t^r$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(r)F(n+r)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\right\}t^{n+r}.$$

Ahora es posible considerar a r como una variable continua, y determinar a a_n como una función de r, con la condición de que los coeficientes de t^{n+r} sean nulos para $n \geq 1$. Así pues,

$$a_n(r)=\frac{-\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k}{F(n+r)}$$

Con esta elección de $a_n(r)$, se encuentra que

$$L[y](t,r)=a_0F(r)t^r. \tag{3}$$

En el caso de raíces iguales, $F(r) = (r - r_1)^2$, de modo que se pueda escribir (3) en la forma

$$L[y](t,r)=a_0(r-r_1)^2t^r.$$

Puesto que $L[y](t, r_1) = 0$, se obtiene la solución

$$y_1(t)=t^{r_1}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)t^n\right].$$

Obsérvese ahora que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}L[y](t,r)&=L\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right](t,r)\\&=\frac{\partial}{\partial r}a_0(r-r_1)^2t^r\\&=2a_0(r-r_1)t^r+a_0(r-r_1)^2(\ln t)t^r\end{aligned}$$

se anula cuando $r = r_1$. Ahora bien

$$\begin{aligned}y_2(t)&=\frac{\partial}{\partial r}y_1(t,r)\Big|_{r=r_1}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)t^{n+r}\right]_{r=r_1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(r_1)t^{n+r_1}\right]\ln t+\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(r_1)t^{n+r_1}\\&=y_1(t)\ln t+\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(r_1)t^{n+r_1}\end{aligned}$$

es una segunda solución de (1).

EJEMPLO 1 Encontrar dos soluciones de la ecuación de Bessel de orden cero

$$L[y]=t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+t^2y=0, \quad t>0. \tag{4}$$

SOLUCIÓN. Hágase

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}.$$

Derivando

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$$

y

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$$

entonces

$$\begin{aligned}L[y]&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n t^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}t^{n+r}.\end{aligned}$$

Igualando a cero las sumas de potencias iguales de t,

(i) $r^2a_0=F(r)a_0=0$
(ii) $(1+r)^2a_1=F(1+r)a_1=0$
y
(iii) $(n+r)^2a_n=F(n+r)a_n=-a_{n-2},\ n\geq 2.$

La ecuación (i) es la ecuación indicial y tiene raíces iguales $r_1 = r_2 = 0$. La ecuación (ii) exige que a_1 sea igual a cero, y la relación de recurrencia (iii) implica

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2}.$$

Claramente $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Los coeficientes pares están dados por

$$a_2(r)=\frac{-a_0}{(2+r)^2}=\frac{-1}{(2+r)^2}$$

$$a_4(r)=\frac{-a_2}{(4+r)^2}=\frac{1}{(2+r)^2(4+r)^2}$$

De donde $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Los coeficientes pares están dados por

$$a_{2n}(r)=\frac{(-1)^n}{(2+r)^2(4+r)^2\cdots(2n+r)^2}.$$

Para determinar $y_1(t)$ se hace $r = 0$. Entonces,

$$a_2(0) = \frac{-1}{2^2}$$

$$a_4(0) = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} = \frac{1}{2^4}\frac{1}{(2!)^2}$$

$$a_6(0) = \frac{-1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} = \frac{-1}{2^6(3!)^2}$$

y en general

$$a_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{t^6}{2^6(3!)^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \end{aligned}$$

es una solución de (4). Con frecuencia, se hace referencia a esta solución como *función de Bessel del primer tipo de orden cero* y se denota por $J_0(t)$. Para obtener una segunda solución de (4), hágase

$$y_2(t) = y_1(t)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} a'_{2n}(0)t^{2n}.$$

Para calcular $a^{1}_{2n}(0)$, obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{a'_{2n}(r)}{a_{2n}(r)} &= \frac{d}{dr}\ln|a_{2n}(r)| = \frac{d}{dr}\ln(2+r)^{-2}\cdots(2n+r)^{-2} \\ &= -2\frac{d}{dr}[\ln(2+r) + \ln(4+r) + \cdots + \ln(2n+r)] \\ &= -2\left(\frac{1}{2+r} + \frac{1}{4+r} + \cdots + \frac{1}{2n+r}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a'_{2n}(0) &= -2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)a_{2n}(0) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)a_{2n}(0). \end{aligned}$$

Al hacer

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{5}$$

se encuentra que

$$a'_{2n}(0) = \frac{-H_n(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2}$$

y por ende,

$$y_2(t) = y_1(t)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$$

es una segunda solución de (4) con H_n dada por (5).

Raíces que difieren por un entero positivo. Supóngase que las raíces de la ecuación indicial son r_2 y $r_1 = r_2 + N$, N es un entero positivo. Entonces es posible encontrar una solución de (1) de la forma

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)t^n.$$

Como ya se dijo, tal vez no sería posible encontrar una segunda solución de la forma ción de la forma

$$t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

En ese caso, la ecuación (1) tendrá una segunda solución de la forma

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \left.\frac{\partial}{\partial r} y(t,r)\right|_{r=r_2} \\ &= ay_1(t)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(r_2)t^{n+r_2} \end{aligned}$$

donde a es una constante, y

$$y(t,r) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)t^n$$

con

$$a_0 = a_0(r) = r - r_2.$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en textos más avanzados de ecuaciones diferenciales. En el Ejercicio (5) se plantea una demostración sencilla, usando el método de reducción de orden para mostrar por qué está presente un término con logaritmo.

OBSERVACIÓN. Por lo general es muy difícil y problemático obtener una segunda solución $y(t)$ cuando hay un término con logaritmo. Por ello, no se acostumbra pedir a estudiantes de cursos básicos o intermedios que realicen estos cálculos. Se han incluido algunos ejercicios para los estudiantes interesados. En problemas de este tipo y en otros similares que se presentan en las aplicaciones, con frecuencia basta encontrar sólo los primeros términos del desarrollo en serie de $y_2(t)$, lo cual se logra, usualmente, con el método de reducción de orden.

EJERCICIOS

En los Problemas 1 y 2 demuestre que las raíces de la ecuación indicial son iguales y encuentre dos soluciones linealmente independientes de la ecuación dada.

1. $ty''+y'-4y=0$

2. $t^2y''-t(1+t)y'+y=0$

3. (a) Demuestre que $r = -1$ y $r = 1$ son las raíces de la ecuación indicial para la ecuación de Bessel de orden 1 que sigue:
$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-1)y=0.$$
(b) Encuentre una solución:
$$J_1(t)=\tfrac{1}{2}t\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n, a_0=1.$$
$J_1(t)$ se denomina *función de Bessel de orden* 1.
(c) Obtenga una segunda solución:
$$y_2(t)=-J_1(t)\ln t+\frac{1}{t}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n-1})}{2^{2n}n!(n-1)!}t^{2n}\right].$$

4. Considere la ecuación
$$ty''+3y'-3y=0, \qquad t>0.$$
(a) Demuestre que $r = 0$ y $r = -2$ son las raíces de la ecuación indicial.
(b) Encuentre una solución
$$y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$
(c) Halle una segunda solución
$$y_2(t)=y_1(t)\ln t+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{4}+\frac{11}{36}t+\frac{31}{576}t^2+\cdots.$$

5. El presente ejercicio ofrece una demostración alternativa para algunos de los resultados de esta sección, usando el método de reducción de orden.
(a) Sea $t = 0$ un punto singular regular de la ecuación
$$t^2y''+tp(t)y'+q(t)y=0 \qquad \text{(i)}$$
Demuestre que la sustitución $y = t^rz$ reduce (i) a la ecuación
$$t^2z''+[2r+p(t)]tz'+[r(r-1)+rp(t)+q(t)]z=0. \qquad \text{(ii)}$$
(b) Sea r una raíz de la ecuación indicial. Demuestre que (ii) tiene una solución analítica $z_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$.
(c) Sea $z_2(t) = z_1(t)v(t)$. Pruebe que $z_2(t)=z_1(t)v(t)$.
$$v(t)=\int u(t)\,dt, \quad \text{donde } u(t)=\frac{e^{-\int[2r+p(t)]/t\,dt}}{z_1^2(t)}.$$

(d) Suponga que $r = r_0$ es una raíz doble de la ecuación indicial. Demuestre que $2r_0 + p_0 = 1$ y que por lo tanto,

$$u(t) = \frac{u_0}{t} + u_1 + u_2 t + \cdots.$$

(e) Aplique el resultado de (d) para mostrar que, en el caso de raíces iguales, $y_2(t)$ tiene un término de la forma $\ln t$.

(f) Suponga que las raíces de la ecuación indicial son r_0 y $r_0 - N$, siendo N un número entero positivo. Demuestre que $2r_0 + p_0 = 1 + N$ y que por lo tanto por lo tanto

$$u(t) = \frac{1}{t^{1+N}}\hat{u}(t)$$

donde $u(t)$ es analítica en $t = 0$.

(g) Use el resultado de (f) para mostrar que $y_2(t)$ tiene un término de la forma $\ln t$ si el coeficiente de t^N en el desarrollo de $u(t)$ es diferente de cero. Demuestre, además que si el coeficiente es igual a cero, entonces

$$v(t) = \frac{v_{-N}}{t^N} + \cdots + \frac{v_{-1}}{t} + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots$$

y $y_2(t)$ no tiene el término de la forma $\ln t$.

2.9 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección se describe un método muy simple y extraordinariamente ingenioso para resolver el problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t); \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes. Este procedimiento, que se conoce como *método de la transformada de Laplace*, es muy útil en dos casos que se presentan con frecuencia en las aplicaciones. El primer caso es cuando $f(t)$ es una función discontinua en el tiempo. El segundo caso ocurre cuando $f(t)$ es igual a cero, excepto que en un intervalo pequeño toma valores muy grandes.

Para tener una apreciación correcta del método de la transformada de Laplace se considerará la siguiente situación hipotética. Supóngase que se desean multiplicar los números 3.163 y 16.38, pero se ha olvidado por completo cómo hacer una multiplicación. Supóngase que solamente se recuerda cómo sumar. Como buen matemático, uno se plantea la siguiente cuestión.

Pregunta. ¿Es posible transformar el problema de multiplicar los números 3.163 y 16.38 al problema más simple de sumar dos números?

La respuesta a esta pregunta es por supuesto que sí; y se procede de la siguiente manera. Primero se consulta una tabla de logaritmos y se encuentra que $\ln 3.163 =$

1.15152094 y ln 16.38 = 2.79606108. Después se suman estos dos números para obtener 3.94758202. Por último se consulta la tabla de antilogaritmos y se encuentra que 3.94758202 = ln 51.80994. Se concluye, por lo tanto, que 3.163 × 16.38 = 51.80994.

El punto clave en el análisis del problema es que al trabajar con logaritmos, la operación de multiplicación es reemplazada por la operación más sencilla de la adición. Esto se representa esquemáticamente en la Tabla 1. En el método que se discute en seguida, la función que se desconoce $y(t)$ es reemplazada por una nueva función $Y(s)$, que se llama *transformada de Laplace** de $y(t)$. Dicha asociación tendrá la propiedad de que $y(t)$ será sustituida por $sY(s) - y(0)$. Así pues, la operación de derivación (o diferenciación) con respecto a t será reemplazada en especial por la operación de multiplicación por s. De esta maenra, se sustituirá el problema de valor inicial (1) por una ecuación algebraica que puede ser resuelta explícitamente para $Y(s)$. Una vez que se conoce $Y(s)$, puede consultarse una tabla de "antitransformadas de Laplace" (o "inversas de transformadas de Laplace") y así recuperar $y(t)$.

TABLA 1.

a	$\longrightarrow$	$\ln a$
b	$\longrightarrow$	$\ln b$
$a \cdot b$	$\longrightarrow$	$\ln a + \ln b$

En principio se da la definición de transformada de Laplace.

DEFINICIÓN. Sea $f(t)$ una función definida para $0 \leq t < \infty$. La transformada de Laplace de $f(t)$, la cual se denota por $F(s)$ o por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, está dada por la fórmula

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (2)$$

donde

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\,dt.$$

EJEMPLO 1 Obtener la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$.

SOLUCIÓN. A partir de la ecuación (2)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1-e^{-sA}}{s}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{s}, & s>0 \\ \infty, & s<0 \end{cases}.$$

* (N. del R.) También se denomina más brevemente *transformada laplaciana*.

EJEMPLO 2 Hallar la transformada de Laplace de la función e^{at}

SOLUCIÓN. De la ecuación (2)

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}e^{at}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{(a-s)A}-1}{a-s}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{s-a}, & s>a \\ \infty, & s<a \end{cases}.$$

EJEMPLO 3 Hallar las transformadas de Laplace de las funciones $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$.

SOLUCIÓN. De la ecuación (2) se tiene que

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{\operatorname{sen}\omega t\} = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}\omega t\,dt.$$

Obsérvese además que

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} + i\mathcal{L}\{\operatorname{sen}\omega t\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{(i\omega-s)t}\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{e^{(i\omega-s)A}-1}{i\omega-s}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{s-i\omega} = \dfrac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}, & s>0 \\ \text{no definido} & s<0 \end{cases}$$

Al igualar las partes reales e imaginarias en esta ecuación se tiene

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{\operatorname{sen}\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad s>0.$$

La ecuación (2) asocia cada función $f(t)$ con una nueva función, que se llama $F(s)$. Como lo sugiere la notación $\mathcal{L}\{f(t)\}$, la transformada de Laplace es un operador que actúa sobre las funciones. Se trata además de un operador lineal, ya que

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]\,dt$$

$$= c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt$$

$$= c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Sin embargo, hay que notar que mientras $f(t)$ está definida para $0 \le t < \infty$, su transformada de e^{8t} está definida en el intervalo abierto $8 < s < \infty$. Esto se debe a que en general la integral (2) existe solamente si s es lo bastante grande.

Una dificultad muy seria que tiene la definición (2) es que la integral podría no existir para cualquier valor de s. Esto sucede si $f(t) = e^{t^2}$ (Ejercicio 13). Para garantizar que la transformada de Laplace de $f(t)$ existe al menos en un intervalo $s > s_0$, se exigirá a $f(t)$ la siguiente condición.

garantizar que la transformada de Laplace de $f(t)$ existe al menos en un intervalo $s > s_0$, se exigirá a $f(t)$ la siguiente condición.

(i) La función $f(t)$ es continua por secciones. Esto significa que $f(t)$ tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo $0 \leq t \leq A$, y tanto el límite por la derecha, como por la izquierda de f, existe en todos los puntos de discontinuidad. En otras palabras, $f(t)$ tiene solamente un número finito de discontinuidades "de salto" en cualquier intervalo finito. En la Figura 1 se describe la gráfica de una función continua clásica por secciones.

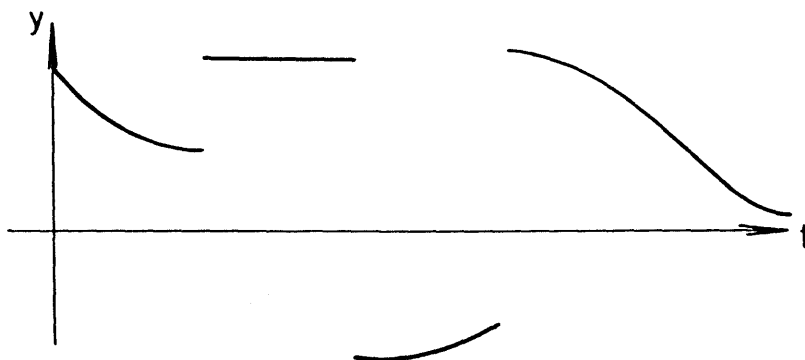


FIGURA 1. Gráfica de una función continua clásica por secciones.

(ii) La función $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, existen constantes M y c, tales que

$$|f(t)| \leqslant Me^{ct}, \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

LEMA 1. *Sea $f(t)$ una función continua por secciones y de orden exponencial, entonces su transformada de Laplace existe para toda s lo bastante grande. Específicamente, si $f(t)$ es continua por secciones y $|f(t)| \leq Me^{ct}$, entonces $F(s)$ existe para $s > c$.*

Se demostrará el Lema 1 con ayuda del siguiente lema de cálculo integral, el cual se enuncia, a continuación, sin demostrar.

LEMA 2. *Sea $g(t)$ una función continua por secciones. Entonces la integral impropia $\int_0^\infty g(t)dt$ existe si $\int_0^\infty |g(t)|dt$ existe. Para demostrar que esta última integral existe, basta probar que hay una constante K tal que*

$$\int_0^A |g(t)|\,dt \leqslant K$$

para toda A.

OBSERVACIÓN. Nótese la similitud del Lema 2 con el teorema de la serie infinita (Apéndice B), el cual establece que la serie infinita Σa_n converge si $\Sigma|a_n|$ converge, y que $\Sigma|a_n|$ converge si existe una constante K, tal que $|a_1| + \ldots + |a_n| \leq K$ para toda n.

Ahora es posible dar la demostración del Lema 1.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Dado que $f(t)$ es continua por secciones, entonces la integral $\int_0^A e^{-st}f(t)dt$ existe para toda A. A fin de demostrar que la integral tiene un límite para toda s suficientemente grande, obsérvese que

$$\int_0^A |e^{-st}f(t)|\,dt < M\int_0^A e^{-st}e^{ct}\,dt$$
$$= \frac{M}{c-s}\left[e^{(c-s)A}-1\right] < \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Entonces con base en el Lema 2, se tiene que la transformada de Laplace de $f(t)$ existe para $s > c$. Así pues, a partir de ahora se supondrá tácitamente que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, y $s > c$.

La utilidad real de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales reside en el hecho de que la transformada de Laplace de $f'(t)$ está muy relacionada con la transformada de $f(t)$. Ese es el contenido del siguiente lema importante.

LEMA 3. *Sea* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. *Entonces*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración del Lema 3 es muy elemental; simplemente hay que escribir la fórmula para la transformada de Laplace de $f'(t)$, e integrar por partes. De hecho se tiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f'(t)\,dt$$
$$= \lim_{A\to\infty} e^{-st}f(t)\Big|_0^A + \lim_{A\to\infty} s\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt$$
$$= -f(0) + s\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f(t),dt$$
$$= -f(0) + sF(s). \qquad \square$$

El siguiente paso es encontrar una relación entre la transformada de Laplace de $f''(t)$ y la de $f(t)$. El Lema 4 se refiere a lo anterior.

LEMA 4. *Sea* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. *Entonces,*

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

DEMOSTRACIÓN. Al aplicar dos veces el Lema 3 se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$ □

Se cuenta ahora con los elementos necesarios para pasar del problema de resolver a un problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t); \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \tag{3}$$

al de resolver una ecuación algebraica. Sean $Y(s)$ y $F(s)$ las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $f(t)$, respectivamente. Aplicando el operador de transformación en ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene que

$$\mathcal{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} = F(s).$$

Al aplicar la linealidad del opeador de transformación se obtiene que

$$\mathcal{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} = a\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + c\mathcal{L}\{y(t)\},$$

y de acuerdo con los Lemas 3 y 4, se sigue que

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y_0, \qquad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy_0 - y'_0.$$

Por lo tanto,

$$a[s^2Y(s) - sy_0 - y'_0] + b[sY(s) - y_0] + cY(s) = F(s)$$

y esta *ecuación algebraica* implica que

$$Y(s) = \frac{(as+b)y_0}{as^2+bs+c} + \frac{ay'_0}{as^2+bs+c} + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}. \tag{4}$$

La ecuación (4) describe la transformada de Laplace de la solución $y(t)$ de (3). Para evaluar $y(t)$ es necesario consultar las tablas de antitransformadas de Laplace. Ahora bien, así como $Y(s)$ se expresa explícitamente en términos de $y(t)$, es decir $Y(s) = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt$, también es posible dar una fórmula explícita para $y(t)$. Sin embargo, esta fórmula, que se escribe simbólicamente como $y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, implica una integración con respecto a una variable compleja, cosa que va más allá del tema tratado en este libro. Por ello, en vez de aplicar la fórmula, se deducirán en la siguiente sección algunas propiedades funcionales del operador transformada de Laplace. Las propieda-

des permitirán invertir por simple inspección muchas transformadas de Laplace, es decir, permitirán reconocer de qué funciones son transformadas.

EJEMPLO 4 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t};\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

SOLUCIÓN. Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial, se obtiene

$$s^2Y(s)-s-3[sY(s)-1]+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

y esto implica que

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{(s-3)(s^2-3s+2)}+\frac{s-3}{s^2-3s+2}\\&=\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}+\frac{s-3}{(s-1)(s-2)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Para hallar $y(t)$, se desarrolla en fracciones parciales cada uno de los términos del segundo miembro de (5), obteniéndose

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}.$$

Esto implica que

$$A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s-2)=1.\tag{6}$$

Al hacer $s = 1$ en (6) se obtiene $A = ½$; haciendo $s = 2$ se obtiene $B = 1$ y con $s = 3$ se obtiene $c = ½$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}.$$

De manera similar,

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)}=\frac{D}{s-1}+\frac{E}{s-2}$$

y de aquí

$$D(s-2)+E(s-1)=s-3.\tag{7}$$

Al hacer $s = 1$ en (7) se obtiene $D = 2$, mientras que con $s = 2$ se obtiene $E = -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}+\frac{2}{s-1}-\frac{1}{s-2}\\&=\frac{5}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-3}.\end{aligned}$$

Ahora, el primer término es la transformada de Laplace de $5/2e^t$. De manera similar, el segundo y el tercer términos son las transformadas de $-2e^{2t}$ y $\frac{1}{2}e^{3t}$, respectivamente. Por consiguiente,

$$Y(s)=\mathcal{L}\left\{\tfrac{5}{2}e^t-2e^{2t}+\tfrac{1}{2}e^{3t}\right\}$$

de modo que

$$y(t)=\tfrac{5}{2}e^t-2e^{2t}+\tfrac{1}{2}e^{3t}.$$

OBSERVACIÓN. En realidad se ha hecho algo de trampa al resolver el problema, ya que hay una infinidad de funciones cuyas transformadas de Laplace constituyen una función dada. Por ejemplo, la transformada de Laplace de las funciones

$$z(t)=\begin{cases}\tfrac{5}{2}e^t-2e^{2t}+\tfrac{1}{2}e^{3t}, & t\neq 1,\ 2 \text{ y } 3\\ 0, & t=1,2,3\end{cases}$$

es también $Y(s)$, ya que $z(t)$ difiere de $y(t)$ solamente en tres puntos.* Sin embargo, sólo hay una función *continua* $y(t)$ cuya transformada de Laplace es una función dada $Y(s)$, y es este el sentido en el que se escribe $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Es necesario hacer notar que el Ejemplo 4 se presentó con el fin de ilustrar el método de la transformada de Laplace, a fin de resolver problemas de valor inicial. El mejor procedimiento para resolver este problema particular de valor inicial es el método de la conjetura sensata. Sin embargo, a pesar de que el camino para resolver este problema particular mediante la transformada de Laplace es más largo, aún conserva algo "bello y satisfactorio" como método de resolución. Si se hubiera resuelto este problema por el método de la conjetura sensata, se habría calculado primero una solución particular $\psi(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$. Después se habrían encontrado dos soluciones linealmente independientes e^t y e^{2t} para la ecuación homogénea, y se habría escrito

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+\tfrac{1}{2}e^{3t}$$

como la solución general de la ecuación diferencial. Por último, se habrían calculado $c_1 = 5/2$ y $c_2 = -2$ a partir de las condiciones iniciales. Lo que no es satisfactorio acerca del método es que es necesario calcular primero *todas* las soluciones de la ecuación diferencial antes de poder encontrar la solución específica $y(t)$ que se busca. En contraste con eso, el método de la transformada de Laplace permite calcular $y(t)$ directamente, sin tener que encontrar antes todas las soluciones de la ecuación diferencial.

EJERCICIOS

Determine la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

1. t **2.** t^n

---

* Si $f(t) = g(t)$, excepto en un número finito de puntos, entonces $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

3. $e^{at}\cos bt$

4. $e^{at}\operatorname{sen} bt$

5. $\cos^2 at$

6. $\operatorname{sen}^2 at$

7. $\operatorname{sen} at \cos bt$

8. $t^2 \operatorname{sen} t$

9. Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$, obtenga $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$. *Sugerencia:* Haga el cambio de variable $u = \sqrt{t}$ en (2).

Demuestre que cada una de las siguientes funciones es de orden exponencial.

13. Demuestre que e^{t^2} no tiene una transformada de Laplace. *Sugerencia:* Pruebe que $e^{t^2-st} > e^t$ para $t > s + 1$.

14. Suponga que $f(t)$ es de orden exponencial. Demuestre que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ tiende a cero si $s \to \infty$.

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

15. $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

16. $2y'' + y' - y = e^{3t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Determine la transformada de Laplace para las soluciones de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial:

17. $y'' + 2y' + y = e^{-t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

18. $y'' + y = t^2 \operatorname{sen} t$; $y(0) = y'(0) = 0$

19. $y'' + 3y' + 7y = \cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

20. $y'' + y' + y = t^3$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

21. Demuestre que todas las soluciones $y(t)$ de $ay'' + by' + cy = f(t)$ son de orden exponencial si $f(t)$ lo es también. *Sugerencia:* Demuestre que todas las soluciones de la ecuación homogénea son de orden exponencial. Obtenga una solución particular usando el método de variación de parámetros, y pruebe que dicha solución también es de orden exponencial.

22. Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Demuestre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \frac{df^{(n-1)}(0)}{dt^{n-1}}.$$

Sugerencia: Intente mediante inducción.

23. Resuelva el problema de valor inicial

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}; \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

24. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}; \qquad y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0$$

por el método de la transformada de Laplace. *Sugerencia:* Haga $\phi(t) = y(t + t_0)$.

2.10 ALGUNAS PROPIEDADES ÚTILES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección se obtendrán algunas propiedades importantes de las transformadas de Laplace. Usando dichas propiedades, será posible calcular la transformada de la mayoría de las funciones sin tener que realizar integraciones tediosas. Además se podrán invertir muchas transformadas laplacianas por simple inspección.

PROPIEDAD 1. Si $\{f(t)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición, $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a s, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st})f(t)\,dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt\\ &= \mathcal{L}\{-tf(t)\}.\end{aligned}$$ □

La Propiedad 1 establece que la transformada de Laplace de la función $-tf(t)$ es la derivada de la transformada de Laplace de $f(t)$. Así pues, si se conoce la transformada $F(s)$ de $f(t)$, entonces no es necesario realizar una integración tediosa para encontrar la transformada de $tf(t)$: solamente se necesita derivar $F(s)$ y multiplicar por -1.

EJEMPLO 1 Obtener la transformada de Laplace de te^t.

SOLUCIÓN. La transformada de e^t es $1/(s-1)$. Por lo tanto, por la Propiedad 1 la transformada de Laplace de te^t es

$$\mathcal{L}\{te^t\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

EJEMPLO 2 Obtener la transformada de Laplace de t^{13}.

SOLUCIÓN. Usando la Propiedad 1 trece veces consecutivas se obtiene

$$\mathcal{L}\{t^{13}\} = (-1)^{13}\frac{d^{13}}{ds^{13}}\mathcal{L}\{1\} = (-1)^{13}\frac{d^{13}}{ds^{13}}\frac{1}{s} = \frac{(13)!}{s^{14}}.$$

La utilidad principal de la Propiedad 1 es invertir transformadas, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $-1/(s-2)^2$?

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$-\frac{1}{(s-2)^2}=\frac{d}{ds}\frac{1}{s-2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{s-2}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}.$$

Por lo tanto, por la Propiedad 1 se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-2)^2}\right\}=-te^{2t}.$$

EJEMPLO 4 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $-4s/(s^2+4)^2$?

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$-\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} \quad \text{y} \quad \frac{2}{s^2+4}=\mathcal{L}\{\operatorname{sen}2t\}.$$

Por lo tanto, por la Propiedad 1 resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}=-t\operatorname{sen}2t.$$

EJEMPLO 5 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $1/(s/4)^3$?

SOLUCIÓN. Se reconoce fácilmente que

$$\frac{1}{(s-4)^3}=\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{2}\frac{1}{s-4}.$$

Por lo tanto, al aplicar la Propiedad 1 dos veces, se encuentra que

$$\frac{1}{(s-4)^3}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2e^{4t}\right\}.$$

PROPIEDAD 2. Si $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a).$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{(a-s)t}f(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt\equiv F(s-a).$$ □

La Propiedad 2 establece que la transormada de Laplace de $e^{at}f(t)$ evaluada en el punto s es igual a la transformada de $f(t)$ evaluada en el punto $(s-a)$. De este modo, si

se conoce la transformada $F(s)$ de $f(t)$, entonces no es necesario evaluar la integral para encontrar la transformada de Laplace de $e^{at}f(t)$; basta con sustituir s por $s - a$ en $F(s)$.

EJEMPLO 6 Determinar la transformada de Laplace de $e^3 \operatorname{sen} t$.

SOLUCIÓN. La transformada de $\operatorname{sen} t$ es $1/(s^2 + 1)$. Por lo tanto, para obtener la transformada de Laplace de $e^{3t} \operatorname{sen} t$, basta sustituir s por $s - 3$, es decir

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{(s-3)^2+1}.$$

La utilidad real de la Propiedad 2 se pone de manifiesto al invertir las transformadas laplacianas, como lo muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7 ¿Qué función $g(t)$ tiene la transformada de Laplace

$$G(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}?$$

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$F(s) = \frac{s}{s^2+5^2} = \mathcal{L}\{\cos 5t\}$$

y que $G(s)$ se obtiene de $F(s)$ al sustituir s por $s - 7$. Por lo tanto, por la Propiedad 2,

$$\frac{s-7}{(s-7)^2+25} = \mathcal{L}\{e^{7t}\cos 5t\}.$$

EJEMPLO 8 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $1/(s^2 - 4s + 9)$?

SOLUCIÓN. Una manera de resolver el problema es desarrollar $1/(s^2 - 4s + 9)$ en fracciones parciales. Una manera mucho mejor es completando cuadrados en $s^2 - 4s + 9$, de modo que

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{s^2-4s+4+(9-4)} = \frac{1}{(s-2)^2+5}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{s^2+5} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\sqrt{5}\, t\right\}.$$

Por lo tanto, por la Propiedad 2 se tiene

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{(s-2)^2+5} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\operatorname{sen}\sqrt{5}\, t\right\}.$$

EJEMPLO 9 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $s/(s^2 - 4s + 9)$?

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$\frac{s}{s^2-4s+9}=\frac{s-2}{(s-2)^2+5}+\frac{2}{(s-2)^2+5}.$$

La función $s/(s^2+5)$ es la transformada de $\cos\sqrt{5}\,t$. Por lo tanto, por la Propiedad 2 se tiene que

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+5}=\mathcal{L}\{e^{2t}\cos\sqrt{5}\,t\},$$

y

$$\frac{s}{s^2-4s+9}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cos\sqrt{5}\,t+\frac{2}{\sqrt{5}}e^{2t}\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t\right\}.$$

En la sección anterior se mostró que la transformada de Laplace es un operador lineal, es decir, que

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}.$$

Entonces, si se conocen las transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$ de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, no es necesario realizar ninguna integración para encontrar la transformada de Laplace de una combinación lineal de $f_1(t)$ y $f_2(t)$; sólo se necesita tomar la misma combinación lineal de $F_1(s)$ y $F_2(s)$. Por ejemplo, dos funciones que se presentan con mucha frecuencia en el estudio de las ecuaciones diferenciales son el coseno y el seno hiperbólicos. Estas funciones se definen por medio de las ecuaciones

$$\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2},\qquad \operatorname{senh} at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}.$$

Por lo tanto, según la linealidad de la transformada de Laplace, resulta que

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right]=\frac{s}{s^2-a^2}$$

y

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{a}{s^2-a^2}.$$

EJERCICIOS

Aplique las Propiedades 1 y 2 para encontrar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

1. t^n **2.** t^ne^{at} **3.** $t\operatorname{sen} at$ **4.** $t^2\cos at$

5. $t^{5/2}$ (Ejercicio 9 de la Sección 2.9).

6. Sea $F(s) = \{f(t)\}$ y suponga que $f(t)/t$ tiene un límite cuando t tiende a cero. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty F(u)\,du. \qquad (*)$$

(La suposición de que $f(t)/t$ tiene un límite cuando $t \to 0$ garantiza la existencia de la integral en el segundo miembro de (*)).

7. Use la ecuación (*) del Problema 6 pra hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ (b) $\dfrac{\cos at - 1}{t}$ (c) $\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t}$

Halle la antitransformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones. En varios de los problemas puede ser útil escribir las funciones

$$p_1(s) = \frac{\alpha_1 s^3 + \beta_1 s^2 + \gamma_1 s + \delta_1}{(as^2 + bs + c)(ds^2 + es + f)} \quad \text{y} \quad p_2(s) = \frac{\alpha_1 s^2 + \beta_1 s + \gamma}{(as + b)(cs^2 + ds + e)}$$

en la forma más sencilla.

$$p_1(s) = \frac{As + B}{as^2 + bs + c} + \frac{Cs + D}{ds^2 + es + f} \quad \text{y} \quad p_2(s) = \frac{A}{as + b} + \frac{Cs + D}{cs^2 + ds + e}.$$

8. $\dfrac{s}{(s+a)^2 + b^2}$

9. $\dfrac{s^2 - 5}{s^3 + 4s^2 + 3s}$

10. $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$

11. $\dfrac{s}{s^2 - 3s - 12}$

12. $\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

13. $\dfrac{3s}{(s+1)^4}$

14. $\dfrac{1}{s(s+4)^2}$

15. $\dfrac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

16. $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

17. Sea $F(s) = \{f(t)\}$. Demuestre que

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}.$$

Así pues, si se sabe como invertir $F'(s)$, se sabrá también como invertir $F(s)$.

18. Use el resultado del Problema 17 para hallar la inversa de cada una de las siguientes transformadas de Laplace.

(a) $\ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$ (b) $\arctan\dfrac{a}{s}$ (c) $\ln\left(1 - \dfrac{a^2}{s^2}\right)$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial mediante el uso del método de la transformada de Laplace.

19. $y'' + y = \operatorname{sen} t; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

20. $y'' + y = t\operatorname{sen} t; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

21. $y'' - 2y' + y = te^t; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

22. $y'' - 2y' + 7y = \operatorname{sen} t; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

23. $y'' + y' + y = 1 + e^{-t}; \quad y(0) = 3, y'(0) = -5$

24. $y'' + y = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ 3t - 7, & 3 < t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

2.11 ECUACIONES DIFERENCIALES CON TÉRMINO NO HOMOGÉNEO DISCONTINUO

En muchas aplicaciones, el segundo miembro de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = f(t)$ tiene una o más discontinuidades de salto. Por ejemplo, una partícula puede encontrarse en movimiento bajo la influencia de una fuerza $f_1(t)$ y, repentinamente, en el tiempo t_1 sufrir los efectos de una fuerza adicional $f_2(t)$. Estas ecuaciones son, con frecuencia, muy difíciles de resolver con los métodos estudiados en las Secciones 2.4 y 2.5. En la presente sección se describirá cómo tratar el problema con el método de la transformada de Laplace. Se iniciará obteniendo primero las transformadas de Laplace de algunas funciones discontinuas sencillas.

El ejemplo más sencillo de una función con una sola discontinuidad de salto es la función

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < c \\ 1, & t > c \end{cases}.$$

Esta función, cuya gráfica aparece en la Figura 1, se conoce como *función escalín* o *función de Heaviside*. Su transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_c^A e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-cs} - e^{-sA}}{s} \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \end{aligned}$$

Considérese ahora una función f definida en el intervalo $0 \le t < \infty$, y sea g la función que se obtiene de f al trasladar la gráfica de f c unidades hacia

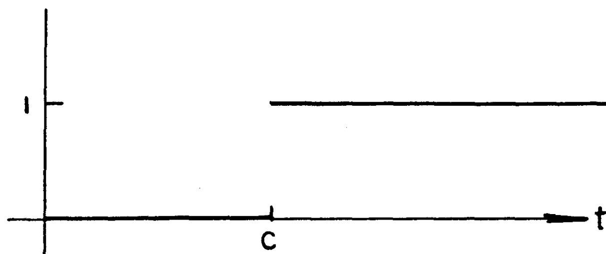


FIGURA 1. Gráfica de $H_c(t)$

la derecha, como se muestra en la Figura 2. Dicho con más precisión, $g(t) = 0$ para $0 \le t < c$, y $g(t) = f(t - c)$ para $t \ge c$. Por ejemplo, si $c = 2$, entonces el valor de g en $t = 7$ es el valor de f en $t = 5$. Una expresión analítica conveniente para $g(t)$ es

$$g(t) = H_c(t)f(t-c).$$

El factor $H_c(t)$ hace a g igual a cero para $0 \le t < c$ y al cambiar el argumento t de f por $t - c$, f se mueve c unidades hacia la derecha. Dado que $g(t)$ se obtiene a partir de f en una forma sencilla, se esperaría entonces que su transformada de Laplace se pudiera obtener en forma sencilla a partir de la transformada de $f(t)$. A continuación se demostrará que efectivamente eso ocurre.

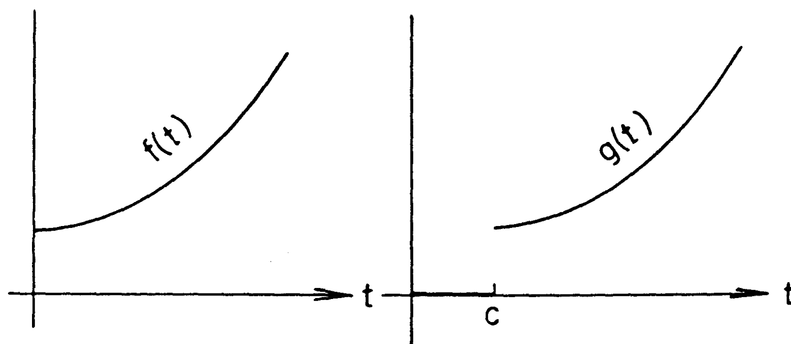


FIGURA 2.

PROPIEDAD 3. Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Entonces

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)f(t-c)\,dt$$
$$= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt.$$

Para resolver la integral conviene hacer la sustitución

$$\xi = t - c.$$

Entonces

$$\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(\xi+c)}f(\xi)\,d\xi$$
$$= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi$$
$$= e^{-cs}F(s).$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$. □

EJEMPLO 1 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace e^{-s}/s^2?

SOLUCIÓN. Se sabe que $1/s^2$ es la transformada laplaciana de la función t, y por la Propiedad 3 resulta entonces

$$\frac{e^{-s}}{s^2} = \mathfrak{L}\{H_1(t)(t-1)\}.$$

La gráfica de $H_1(t)(t-1)$ se muestra en la Figura 3.

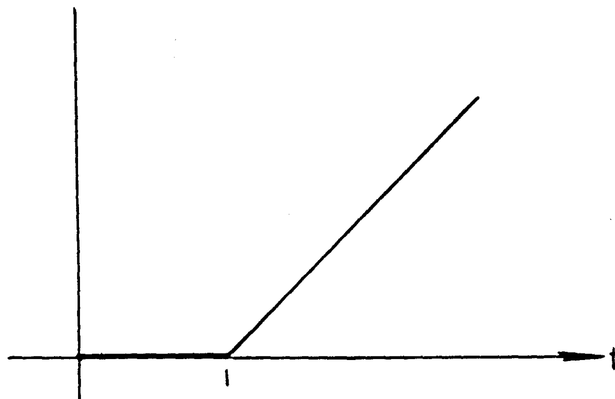


FIGURA 3. Gráfica de $H_1(t)(t-1)$

EJEMPLO 2 ¿Qué función tiene la transformada de Laplace $e^{-3s}/(s^2 - 2s - 3)$?

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$\frac{1}{s^2-2s-3} = \frac{1}{s^2-2s+1-4} = \frac{1}{(s-1)^2-2^2}.$$

Dado que $1/(s^2 - {}^2) = \mathfrak{L}\{½ \operatorname{sen} h\, 2t\}$, se concluye entonces de la Propiedad 2 que

$$\frac{1}{(s-1)^2-2^2} = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}e^t \operatorname{senh} 2t\right\}.$$

y según la Propiedad 3 se tiene entonces

$$\frac{e^{-3s}}{s^2-2s-3} = \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{2}H_3(t)e^{t-3}\operatorname{senh} 2(t-3)\right\}.$$

EJEMPLO 3 Sea $f(t)$ la función que vale t para $0 \le t < 1$, y vale 0 para $t \ge 1$. Encontrar la transformada de Laplace de f sin realizar ninguna integración.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $f(t)$ puede escribirse en la forma

$$f(t) = t[H_0(t) - H_1(t)] = t - tH_1(t).$$

Por lo tanto, por la Propiedad 1,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t\}-\mathcal{L}\{tH_1(t)\}$$
$$=\frac{1}{s^2}+\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}.$$

EJEMPLO 4 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1; \quad 0, \quad 1\leqslant t<2;\\ 1, & 2\leqslant t<3; \quad 0, \quad 3\leqslant t<4;\\ 1, & 4\leqslant t<5; \quad 0, \quad 5\leqslant t<\infty.\end{cases} \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

SOLUCIÓN. Sean $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene que $(s^2 - 3s + 2)\,Y(s) = F(s)$, de modo que

$$Y(s)=\frac{F(s)}{s^2-3s+2}=\frac{F(s)}{(s-1)(s-2)}.$$

Una manera de calcular $F(s)$ es escribir $f(t)$ en la forma

$$f(t)=[H_0(t)-H_1(t)]+[H_2(t)-H_3(t)]+[H_4(t)-H_5(t)].$$

Por lo tanto, basados en la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-5s}}{s}.$$

Una segunda manera de calcular $F(s)$ es evaluar la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-st}\,dt+\int_2^3 e^{-st}\,dt+\int_4^5 e^{-st}\,dt$$
$$=\frac{1-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}+\frac{e^{-4s}-e^{-5s}}{s}.$$

Como consecuencia, se obtiene

$$Y(s)=\frac{1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}-e^{-5s}}{s(s-1)(s-2)}.$$

El paso siguiente ahora, es desarrollar $1/s(s-1)(s-2)$ en fracciones parciales; es decir, se escribirá

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}.$$

Esto implica que

$$A(s-1)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s-1)=1. \tag{1}$$

Tomando $s = 0$ en (1) implica que $A = ½$; si se toma $s = 1$ se obtiene que $B = -1$, y con $s = 2$ se obtiene $c = ½$. Así pues,

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$
$$= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right\}.$$

Por lo tanto, a partir de la Propiedad 3

$$\begin{aligned} y(t) = &\left[\tfrac{1}{2} - e^t + \tfrac{1}{2}e^{2t}\right] - H_1(t)\left[\tfrac{1}{2} - e^{(t-1)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-1)}\right] \\ &+ H_2(t)\left[\tfrac{1}{2} - e^{(t-2)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-2)}\right] - H_3(t)\left[\tfrac{1}{2} - e^{(t-3)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-3)}\right] \\ &+ H_4(t)\left[\tfrac{1}{2} - e^{(t-4)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-4)}\right] - H_5(t)\left[\tfrac{1}{2} - e^{(t-5)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-5)}\right]. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Puede verificarse fácilmente que la función

$$\tfrac{1}{2} - e^{(t-n)} + \tfrac{1}{2}e^{2(t-n)}$$

y sus derivadas se anulan en $t = n$. Por ello, tanto $y(t)$ como $y'(t)$ son funciones continuas en el tiempo, a pesar de que $f(t)$ es discontinua en $t = 1, 2, 3, 4$ y 5. En forma más general, tanto la solución $y(t)$ del problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t); \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

como su derivada de $y'(t)$ son siempre funciones continuas en el tiempo, si $f(t)$ es continua por secciones. En la Sección 2.12 se explicará la demostración de este resultado.

EJERCICIOS

Encuentre la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

1. $y'' + 2y' + y = 2(t-3)H_3(t); \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' + y' + y = H_\pi(t) - H_{2\pi}(t); \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
3. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}; \quad y(0) = 3, y'(0) = -2$
4. $y'' + y = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & \pi < t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
5. $y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 3, y'(0) = -1$
6. $y'' + 2y' + y = \begin{cases} \operatorname{sen} 2t, & 0 < t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

7. $y''+y'+7y=\begin{cases} t, & 0<t<2 \\ 0, & 2<t<\infty \end{cases};\quad y(0)=0, y'(0)=0$

8. $y''+y=\begin{cases} t^2, & 0<t<1 \\ 0, & 1<t<\infty \end{cases};\quad y(0)=0, y'(0)=0$

9. $y''-2y'+y=\begin{cases} 0, & 0<t<1 \\ t, & 1<t<2 \\ 0, & 2<t<\infty \end{cases};\quad y(0)=0, y'(0)=1$

10. Obtenga la transformada de Laplace de $|\operatorname{sen} t|$. *Sugerencia:* Observe que

$$|\operatorname{sen} t|=\operatorname{sen} t+2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n\pi}(t)\operatorname{sen}(t-n\pi).$$

11. Resuelva el problema de valor inicial del Ejemplo 4 por el método de la conjetura sensata. *Sugerencia:* Halle la solución general de la ecuación diferencial en cada uno de los intervalos $0 < t < 1$, $1 < t < 2$, $2 < t < 3$, $3 < t < 4$, $4 < t < 5$, $5 < t < \infty$, y elija las constantes de modo que tanto $y(t)$ como $y'(t)$ sean continuas en los puntos $t = 1, 2, 3, 4$ y 5.

2.12 FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

En muchas aplicaciones físicas y biológicas aparece a menudo el problema de valor inicial inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t);\qquad y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0' \tag{1}$$

donde no se conoce $f(t)$ explícitamente. Estos problemas se presentan por lo común cuando se trabaja con fenómenos de naturaleza impulsiva. En tales casos, la única información con la que se cuenta acerca de $f(t)$ es que es igual a cero, excepto por un intervalo muy corto de tiempo $t_0 \le t \le t_1$, y que su integral sobre dicho intervalo es un número dado $I_0 \neq 0$. Si I_0 no es muy pequeño, entonces $f(t)$ será muy grande en el intervalo $t_0 \le t \le t_1$. Tales funciones se conocen como *funciones de impulso*, y en la Figura 1 se muestra la gráfica de una función $f(t)$ típica.

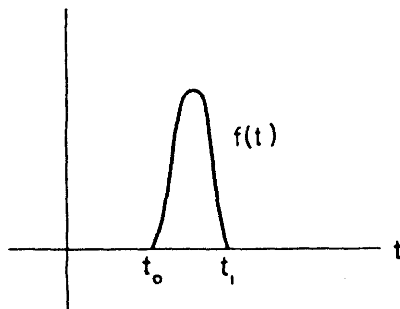


FIGURA 1. La gráfica de una función típica de impulso $f(t)$

A principios de la década de 1930 el físico P.A.M. Dirac, ganador del premio Nobel, elaboró un método muy controvertido para trabajar con funciones de impulso. Su método se basa en el siguiente razonamiento. Sea t_1 cada vez más cercano a t_0. Entonces la función $f(t)/I_0$ tiende a la función que es 0 para $t \neq t_0$, e igual a ∞ para $t = t_0$, y cuya integral sobre cualquier intervalo que contiene a t_0 vale 1. Esta función, que es conocida como *función delta de Dirac*, se denotará por $\delta(t - t_0)$. Por supuesto que $\delta(t - t_0)$ no es una función en el sentido usual. Sin embargo, decía Dirac, puede operarse formalmente con $\delta(t - t_0)$ como si en efecto fuera una función. Entonces, si se hace $f(t) = I_0\delta(t - t_0)$ en (1) y se impone la condición

$$\int_a^b g(t)\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} g(t_0) & \text{si } a \leqslant t_0 \leqslant b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{2}$$

para toda función continua $g(t)$, se obtendrá siempre la solución correcta $y(t)$.

OBSERVACIÓN. Ciertamente es muy razonable imponer como condición la ecuación (2) a $\delta(t - t_0)$. Para una mejor comprensión, supóngase que $f(t)$ es una función de impulso que resulta positiva para $t_0 < t < t_1$, igual a cero en cualquier otro punto, y cuya integral sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ es igual a 1. Para cualquier función continua $g(t)$,

$$\left[\min_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t)\right] f(t) \leqslant g(t)f(t) \leqslant \left[\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t)\right] f(t).$$

Como consecuencia, se sigue que

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\min_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t)\right] f(t)\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} g(t)f(t)\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1}\left[\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t)\right] f(t)\,dt,$$

o bien,

$$\min_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t) \leqslant \int_{t_0}^{t_1} g(t)f(t)\,dt \leqslant \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} g(t).$$

Así pues, cuando $t_1 \to t_0$, $\int_{t_0}^{t_1} g(t)f(t)\,dt \to g(t_0)$.

Ahora bien, por supuesto que la mayoría de los matemáticos usualmente se burlan de este método. "¿Cómo es posible considerar a $\delta(t - t_0)$ como una función en el sentido usual si obviamente no lo es?", cuestionaban los matemáticos. Sin embargo, nunca se rieron muy fuerte, ya que Dirac y sus seguidores siempre obtenían la respuesta correcta. A fines de la década de 1940, en una de las historias de mayor éxito en las matemáticas, el matemático francés Laurent Schwartz logró ubicar la función delta de Dirac sobre un fundamento matemático firme. Lo logró ampliando la clase de todas las funciones de modo que pudiera quedar incluida la función delta de Dirac. En la presente sección se presenta primero una justificación física del método de Dirac. Después se indica cómo resolver el problema de valor inicial (1) por el método de la transformada de Laplace. Por último, se señala brevemente el "germen" de la brillante idea de Laurent Schwartz.

Justificación física del método de Dirac. La segunda ley de Newton del movimiento se escribe usualmente en la forma

$$\frac{d}{dt}mv(t) = f(t) \tag{3}$$

donde m es la masa de la partícula, v es su velocidad, y $f(t)$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula. La cantidad mv se denomina *ímpetu* (o moméntum o cantidad de movimiento)* de la partícula. Al integrar la ecuación (3) entre t_0 y t, se obtiene

$$mv(t_1) - mv(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt.$$

Esta ecuación dice que el cambio en el ímpetu de la partícula entre el tiempo t_0 y el tiempo t_1 es igual $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Así pues, la cantidad importante desde el punto de vista físico es la integral de la fuerza respecto al tiempo, la cual se conoce como el *impulso ejercido por la fuerza*, más que la fuerza misma. Ahora bien, puede suponerse en la ecuación (1) que $a > 0$, ya que de otro modo se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por -1 para obtener $a > 0$. En ese caso (Sección 2.6), puede considerarse a $y(t)$, para $t \leq t_0$, como la posición de una partícula de masa a, en el tiempo t, moviéndose bajo la influencia de la fuerza $-b(dy/dt) - cy$. En el tiempo t_0 se aplica sobre la partícula una fuerza $f(t)$; dicha fuerza actúa durante un intervalo de tiempo muy corto $t_0 \leq t \leq t_1$. Dado que dicho lapso es extremadamente corto, puede entonces suponerse que la posición de la partícula no cambia mientras la fuerza actúa. De modo que el resultado es que la fuerza de impulso $f(t)$ provoca un salto de magnitud I_0/a en la velocidad de la partícula en el tiempo t_0. En otras palabras, $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0; \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

para $0 \leq t < t_0$, y

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0; \qquad y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z'_0 + \frac{I_0}{a} \tag{4}$$

para $t \geq t_0$, donde z_0 y z'_0 son la posición y la velocidad de la partícula, un instante antes de que actúe la fuerza de impulso. Por lo tanto, es evidente que cualquier método que utilice correctamente el ímpetu I_0 transferido a la partícula en el tiempo t_0 por la fuerza de impulso $f(t)$, debe dar la respuesta correcta. También es claro que se obtiene continuamente la información del ímpetu I_0 transmitido a la partícula por $f(t)$ si se sustituye $f(t)$ por $I_0\delta(t - t_0)$ y se cumple la ecuación (2). Por lo tanto, el método de Dirac siempre dará la respuesta correcta.

OBSERVACIÓN. Ahora es posible entender por qué cualquier solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t), \qquad f(t) \text{ una función continua por secciones,}$$

es una función continua en el tiempo aun cuando $f(t)$ sea discontinua. De hecho, dado que la integral de una función continua también lo es, se ve entonces que $y'(t)$ debe variar de manera continua con respecto al tiempo. En consecuencia, $y(t)$ debe variar también continuamente en el tiempo.

Solución de la ecuación (1) por el método de la transformada de Laplace. Para resolver el problema de valor inicial (1) por el método de la transformadas laplacianas, sólo

se necesita saber cuál es la transformada de Laplace para $\delta(t-t_0)$. Esto puede obtenerse directamente a partir de la definición de la transformada y de la ecuación (2)

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}\equiv\int_0^{\infty}e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt=e^{-st_0}\qquad(\text{para } t_0\geq 0)$$

EJEMPLO 1 Obtener la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=3\delta(t-1)+\delta(t-2);\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

SOLUCIÓN. Sea $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial, se obtiene

$$s^2Y-s-1-4(sY-1)+4Y=3e^{-s}+e^{-2s}$$

o bien

$$(s^2-4s+4)Y(s)=s-3+3e^{-s}+e^{-2s}.$$

Y por lo tanto ɹe

$$Y(s)=\frac{s-3}{(s-2)^2}+\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}+\frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}.$$

Ahora bien $1/(s-2)^2 = \{te^{2t}\}$. Entonces,

$$\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}+\frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}=\mathcal{L}\{3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}+H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}\}.$$

Para invertir el primer término de $Y(s)$ obsérvese que

$$\frac{s-3}{(s-2)^2}=\frac{s-2}{(s-2)^2}-\frac{1}{(s-2)^2}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}-\mathcal{L}\{te^{2t}\}.$$

Así pues, $\quad y(t)=(1-t)e^{2t}+3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)}+H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}.$

Es ilustrativo resolver este problema por el camino largo, es decir, encontrar $y(t)$, por separado, en cada uno de los intervalos $0\leq t<1$, $1\leq t<2$ y $2\leq t<\infty$. Para $0\leq t<1$ se tiene que $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=0;\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

La ecuación característica de la diferencial es $r^2-4r+4=0$, cuyas raíces son $r_1=r_2=2$. Por lo tanto, cualquier solución $y(t)$ debe ser de la forma $y(t)=(a_1+a_2t)e^{2t}$. Las constantes a_1 y a_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$1=y(0)=a_1\qquad\text{y}\qquad 1=y'(0)=2a_1+a_2.$$

Por lo tanto, $a_1=1$, $a_2=-1$ y $y(t)=(1-t)e^{2t}$ para $0\leq t<1$. Ahora $y(1)=0$ y $y'(1)=-e^2$. En el instante $t=1$ la derivada de $y(t)$ se incrementa repentinamente en 3. Por lo tanto, para $1\leq t<2$ se tiene que $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=0;\qquad y(1)=0,\quad y'(1)=3-e^2.$$

Dado que las condiciones iniciales están dadas en $t = 1$, se escribirá la solución en la forma $y(t) = [b_1 + b_2(t-1)]e^{2(t-1)}$ (Ejercicio 1). Las constantes b_1 y b_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$0 = y(1) = b_1 \quad \text{y} \quad 3 - e^2 = y'(1) = 2b_1 + b_2.$$

Así pues, $b_1 = 0$, $b_2 = 3 - e^2$ y $y(t) = (3 - e^2)(t-1)e^{2(t-1)}$, con $1 \le t < 2$. Ahora se tiene $y(2) = (3 - e^2)e^2$ y $y'(2) = 3(3 - e^2)e^2$. En el instante $t = 2$, la derivada de $y(t)$ se incrementa repentinamente en 1. Por consecuencia, para $2 \le t < \infty$ se tiene que $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0; \qquad y(2) = e^2(3 - e^2), \quad y'(2) = 1 + 3e^2(3 - e^2).$$

Por lo tanto, $y(t) = [c_1 + c_2(t -)]e^{2(t-2)}$. Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las ecuaciones

$$e^2(3 - e^2) = c_1 \quad \text{y} \quad 1 + 3e^2(3 - e^2) = 2c_1 + c_2.$$

Así que

$$c_1 = e^2(3 - e^2), \qquad c_2 = 1 + 3e^2(3 - e^2) - 2e^2(3 - e^2) = 1 + e^2(3 - e^2)$$

y $y(t) = [e^2(3 - e^2) + (1 + e^2(3 - e^2))(t-2)]e^{2(t-2)}$, $t \ge 2$. El lector debe verificar que esta expresión coincide con la expresión que se obtiene para $y(t)$ por el método de la transformada de Laplace.

EJEMPLO 2 Una partícula de masa igual a 1 se encuentra sujeta al extremo libre de un sistema masa-resorte-amortiguador. La constante de restitución del resorte es 1 N/m y la resistencia que el mecanismo opone al movimiento de la partícula es igual al doble de su velocidad. En el instante $t = 0$, cuando la partícula se encuentra en reposo, se aplica al sistema una fuerza externa e^{-t}. En el instante $t = 1$ se aplica a la partícula una fuerza adicional $f(t)$ de muy corta duración. Dicha fuerza imprime a la partícula un impulso de valor 3 N · s. Determinar la posición de la partícula en cualquier instante t mayor que 1.

SOLUCIÓN. Sea $y(t)$ la distancia de la partícula con respecto a su posición de equilibrio. Entonces $y(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} + 3\delta(t-1); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Sea $Y(s) = \{y(t)\}$. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial, se obtiene

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3e^{-s}, \quad \text{o bien} \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}.$$

Dado que

$$\frac{1}{(s+1)^3}=\mathcal{L}\left\{\frac{t^2e^{-t}}{2}\right\} \quad \text{y} \quad \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2}=3\mathcal{L}\left\{H_1(t)(t-1)e^{-(t-1)}\right\}$$

se ve entonces que

$$y(t)=\frac{t^2e^{-t}}{2}+3H_1(t)(t-1)e^{-(t-1)}.$$

y, por consecuencia, se tiene $y(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}+3(t-1)e^{-(t-1)}$ para $t>1$.

La presente sección concluye con una descripción breve del método de Laurent Schwartz para ubicar la función delta sobre un fundamento matemático riguroso. La etapa principal en el método es reconsiderar el concepto de "función". En cálculo se enseña al estudiante a reconocer una función por su valor para cada valor de t. Una manera más refinada (y mucho más difícil) de reconocer una función es mediante lo que hace a otras funciones. Dicho con más precisión, sea f una función continua por secciones, definida para $-\infty < t < \infty$. A cada función ϕ infinitamente diferenciable que se anula para $|t|$ lo bastante grande se le asigna un número $K[\phi]$ de acuerdo con la fórmula

$$K[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)f(t)\,dt. \tag{5}$$

Como lo indica la notación, K es un operador que actúa sobre las funciones. Sin embargo, difiere de los operadores expuestos con anterioridad en el sentido de que asocia a ϕ un número en vez de una función. Ahora obsérvese que la asociación $\phi \rightarrow K[\phi]$ es una asociación lineal, pues

$$\begin{aligned}K[c_1\phi_1+c_2\phi_2]&=\int_{-\infty}^{\infty}(c_1\phi_1+c_2\phi_2)(t)f(t)\,dt\\&=c_1\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(t)f(t)\,dt+c_2\int_{-\infty}^{\infty}\phi_2(t)f(t)\,dt\\&=c_1K[\phi_1]+c_2K[\phi_2].\end{aligned}$$

Por lo tanto, toda función continua por secciones define mediante (5) una funcional lineal sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables que se anulan para $|t|$ lo bastante grande.

Considérese ahora la funcional $K[\phi]$ definida por la relación $K[\phi]=\phi(t_0)$. Se tiene que K es una funcional lineal, ya que

$$K[c_1\phi_1+c_2\phi_2]=c_1\phi_1(t_0)+c_2\phi_2(t_0)=c_1K[\phi_1]+c_2K[\phi_2].$$

Para imitar la forma de (5), se expresa a K simbólicamente en la forma

$$K[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-t_0)\,dt. \tag{6}$$

En este sentido $\delta(t-t_0)$ es una "función generalizada". Sin embargo, es importante notar que no se puede hablar del valor de $\delta(t-t_0)$ en cualquier instante t. La única cantidad que tiene significado es la expresión $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-t_0)dt$, y a esta expresión hay que asignarle siempre el valor de $\phi(t_0)$.

Es muy difícil pensar en una función en términos de la funcional lineal (5) que induce. Sin embargo, la ventaja de esta manera de considerar es que ahora es posible asignar una derivada a toda función continua por secciones y a toda "función generalizada". De hecho, supóngase que $f(t)$ es una función diferenciable. Entonces $f'(t)$ induce la funcional lineal

$$K'[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)f'(t)\,dt. \tag{7}$$

Al integrar por partes y usar el hecho de que $\phi(t)$ se anula para $|t|$ suficientemente grande, se encuentra que

$$K'[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}[-\phi'(t)]f(t)\,dt=K[-\phi']. \tag{8}$$

Nótese que la fórmula $K'[\phi] = K[-\phi']$ tiene sentido aun cuando $f(t)$ no es diferenciable. Este hecho sugiere la definición siguiente:

DEFINICIÓN. A toda funcional lineal $K[\phi]$ se le asigna una nueva funcional lineal $K'[\phi]$ por medio de la fórmula $K'[\phi] = K[-\phi']$. La funcional lineal $K'[\phi]$ se denomina *derivada* de $K[\phi]$, ya que si $K[\phi]$ es inducida por una función diferenciable $f(t)$, entonces $K'[\phi]$ es inducida por $f'(t)$.

Obsérvese, por último, a partir de (8), que la derivada de la función delta $\delta(t - t_0)$ es la funcional lineal que asigna a toda función ϕ el número $-\phi'(t_0)$, ya que si $K[\phi] = \phi(t_0)$ entonces $K'[\phi] = K[-\phi'] = -\phi'(t_0)$. De modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta'(t-t_0)\,dt=-\phi'(t_0)$$

para todas las funciones diferenciables $\phi(t)$.

EJERCICIOS

1. Sea a una constante fija. Demuestre que toda solución de la ecuación diferencial $(d^2y/dt^2) + 2\alpha(dy/dt) + \alpha^2 y = 0$ puede escribirse en la forma

$$y(t)=[c_1+c_2(t-a)]e^{-\alpha(t-a)}.$$

2. Resuelva el problema de valor inicial $(d^2y/dt^2) + 4(dy/dt) + 5y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, donde $f(t)$ es una fuerza de impulso que actúa durante un intervalo de tiempo extremadamente corto $1 \le t \le 1 + \tau$, y $\int_1^{1+\tau} f(t)dt = 2$.

3. (a) Resuelva el problema de valor inicial $(d^2y/dt^2) - 3(dy/dt) + 2y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, donde $f(t)$ es una fuerza de impulso que actúa durante un lapso extremadamente corto $2 \le t \le 2 + \tau$, y $\int_2^{2+\tau} f(t)dt = -1$.

(b) Resuelva el problema de valor inicial $(d^2y/dt^2) - 3(dy/dt) + 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ en el intervalo $0 \le t \le 2$. Calcule $z_0 = y(2)$ y $z_0' = y'(2)$. Resuelva luego el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0; \qquad y(2) = z_0, \quad y'(2) = z_0' - 1, \qquad 2 < t < \infty.$$

Compare la solución con la solución de la parte (a)

4. Una partícula de masa igual a 1 se encuentra sujeta a un sistema masa-resorte-amortiguador. La constante de restitución del resorte es 3 N/m y la resistencia que el sistema opone al movimiento de la partícula es igual a 4 veces su velocidad. En el instante $t = 0$, la partícula se encuentra a 0.25 m de su posición de equilibrio. En el instante $t = 3$ s (segundos) se aplica al sistema una fuerza de impulso de muy corta duración. Dicha fuerza imparte un impulso de 2 N · s sobre la partícula. Calcule el desplazamiento de la partícula con respecto a su posición de equilibrio.

En los Ejercicios 5 a 7, resuelva el problema de valor inicial dado.

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \operatorname{sen} t + \delta(t - \pi)$; $y(0) = 0, y'(0) = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} + 3\delta(t-3)$; $y(0) = 0, y'(0) = 3$

8. (a) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\pi), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

y muestre que

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & n \text{ es par} \\ 0, & n \text{ es impar} \end{cases}$$

en el intervalo $n\pi < t < (n+1)\pi$.

(b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - 2j\pi), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

y muestre que $y(t) = (n+1)\operatorname{sen} t$ en el intervalo $2n\pi < t < 2(n+1)\pi$.

Este ejemplo indica por qué se ordena a los soldados romper la cadencia al marchar a través de un puente. De hecho, si los solados marcharan rítmicamente con la frecuencia natrual del material férreo (acero) del puente, puede presentarse una situación de resonancia del tipo (b).

9. Sea $f(t)$ una función que es igual a ½ para $t > t_0$, igual a 0 para $t = t_0$, e igual a −½ para $t < t_0$. Sea $K[\phi]$ la funcional lineal

$$K[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)f(t)\,dt.$$

Demuestre que $K'[\phi] = K[-\phi'] = \phi(t_0)$. De modo que $\delta(t - t_0)$ se puede identificar como la derivada de $f(t)$.

2.13 INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Considérese el problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t); \qquad y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0'. \tag{1}$$

Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial se obtiene que

$$a\left[s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right]+b\left[sY(s)-y_0\right]+cY(s)=F(s)$$

y esto implica que

$$Y(s)=\frac{as+b}{as^2+bs+c}y_0+\frac{a}{as^2+bs+c}y_0'+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}.$$

Ahora hágase

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as+b}{as^2+bs+c}\right\}$$

y

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2+bs+c}\right\}.$$

Al tomar $f(t) = 0$, $y_0 = 1$ y $y_0' = 0$, se encuentra que $y_1(t)$ es la solución de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. De manera similar, tomando $f(t) = 0$, $y_0 = 0$ y $y_0' = 1$, resulta que $y_2(t)$ es la solución de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Todo esto implica que

$$\psi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right\}$$

es la solución particular de la ecuación no homogénea que satisface las condiciones iniciales $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. Así pues, el problema de hallar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea se reduce al problema de encontrar la inversa de la transformada de Laplace para la función $F(s)/(as^2 + bs + c)$. Si se observa esta función con detenimiento, se encuentra que es el producto de dos transformadas de Laplace; es decir,

$$\frac{F(s)}{as^2+bs+c}=\mathcal{L}\{f(t)\}\times\mathcal{L}\left\{\frac{y_2(t)}{a}\right\}.$$

Resulta natural preguntarse si existe una relación sencilla entre $\psi(t)$ y las funciones $f(t)$ y $y_2(t)/a$. Por supuesto que sería más fácil si $\psi(t)$ fuera el producto de $f(t)$ y $y_2(t)/a$, pero eso obviamente no ocurre. Sin embargo, hay una manera muy interesante de combinar dos funciones f y g para formar una nueva función $f * g$ que es semejante a la multiplicación y para la cual se cumple

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\times\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Esta combinación de f y g aparece con frecuencia en las aplicaciones y se conoce como la convolución de f con g.

DEFINICIÓN. La *convolución* $(f * g)(t)$ de f con g se define por medio de la ecuación

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $f(t) = \operatorname{sen} 2t$ y $g(t) = e^{t^2}$, entonces

$$(f*g)(t)=\int_0^t \operatorname{sen}2(t-u)e^{u^2}\,du.$$

El operador convolución $*$ guarda claramente alguna semejanza con el operador multiplicación, ya que se multiplica el valor de f en el punto $t - u$ por el valor de g en el punto u, para después integrar el producto con respecto a u. Es por ello que no debe sorprender que el operador convolución satisfaga las siguientes propiedades.

PROPIEDAD 1. El operador convolución cumple la ley conmutativa de la multiplicación, es decir, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición se tiene que

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du.$$

Al introducir la sustitución $t - u = s$ en la integral se obtiene

$$\begin{aligned}(f*g)(t)&=-\int_t^0 f(s)\,g(t-s)\,ds\\ &=\int_0^t g(t-s)f(s)\,ds\equiv(g*f)(t).\end{aligned}$$ □

PROPIEDAD 2. El operador convolución satisface la ley distributiva de la multiplicación, es decir,

$$f*(g+h)=f*g+f*h.$$

DEMOSTRACIÓN. Véase el Ejercicio 19.

PROPIEDAD 3. El operador convolución satisface la ley asociativa de la multiplicación, es decir $(f * g) * h = f * (g * h)$.

DEMOSTRACIÓN. Véase el Ejercicio 20.

PROPIEDAD 4. La convolución de cualquier función f con la función cero es igual a cero.

DEMOSTRACIÓN. Resulta obvio.

Por otro lado, el operador convolución difiere del operador multiplicación en que $f * 1 \neq f$ y $f * f \neq f^2$. De hecho, la convolución de una función f con ella misma puede incluso ser negativa.

EJEMPLO 1 Calcular la convolución de $f(t) = t^2$ con $g(t) = 1$.

SOLUCIÓN. A partir de la Propiedad 1 se tiene que

$$(f*g)(t) = (g*f)(t) = \int_0^t 1 \cdot u^2 du = \frac{t^3}{3}.$$

EJEMPLO 2 Calcular la convolución de $f(t) = \cos t$ consigo misma y demostrar que no siempre es positiva.

SOLUCIÓN. Se tiene por definición que

$$\begin{aligned}
(f*f)(t) &= \int_0^t \cos(t-u)\cos u\, du \\
&= \int_0^t (\cos t \cos^2 u + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} u \cos u)\, du \\
&= \cos t \int_0^t \frac{1+\cos 2u}{2}\, du + \operatorname{sen} t \int_0^t \operatorname{sen} u \cos u\, du \\
&= \cos t \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right] + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{2} \\
&= \frac{t \cos t + \operatorname{sen} t \cos^2 t + \operatorname{sen}^3 t}{2} \\
&= \frac{t \cos t + \operatorname{sen} t (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}{2} \\
&= \frac{t \cos t + \operatorname{sen} t}{2}.
\end{aligned}$$

esta función claramente es negativa para

$$(2n+1)\pi \leqslant t \leqslant (2n+1)\pi + \tfrac{1}{2}\pi, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Ahora se demostrará que la transformada de $f * g$ es el producto de la transformada de Laplace de f y la transformada de Laplace de g.

TEOREMA 9. $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \times \mathcal{L}\{g(t)\}$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene por definición que

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\right]dt.$$

Esta integral iterativa es igual a la integral doble

$$\iint_R e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du\,dt$$

donde R es la región triangular descrita en la Figura 1.

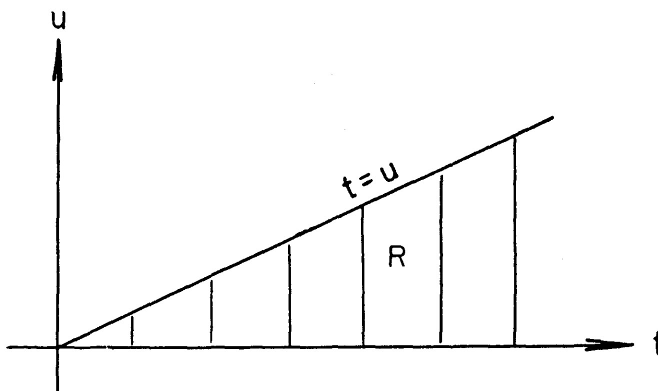


FIGURA 1.

Integrando primero con respecto a t, en vez de u, se obtiene

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \int_0^\infty g(u)\left[\int_u^\infty e^{-st} f(t-u)\,dt\right]du.$$

Al hacer $t - u = \xi$. Se encuentra que

$$\int_u^\infty e^{-st} f(t-u)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+\xi)} f(\xi)\,d\xi.$$

Por lo tanto, se cumple

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} &= \int_0^\infty g(u)\left[\int_0^\infty e^{-su}e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi\right]du\\ &= \left[\int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du\right]\left[\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi\right]\\ &\equiv \mathcal{L}\{f(t)\}\times\mathcal{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 Encontrar la transformada de Laplace de la función

$$\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}.$$

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$\frac{1}{s^2}=\mathcal{L}\{t\} \quad \text{y} \quad \frac{a}{s^2+a^2}=\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}.$$

Por lo tanto, por el Teorema 9 se sabe que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} &= \int_0^t (t-u)\operatorname{sen} au\,du\\ &= \frac{at-\operatorname{sen} at}{a^2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Encontrar la transformada de Laplace inversa para la función

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)}.$$

SOLUCIÓN. Obsérvese que

$$\frac{1}{s}=\mathcal{L}\{1\} \quad \text{y} \quad \frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}=\mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}.$$

Por lo tanto, por el Teorema 9

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \int_0^t e^{-u}\operatorname{sen} u\,du\\ &= \frac{1}{2}\left[1-e^{-t}(\cos t+\operatorname{sen} t)\right].\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Sea $y_2(t)$ la solución de la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ que satiface las condiciones iniciales $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Entonces

$$\psi(t)=f(t)*\frac{y_2(t)}{a} \tag{3}$$

es la solución particular de la ecuación no homogénea $ay'' + by' + cy = f(t)$ que satisface las condiciones iniciales $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Con frecuencia, la ecuación (3) es mucho más fácil de usar que la fórmula de variación de parámetros obtenida en la Sección 2.4.

EJERCICIOS

Determine la convolución de cada uno de los siguientes pares de funciones:

1. $e^{at}, e^{bt}, a \neq b$
2. e^{at}, e^{at}
3. $\cos at, \cos bt$
4. $\operatorname{sen} at, \operatorname{sen} bt, a \neq b$
5. $\operatorname{sen} at, \operatorname{sen} at$
6. $t, \operatorname{sen} t$

Utilice el Teorema 9 para invertir cada una de las transformadas de Laplace siguientes.

7. $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$
8. $\dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$
9. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$
10. $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$
11. $\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$
12. $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

Utilice el Teorema 9 para encontrar la solución $y(t)$ de cada una de las ecuaciones integrodiferenciales siguientes.

13. $y(t) = 4t - 3\int_0^t y(u)\operatorname{sen}(t-u)\,du$
14. $y(t) = 4t - 3\int_0^t y(t-u)\operatorname{sen} u\,du$
15. $y'(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t y(t-u)\cos u\,du,\ y(0) = 0$
16. $y(t) = 4t^2 - \int_0^t y(u)e^{-(t-u)}\,du$
17. $y'(t) + 2y + \int_0^t y(u)\,du = \operatorname{sen} t,\ y(0) = 1$
18. $y(t) = t - e^t\int_0^t y(u)e^{-u}\,du$
19. Demuestre que $f * (g + h) = f * g + f * h$.
20. Demuestre que $(f * g) * h = f * (g * h)$.

2.14 MÉTODO DE ELIMINACIÓN PARA SISTEMAS

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden puede servir también para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones simultáneas de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' &= \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t). \end{aligned} \tag{1}$$

La idea clave es eliminar una de las variables, por ejemplo y, y luego encontrar x como la solución de una ecuación diferencial de segundo orden. Esta técnica se conoce como *método de eliminación*, y se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Determinar todas las soluciones de las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y + t \\ y' &= x + 3y + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

SOLUCIÓN. Se obtiene primero

$$y = x' - 2x - t \tag{3}$$

a partir de la primera ecuación en (2). Derivando esta ecuación se obtiene

$$y' = x'' - 2x' - 1 = x + 3y + 1.$$

Al sustituir luego la y de (3) se obtiene

$$x'' - 2x' - 1 = x + 3(x' - 2x - t) + 1$$

de modo que

$$x'' - 5x' + 5x = 2 - 3t. \tag{4}$$

La ecuación (4) es una ecuación lineal de segundo orden y su solución es

$$x(t) = e^{5t/2}\left[c_1 e^{\sqrt{5}\,t/2} + c_2 e^{-\sqrt{5}\,t/2}\right] - \frac{(1+3t)}{5}$$

para un par de constantes c_1 y c_2. Por último, sustituyendo esta expresión en (3),

$$y(t) = e^{5t/2}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 e^{\sqrt{5}\,t/2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 e^{-\sqrt{5}\,t/2}\right] + \frac{t-1}{5}.$$

EJEMPLO 2 Encontrar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y, \qquad x(0) = 3 \\ y' &= x + y, \qquad y(0) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

SOLUCIÓN. De la primera ecuación en (5) se obtiene

$$y = 3x - x'. \tag{6}$$

La derivación de esta ecuación da

$$y' = 3x' - x'' = x + y.$$

Sustituyendo la y de (6) se llega a

$$3x' - x'' = x + 3x - x'$$

de manera que

$$x'' - 4x' + 4x = 0.$$

Esto implica que

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$$

para un par de constantes c_1 y c_2. Al sustituir esta expresión en (6) se obtiene

$$y(t) = (c_1 - c_2 + c_2 t)e^{2t}.$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$x(0) = 3 = c_1$$
$$y(0) = 0 = c_1 - c_2.$$

Por lo tanto, $c_1 = 3$ y $c_2 = 3$, de modo que

$$x(t) = 3(1+t)e^{2t}, y(t) = 3te^{2t}$$

es la solución de (5).

OBSERVACIÓN. El sistema de ecuaciones simultáneas (1) se conoce usualmente como un *sistema* de ecuaciones de primer orden. Los sistemas de ecuaciones se tratan con detalle en los Capítulos 3 y 4.

EJERCICIOS

Encuentre todas las soluciones para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x' = 6x - 3y$
$y' = 2x + y$

2. $x' = -2x + y + t$
$y' = -4x + 3y - 1$

3. $x' = -3x + 2y$
$y' = -x - y$

4. $x' = x + y + e^t$
$y' = x - y - e^t$

Encuentre la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

5. $x' = x + y, \quad x(0) = 2$
$y' = 4x + y, \quad y(0) = 3$

6. $x' = x - 3y, \quad x(0) = 0$
$y' = -2x + 2y, \quad y(0) = 5$

7. $x' = x - y, \quad x(0) = 1$
$y' = 5x - 3y, \quad y(0) = 2$

8. $x' = 3x - 2y, \quad x(0) = 1$
$y' = 4x - y, \quad y(0) = 5$

9. $x' = 4x + 5y + 4e^t \cos t, \quad x(0) = 0$
$y' = -2x - 2y, \quad y(0) = 0$

10. $x' = 3x - 4y + e^t, \quad x(0) = 1$
$y' = x - y + e^t, \quad y(0) = 1$

11. $x' = 2x - 5y + \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0$
$y' = x - 2y + \tan t, \quad y(0) = 0$

12. $x' = y + f_1(t), \quad x(0) = 0$
$y' = -x + f_2(t), \quad y(0) = 0$

2.15 ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

En la presente sección se estudiarán brevemente las ecuaciones diferenciales de orden superior.

DEFINICIÓN. La ecuación

$$L[y] = a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0(t)y = 0, \quad a_n(t) \neq 0 \qquad (1)$$

se conoce como la ecuación lineal homogénea general de orden n. La ecuación diferencial (1) junto con las condiciones iniciales

$$y(t_0)=y_0,\quad y'(t_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (1')$$

constituyen un problema de valor inicial. La teoría para la ecuación (1) es completamente análoga a la teoría para ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden que se estudiaron en las Secciones 2.1 y 2.2. Por ello, los teoremas importantes se enunciarán sin demostración. Es posible obtener demostraciones completas de estos resultados generalizando los métodos usados en las Secciones 2.1 y 2.2, o los métodos que se expondrán en el Capítulo 3.

TEOREMA 10. *Sean $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ n soluciones linealmente independientes de* (1), *es decir, ninguna $y_j(t)$ es combinación lineal de las demás soluciones. Entonces toda solución $y(t)$ de* (1) *es de la forma*

$$y(t)=c_1y_1(t)+\ldots+c_ny_n(t) \qquad (2)$$

para alguna elección de constantes $c_1, \ldots, c_n$. Por tal razón, se dice que (2) *es la solución general de* (1).

Para encontrar n soluciones linealmente independientes de (1) cuando los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ no dependen de t, se determina

$$L[e^{rt}]=(a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\ldots+a_0)e^{rt}. \qquad (3)$$

Esto implica que e^{rt} es solución de (1) si y sólo si r es una raíz de la ecuación característica

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\ldots+a_0=0. \qquad (4)$$

Así pues, si la ecuación (4) tiene n raíces distintas $r_1, \ldots, r_n$, entonces la solución generan de (1) es $y(t) = c_1e^{r_1t} + \ldots + c_ne^{r_nt}$. Si $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ es una raíz compleja de (4), entonces

$$u(t)=\mathrm{Re}\{e^{r_jt}\}=e^{\alpha_jt}\cos\beta_jt$$

y

$$v(t)=\mathrm{Im}\{e^{r_jt}\}=e^{\alpha_jt}\operatorname{sen}\beta_jt$$

son dos soluciones de (1) con valores reales. Por último, si r_1 es una raíz de multiplicidad k, es decir, si

$$a_nr^n+\ldots+a_0=(r-r_1)^kq(r)$$

donde $q(r_1) \neq 0$, entonces $e^{r_1t}, te^{r_1t}, \ldots, t^{k-1}e^{r_1t}$ son k soluciones linealmente independientes de (1). Esta última afirmación se demuestra de la siguiente manera. Obsérvese a partir de (3) que

$$L[e^{rt}]=(r-r_1)^kq(r)\,e^{rt}$$

si r_1 es una raíz de multiplicidad k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
L[t^j e^{r_1 t}] &= L\left[\frac{\partial^j}{\partial r^j} e^{rt}\right]\bigg|_{r=r_1} \\
&= \frac{\partial^j}{\partial r^j} L[e^{rt}]\bigg|_{r=r_1} \\
&= \frac{\partial^j}{\partial r^j}(r-r_1)^k q(r) e^{rt}\bigg|_{r=r_1} \\
&= 0, \text{ para } 1 \le j < k
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{d^4y}{dt^4} + y = 0. \tag{5}$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica de (5) es $r^4 + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación se hallan al observar que

$$-1 = e^{i\pi} = e^{3\pi i} = e^{5\pi i} = e^{7\pi i}.$$

Por lo tanto,

$$r_1 = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

$$r_2 = e^{3\pi i/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$$

$$r_3 = e^{5\pi i/4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

y

$$r_4 = e^{7\pi i/4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

son 4 raíces de la ecuación $r^4 + 1 = 0$. Las raíces r_3 y r_4 son las complejas conjugadas de r_1 y r_2, respectivamente. Así pues,

$$e^{r_1 t} = e^{t/\sqrt{2}}\left[\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + i\,\text{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

y

$$e^{r_2 t} = e^{-t/\sqrt{2}}\left[\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + i\,\text{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$

son dos soluciones de (5) con valores complejos y eso implica que

$$y_1(t) = e^{t/\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad y_2(t) = e^{t/\sqrt{2}}\,\text{sen}\frac{t}{\sqrt{2}},$$

$$y_3(t) = e^{-t/\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \text{y} \quad y_4(t) = e^{-t/\sqrt{2}}\,\text{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

son cuatro soluciones de (5) con valores reales. Dichas soluciones son, en verdad, linealmente independientes. Por lo tanto, la solución general de (5) es

$$y(t)=e^{t/\sqrt{2}}\left[a_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+b_1\operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]$$
$$+e^{-t/\sqrt{2}}\left[a_2\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+b_2\operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right].$$

EJEMPLO 2 Encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{d^4y}{dt^4}-3\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=0. \tag{6}$$

SOLUCIÓN. La ecuación característica de (6) es

$$0=r^4-3r^3+3r^2-r=r(r^3-3r^2+3r-1)$$
$$=r(r-1)^3.$$

Sus raíces son $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, con $r_2 = 1$ una raíz de multiplicidad tres. Por lo tanto, la solución general de (6) es

$$y(t)=c_1+(c_2+c_3t+c_4t^2)e^t.$$

La teoría para la ecuación no homogénea

$$L[y]=a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n}+\ldots+a_0(t)y=f(t),\quad a_n(t)\neq 0 \tag{7}$$

también es completamente análoga a la teoría para la ecuación no homogénea de segundo orden. Los resultados siguientes son los análogos del Lema 1 y del Teorema 5 de la Sección 2.3.

LEMA 1. *La diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación no homogénea (7) es una solución de la ecuación homogénea (1).*

TEOREMA 11. *Sea $\psi(t)$ una solución particular de la ecuación no homogénea (7), y sean $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (1). Entonces, toda solución $y(t)$ de (7) es de al forma*

$$y(t)=\psi(t)+c_1y_1(t)+\ldots+c_ny_n(t)$$

para alguna elección de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

El método de la conjetura sensata también se aplica a la ecuación de orden n

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+\ldots+a_0y=\left[b_0+b_1t+\ldots+b_kt^k\right]e^{\alpha t}. \tag{8}$$

Puede verificarse fácilmente que la ecuación (8) tiene una solución particular $\psi(t)$ de la forma

$$\psi(t)=\left[c_0+c_1t+\ldots+c_kt^k\right]e^{\alpha t}$$

si $e^{\alpha t}$ no es solución de la ecuación homogénea, y

$$\psi(t)=t^j\left[c_0+c_1t+\ldots+c_kt^k\right]e^{\alpha t}$$

si $t^{j-1}e^{\alpha t}$ es solución de la ecuación homogénea, pero $t^je^{\alpha t}$ no lo es.

EJEMPLO 3 Encontrar una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación

$$L[y]=\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=e^t. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. La ecuación cacterística

$$r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3$$

tiene a $r = -1$ como raíz triple. Por lo tanto, e^t no es solución de la ecuación homogénea, y la ecuación (9) tiene una solución particular $\psi(t)$ de la forma

$$\psi(t)=Ae^t.$$

Al evaluar $L[\psi](t) = 8Ae^t$ se encuentra que $A = 1/8$. Por lo tanto, $\psi(t) = 1/8e^t$ es una solución particular de (9).

También hay una fórmula de variación de parámetros para la ecuación no homogénea (7). Sea $v(t)$ la solución de la ecuación homogénea (1) que satisface las condiciones iniciales $v(t_0) = 0$, $v'(t_0) = 0, \ldots, v^{(n-2)}(t_0) = 0$, $v^{(n-1)}(t_0) = 1$. Entonces

$$\psi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{v(t-s)}{a_n(s)}f(s)\,ds$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea (7). En la Sección 3.12 se demostrará esta afirmación. (También puede demostrarse usando el método de la transformada de Laplace; véase la Sección 2.13.)

EJERCICIOS

Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $y'''-2y''-y'+2y=0$
2. $y'''-6y''+5y'+12y=0$
3. $y^{(iv)}-5y'''+6y''+4y'-8y=0$
4. $y'''-y''+y'-y=0$

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

5. $y^{(iv)}+4y'''+14y''-20y'+25y=0;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y'''(0)=0$
6. $y^{(iv)}-y=0;\quad y(0)=1,\ y'(0)=y''(0)=0,\ y'''(0)=-1$

7. $y^{(v)}-2y^{(iv)}+y'''=0;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0,\ y^{(iv)}(0)=-1$

8. Sabiendo que $y_1(t) = e^t \cos t$ es una solución de

$$y^{(iv)}-2y'''+y''+2y'-2y=0, \qquad (*)$$

determine la solución general de (*). *Sugerencia:* Use esta información para encontrar las raíces de la ecuación característica de (*).

Obtenga una solución particular para cada una de las siguientes ecuaciones:

9. $y'''+y'=\tan t$

10. $y^{(iv)}-y=g(t)$

11. $y^{(iv)}+y=g(t)$

12. $y'''+y'=2t^2+4\operatorname{sen} t$

13. $y'''-4y'=t+\cos t+2e^{-2t}$

14. $y^{(iv)}-y=t+\operatorname{sen} t$

15. $y^{(iv)}+2y''+y=t^2\operatorname{sen} t$

16. $y^{(vi)}+y''=t^2$

17. $y'''+y''+y'+y=t+e^{-t}$

18. $y^{(iv)}+4y'''+6y''+4y'+y=t^3e^{-t}$

Sugerencia para (18): Haga la sustitución $y = e^{-t}v$ y despeje v. De otra manera, tomará muchísimo tiempo resolver este problema.

3 Sistemas de ecuaciones diferenciales

3.1 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES

Este capítulo trata de las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden de varias variables; es decir, ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Una solución de (1) consiste en n funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, tales que $dx_j(t)/dt = f_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), j = 1, 2, \ldots, n$. Por ejemplo, $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = t^2$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dx_2}{dt} = 2x_1$$

ya que $dx_1(t)/dt = 1$ y $dx_2(t)/dt = 2t = 2x_1(t)$.

Además de la ecuación (1) se imponen con frecuencia condiciones iniciales sobre las funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Dichas condiciones serán de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0. \tag{1'}$$

La ecuación (1), junto con las condiciones iniciales (1′), se conocen como *problema de valor inicial*. La solución de tal problema consiste en n funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ que satisfacen (1) y las condiciones iniciales

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ldots,x_n(t_0)=x_n^0.$$

Por ejemplo, $x_1(t) = e^t$ y $x_2(t) = 1 + e^{2t}/2$ son una solución del problema de valor inicial

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1, \qquad x_1(0)=1,$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_1^2, \qquad x_2(0)=\frac{3}{2},$$

ya que $dx_1(t)/dt = e^t = x_1(t)$, $dx_2(t)/dt = e^{2t} = x_1^2(t)$, $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 3/2$.

La ecuación (1) se conoce también como sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Este tipo de ecuaciones se presenta con frecuencia en aplicaciones biológicas y físicas, las cuales muchas veces describen sistemas muy complicados, ya que la tasa o rapidez de cambio de la variable x_j depende no solamente de t y de x_j, sino también de los valores de todas las otras variables. Un ejemplo particular es el modelo para la glucosa de la sangre, que se estudió en la Sección 2.7. En dicho modelo, las tasas de variación g y h (las desviaciones de la cantidad de glucosa en la sangre y la concentración hormonal neta, respecto de los valores óptimos, respectivamente) están dadas por las ecuaciones

$$\frac{dg}{dt}=-m_1g-m_2h+J(t), \qquad \frac{dh}{dt}=-m_3h+m_4g.$$

El anterior es un sistema de dos ecuaciones de primer orden para las funciones $g(t)$ y $h(t)$. Algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden provienen de ecuaciones de orden superior para una variable $y(t)$. Toda ecuación diferencial de orden n en la variable y, puede expresarse como un sistema de n ecuaciones de primer orden para las variables

$$x_1(t)=y, \quad x_2(t)=\frac{dy}{dt},\ldots,x_n(t)=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

Los Ejemplos 1 y 2 ilustran cómo opera esto.

EJEMPLO 1 Transformar la ecuación diferencial

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0y=0$$

en un sistema de n ecuaciones de primer orden.

SOLUCIÓN. Sean $x_1(t) = y$, $x_2(t) = dy/dt$, $\ldots$, y $x_n(t) = d^{n-1}y/dt^{n-1}$. Entonces,

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\ldots,\frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$

y

$$\frac{dx_n}{dt}=-\frac{a_{n-1}(t)x_n+a_{n-2}(t)x_{n-1}+\ldots+a_0x_1}{a_n(t)}.$$

EJEMPLO 2 Transformar el problema de valor inicial

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+3y=e^t; \qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0$$

en un problema de valor inicial para las variables y, dy/dt, d^2y/dt^2.

SOLUCIÓN. Sean $x_1(t) = y$, $x_2(t) = dy/dt$ y $x_3(t) = d^2y/dt^2$. Entonces,

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\qquad \frac{dx_3}{dt}=e^t-x_2^2-3x_1.$$

Más aún, las funciones x_1, x_2 y x_3 satisfacen las condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0) = 0$ y $x_3(0) = 0$.

Si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ en (1) es función lineal de las variables dependientes $x_1, \ldots, x_n$, entonces se dice que el sistema de ecuaciones es lineal. El sistema más general de ecuaciones lineales de primer orden tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}(t)x_1+\ldots+a_{1n}(t)x_n+g_1(t)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}(t)x_1+\ldots+a_{nn}(t)x_n+g_n(t).\end{aligned}\tag{2}$$

Si cada función $g_1, \ldots, g_n$ es igual a cero, entonces el sistema (2) se llama *homogéneo*; de otro modo se denomina *no homogéneo*. Este capítulo sólo analiza el caso en que los coeficientes a_{ij} no dependen de t.

Ahora bien, incluso el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{3}$$

es muy difícil de tratar, en especial si n es muy grande. Por eso se busca una manera más concisa de escribir las ecuaciones. Con este fin se introducirán los conceptos de *vectores* y *matrices*.

DEFINICIÓN. Un *vector*

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

es una notación abreviada para la sucesión de números $x_1, \ldots, x_n$.* Los núme-

* (N. del R.) Esta definición de un vector matemático se relaciona con la del vector físico usual, considerando las componentes-ortogonales (escalares) de este último como una sucesión ordenada de números, que pueden ser de tres en el concepto matricial de vector.

ros $x_1, \ldots, x_n$ se llaman *componentes* de $\mathbf{x}$. Si $x_1 = x_1(t), \ldots,$ y $x_n = x_n(t)$, entonces

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

se conoce como una función vectorial o con valores vectoriales. Su derivada $d\mathbf{x}(t)/dt$ es la función vectorial

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

DEFINICIÓN. Una *matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es una notación o representación abreviada para el arreglo o disposición rectangular de números a_{ij}, los cuales se distribuyen en m renglones y n columnas. El elemento que se encuentra en el renglón i y en la columna j se denota por a_{ij}. El primer subíndice identifica el renglón, y el segundo identifica la columna. Se dice que $\mathbf{A}$ es *cuadrada* si $m = n$.

A continuación, se define el producto de una matriz $\mathbf{A}$ y un vector $\mathbf{x}$.

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$ con elementos a_{ij}, y sea $\mathbf{x}$ un vector con componentes $x_1, \ldots, x_n$. Se define el producto de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{x}$, y se denota por $\mathbf{Ax}$, como el vector cuya componente (o cuyo componente) i es

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

En otras palabras, el componente i de $\mathbf{Ax}$ es la suma de los productos de términos que corresponden al renglón i de $\mathbf{A}$ con el vector $\mathbf{x}$. Así pues,

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4+4 \\ -3+0+6 \\ 3+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Por último, obsérvese que el lado izquierdo de (3) son los componentes del vector $d\mathbf{x}/dt$, mientras que el lado derecho de (3) son las componentes del vector $\mathbf{Ax}$. Por lo tanto, la Ecuación (3) puede escribirse en forma concisa como sigue

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Más aún, si $x_1(t), \dots, x_n(t)$ satisfacen las condiciones iniciales

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0,$$

entonces $\mathbf{x}(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \text{donde} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 15x_1 + x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 7x_1 + 6x_3 \end{aligned}$$

puede escribirse en forma abreviada como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 15 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

y el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - x_2 + x_3, & x_1(0) &= 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_2 - x_3, & x_2(0) &= 0 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 + 7x_3, & x_3(0) &= -1 \end{aligned}$$

se puede expresar en forma abreviada como

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}.$$

Después de haber logrado escribir la Ecuación (3) en la forma más sencilla (4) es posible abocarse al problema de encontrar todas sus soluciones. Dado que las ecuaciones son lineales, se tratará de seguir la misma estrategia que tanto éxito tuvo en el caso de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden. De hecho, se demostrará que tanto el producto de una solución y una constante, como la suma de dos soluciones, es también una solución de (4). Después se hará ver que tomando todas las combinaciones lineales de un número finito de soluciones, es posible encontrar todas las soluciones de (4). Por supuesto que primero debe definirse qué significa una constante multiplicada por **x** y la suma de **x** y **y** si **x** y **y** son vectores de n componentes.

DEFINICIÓN. Sea c un número y **x** un vector con n componentes $x_1, \ldots, x_n$. Se define $c\mathbf{x}$ como el vector cuyas componentes son $cx_1, \ldots, cx_n$, es decir

$$c\mathbf{x}=c\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cx_1\\ cx_2\\ \vdots\\ cx_n\end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si

$$c=2 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 7\end{bmatrix}, \text{ entonces } \quad 2\mathbf{x}=2\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 14\end{bmatrix}.$$

El proceso de multiplicar un vector **x** por una constante c se conoce como *multiplicación por un escalar.*

DEFINICIÓN. Sean **x** y **y** vectores con componentes $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$, respectivamente. Se define $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ como el vector cuyas componentes son $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$, es decir

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\ x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 6\\ 3\\ 2\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\ -6\\ 7\\ 9\end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1\\6\\3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-6\\7\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\10\\11\end{bmatrix}.$$

El proceso de sumar dos vectores se conoce como adición vectorial.

Habiendo definido el proceso de multiplicación por un escalar y el de adición vectorial, puede enunciarse el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *Sean* $\mathbf{x}(t)$ *y* $\mathbf{y}(t)$ *dos soluciones de* (4). *Entonces* (*a*) $c\mathbf{x}(t)$ *es una solución para cualquier constante* c, *y* (*b*) $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$ *es también una solución.*

El Teorema 1 puede demostrarse fácilmente con ayuda del siguiente lema:

LEMA. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz de* $n \times n$. *Para cualesquiera vectores* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *y una constante cualquiera* c.
(*a*) $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}$ *y* (*b*) $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA.
(a) Se probará que los dos vectores son iguales haciendo ver que tienen las mismas componentes. Para ello, obsérvese que la componente i del vector $c\mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$ca_{i1}x_1+ca_{i2}x_2+\ldots+ca_{in}x_n=c(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n),$$

y la componente i del vector $\mathbf{A}(c\mathbf{x})$ es

$$a_{i1}(cx_1)+a_{i2}(cx_2)+\ldots+a_{in}(cx_n)=c(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n).$$

y la componente i del vector $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}$.
(b) La componente i del vector $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ es

$$a_{i1}(x_1+y_1)+\ldots+a_{in}(x_n+y_n)=(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n)+(a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n).$$

Pero esta también es la componente i del vector $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$, ya que la componente i de $\mathbf{A}\mathbf{x}$ es $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$ y la componente i de $\mathbf{A}\mathbf{y}$ es $a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$. Por lo tanto, $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.
(a) Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de (4), entonces

$$\frac{d}{dt}c\mathbf{x}(t)=c\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=c\mathbf{A}\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}(c\mathbf{x}(t)).$$

Por lo tanto, $c\mathbf{x}(t)$ también es una solución de (4).
(b) Si $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ son soluciones de (4), entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t))=\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}+\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{A}\mathbf{y}(t)=\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)).$$

De modo que, $\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$ también es una solución de (4). □

Un corolario inmediato del Teorema 1 es que cualquier combinación lineal de soluciones de (4) también es una solución de (4). Es decir, si $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^j(t)$ son j soluciones de (4), entonces $c_1\mathbf{x}^1(t) + \ldots + c_j\mathbf{x}^j(t)$ también es solución para cualquier elección de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_j$. Por ejemplo, considérese el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -4x_1, \quad \text{o bien,} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Este sistema proviene de la ecuación escalar de segundo orden $(d^2y/dt^2) + 4yt = 0$, al hacer $x_1 = y$ y $x_2 = dy/dt$. Dado que $y_1(t) = \cos 2t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$ son dos soluciones de la ecuación escalar, se sabe entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t \\ -2c_1\operatorname{sen} 2t + 2c_2\cos 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una solución de (6) para cualquier elección de constantes c_1 y c_2.

El siguiente paso en la estrategia es mostrar que toda solución de (4) puede expresarse como una combinación lineal de un número finito de soluciones. De manera equivalente, se tratará de determinar cuántas soluciones es necesario encontrar para generar todas las soluciones de (4). Hay una rama de las matemáticas, conocida como *álgebra lineal*, que se ocupa principalmente de esta cuestión, por lo que se considerará ahora dicha área.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1 a 3 transforme la ecuación diferencial dada con variable y a un sistema de ecuaciones de primer orden.

1. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 0$ **2.** $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \cos y = e^t$ **3.** $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1$

4. Cambie la siguiente pareja de ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dz}{dt} + 2y = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2z = 0$$

a un sistema de 4 ecuaciones de primer orden en las variables

$$x_1 = y, \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = z \quad \text{y} \quad x_4 = z'.$$

5. (a) Sea $y(t)$ una solución de la ecuación $y'' + y' + y = 0$. Demuestre que

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(b) Sea

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

una solución del sistema de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Demuestre que $y = x_1(t)$ es una solución de la ecuación $y'' + y' + y = 0$.

En cada uno de los Ejercicios 6 a 9 escriba el sistema dado de ecuaciones diferenciales y valor inicial, en la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

6. $\dot{x}_1=3x_1-7x_2,\quad x_1(0)=1$
$\dot{x}_2=4x_1,\quad x_2(0)=1$

7. $\dot{x}_1=5x_1+5x_2,\quad x_1(3)=0$
$\dot{x}_2=-x_1+7x_2,\quad x_2(3)=6$

8. $\dot{x}_1=x_1+x_2-x_3,\quad x_1(0)=0$
$\dot{x}_2=3x_1-x_2+4x_3,\quad x_2(0)=1$
$\dot{x}_3=-x_1-x_2,\quad x_3(0)=-1$

9. $\dot{x}_1=-x_3,\quad x_1(-1)=2$
$\dot{x}_2=x_1,\quad x_2(-1)=3$
$\dot{x}_3=-x_2,\quad x_3(-1)=4$

10. Sean

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $3\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$.

11. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathbf{A}\mathbf{x}$ si

$$\text{(a) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sea $\mathbf{A}$ cualquier matriz de $n \times n$, y sea $\mathbf{e}^j$ el vector cuya componente j es 1 y cuyas componentes restantes son igual a cero. Verifique que el vector $\mathbf{A}\mathbf{e}^j$ es la columna j de $\mathbf{A}$.

13. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathbf{A}\mathbf{x}$ si

$$\text{(a) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(d) } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de 3×3 con la propiedad de que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sugerencia: Escriba

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como una combinación lineal de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

15. Sea **A** una matriz de 2 × 2 con la propiedad de que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Determine **A**. *Sugerencia:* El camino fácil es usar el Ejercicio 12.

3.2 ESPACIOS VECTORIALES

En la sección anterior se definió de manera natural un proceso de adición de dos vectores **x** y **y** para originar un nuevo vector **z** = **x** + **y**, y un proceso de multiplicación de un vector **x** por un escalar c para producir un nuevo vector **u** = c**x**. El primer proceso se llamó adición vectorial, y el segundo, multiplicación por un escalar. El presente estudio del álgebra lineal comienza con la premisa más general de que se tiene un conjunto **V** de elementos **x**, **y**, **z**, . . . , y un proceso que combina dos elementos **x** y **y** de **V** para formar un tercer elemento **z** en **V**, y también se tiene un segundo proceso que combina un número c y un elemento **x** en **V** para formar un nuevo elemento **u** en **V**. El primer proceso se denotará como suma, es decir, se escribirá **z** = **x** + **y**, y el segundo se denotará como multiplicación por un escalar, o sea, se escribirá **u** = c**x**, siempre y cuando ambos satisfagan los axiomas de la adición y la multiplicación, los cuales son:

(i) **x** + **y** = **y** + **x** (ley conmutativa)
(ii) **x** + (**y** + **z**) = (**x** + **y**) + **z** (ley asociativa)
(iii) Existe un elemento único en **V**, llamado *elemento cero*, y denotado por **0**, con la propiedad de que **x** + **0** = **x** para toda **x** en **V**.
(iv) Para todo elemento **x** en **V** hay un elemento único, denotado por −**x** y denominado *negativo* de **x**, o menos **x**, tal que **x** + (−**x**) = **0**
(v) 1 · **x** = **x** para toda **x** en **V**
(vi) (ab)**x** = $a(b$**x**$)$ para todo par de números a y b, y para todo elemento **x** en **V**
(vii) a(**x** + **y**) = a**x** + a**y**
(viii) $(a + b)$**x** = a**x** + b**x**.

El conjunto **V**, asociado en los procesos de adición y multiplicación que satisfacen las condiciones (i) a (viii), se llama ***espacio vectorial***, y sus elementos se denominan *vec-*

tores. Usualmente, los números a y b son números reales, excepto en casos especiales en los que se les considera como números complejos.

OBSERVACIÓN 1. En los axiomas del (i) al (viii) está implícito el hecho de que si **x** y **y** están en **V**, entonces la combinación lineal $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ también está en **V** para cualquier elección de constantes a y b.

OBSERVACIÓN 2. En la sección anterior se definió un vector **x** como una sucesión de n números. En el contexto más general de esta sección se llama vector a una cantidad **x** por el hecho de estar en un espacio vectorial. Es decir, una cantidad **x** es un vector si pertenece a un conjunto de elementos **V** con dos procesos (adición y multiplicación por un escalar) que satisfacen las condiciones (i) a (viii). Como se verá más adelante en el Ejemplo 3, el conjunto de sucesiones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de n números reales es un espacio vectorial (con las operaciones usuales de adición vectorial y multiplicación por un escalar definidas en la Sección 3.1). Así pues, las dos definiciones son compatibles.

EJEMPLO 1 Sea **V** el conjunto de funciones $x(t)$ que satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \tag{1}$$

con la suma de dos funciones y el producto de una función por un número, definido en la forma usual. Es decir,

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

y

$$(cf)(t) = cf(t).$$

Es fácil verificar que **V** es un espacio vectorial. Observar primero que si x^1 y x^2 están en **V**, entonces toda combinación lineal $c_1x^1 + c_2x^2$ está en **V**, ya que la ecuación diferencial (1) es lineal. Más aún, los axiomas (i), (ii), y del (v) al (viii), se satisfacen automáticamente, ya que para cualquier tiempo t, la adición de funciones y la multiplicación de una función por un número, se convierte en la adición y la multiplicación de dos números. El vector cero en **V** es la función que toma el valor nulo para todo tiempo t; dicha función está en **V**, ya que $x(t) \equiv 0$ es una solución de (1). Por último, en negativo de cualquier función en **V** está también en **V**, ya que el negativo de cualquier solución de (1) es también una solución de (1).

EJEMPLO 2 Sea **V** el conjunto de todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación diferencial $(d^2x/dt^2) - 6x^2 = 0$, con la suma de dos funciones y el producto de una función por

un número, definidos en la forma usual. **V** no es un espacio vectorial, ya que aunque la suma de dos soluciones cualesquiera está bien definida, no se encuentra necesariamente en **V**. De manera similar, el producto de una solución por una constante no necesariamente está en **V**. Por ejemplo, la función $x(t) = 1/t^2$ está en **V**, pues satisface la ecuación diferencial; sin embargo, la función $2x(t) = 2/t^2$ no está en **V** ya que no satisface la citada ecuación diferencial.

EJEMPLO 3 Sea **V** el conjunto de las sucesiones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de n números reales. Definir $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $c\mathbf{x}$ como la adición vectorial y la multiplicación por un escalar que se definieron en la Sección 3.1. Es fácil verificar que **V** es un espacio vectorial ante estas operaciones. El vector cero es la sucesión

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el vector $-\mathbf{x}$ es el vector

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}.$$

Este espacio se conoce usualmente como el *espacio euclidiano* de dimensión n y se denota por R^n.

EJEMPLO 4 Sea **V** el conjunto de todas las sucesiones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de n números complejos $x_1, \ldots, x_n$. Definir $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $c\mathbf{x}$, para cualquier número complejo c, como la adición vectorial y la multiplicación por un escalar que se definieron en la Sección 3.1. Una vez más es fácil verificar que **V** es un espacio vectorial ante estas operaciones. Este espacio se denomina usualmente como el *espacio complejo* de dimensión n, y se denota por C^n.

EJEMPLO 5 Sea **V** el conjunto de todas las matrices **A** de $n \times n$. Definir la suma de matrices **A** y **B** como la matriz que resulta de sumar los elementos correspondientes

de **A** y de **B**, y definir la matriz $c\mathbf{A}$ como la que se obtiene al multiplicar por c todos los elementos de **A**. En otras palabras,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

y

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}.$$

Los axiomas (i), (ii) y (v) a (viii) se satisfacen automáticamente, ya que lo que se hace al sumar dos matrices o multiplicar una matriz por una constante es sumar o multiplicar dos números. El vector cero, o la matriz **0**, es aquella cuyos elementos son todos nulos, y el negativo de una matriz **A** es

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, **V** es un espacio vectorial ante las operaciones de adición de matrices y multiplicación por un escalar.

EJEMPLO 6 Ahora se presentará un ejemplo del conjunto de elementos que tiene semejanza con un espacio vectorial, aunque no lo es. El propósito del ejemplo es hacer notar que los elementos de **V** pueden ser casi de cualquier índole, y que la operación de adición puede ser un proceso muy extraño. Sea **V** el conjunto formado por tres animales: un gato (C, de *cat*), un perro (D, de *dog*) y un ratón (M, de *mouse*). Siempre que dos animales se encuentran, uno de ellos devora al otro y se transforma en un animal diferente. Las reglas para que se devoren son las siguientes:

(1) Si un perro encuentra a un gato, entonces el perro devora al gato y se transforma en ratón.
(2) Si un perro encuentra a otro perro, entonces uno de ellos devora al otro y se transforma en gato.
(3) Si un perro encuentra a un ratón, entonces el perro devora al ratón y permanece sin cambio.

(4) Si un gato encuentra a otro gato, entonces uno de ellos devora al otro y se transforma en un perro.
(5) Si un gato encuentra a un ratón, entonces el gato devora al ratón y permanece sin cambio.
(6) Si un ratón encuentra a otro ratón, entonces uno de ellos devora al otro y permanece sin cambio.

Por supuesto que "devorar" es un proceso para combinar dos elementos de **V** y formar un tercer elemento en **V**. Este proceso de devoración se llamará adición y se denotará por +, de modo que las reglas 1 a 6 pueden escribirse en forma abreviada como

1. $D+C=M$	2. $D+D=C$	3. $D+M=D$
4. $C+C=D$	5. $C+M=C$	6. $M+M=M$.

Esta operación de devorar satisface todos los axiomas de la suma. Para verlo, nótese que el axioma (i) se satisface porque las reglas de la devoración no dependen del orden en que aparecen los animales. Es decir, $D + C = C + D$, etcétera. Más aún, el resultado de cualquier suma es, una vez más, un animal en **V**. Eso no pasaría, por ejemplo, si un perro devorara a un gato y se transformara en un hipopótamo. La ley asociativa (ii) también se satisface, aunque su verificación debe hacerse explícitamente. Supóngase, por ejemplo, que se encuentran dos gatos y un perro. A priori, no es obvio que no haya diferencia si los dos gatos se encuentran primero y el resultado encuentra al perro, o si un gato encuentra primero al perro y el resultado encuentra al otro gato. Para verificarlo considere

$$(C+C)+D=D+D=C$$

y

$$(C+D)+C=M+C=C.$$

Análogamente es posible demostrar que el resultado de cualquier encuentro entre tres animales es independiente del orden en que se encuentran. Ahora bien, obsérvese que el elemento cero en **V** es el ratón, ya que ningún animal cambia después de devorar un ratón. Por último, "menos un perro" es un gato (ya que $D + C = M$); "menos un gato" es un perro, y "menos un ratón" es un ratón. Sin embargo, **V** *no* es un espacio vectorial, ya que no se definió una operación de multiplicación escalar. Más aún, es clara la imposibilidad de definir las cantidades aC y aD, para todos los números reales a, de modo que satisfagan los axiomas (v) a (viii).

EJEMPLO 7 Sea **V** el conjunto de todas las soluciones

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

con valores vectoriales de la ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$\mathbf{V}$ es un espacio vectorial ante las operaciones usuales de adición vectorial y multiplicación por escalares. De hecho, obsérvese que los axiomas (i), (ii) y (v) a (viii) se satisfacen automáticamente. Por lo tanto, sólo se necesita verificar que

(a) La adición de dos soluciones cualesquiera de (2) es también una solución.
(b) Una constante multiplicada por una solución de (2) también es una solución.
(c) La función con valores vectoriales

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una solución de (2), axioma (iii).
(d) El negativo de cualquier solución de (2) es también una solución, axioma (iv).

Ahora bien, (a) y (b) son exactamente el Teorema 1 de la sección anterior, mientras que (d) es un caso especial de (b). Para verificar (c) obsérvese que

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la función con valores vectoriales $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es siempre una solución de la ecuación diferencial (2).

EJERCICIOS

En cada uno de los problemas del 1 al 6, determine si el conjunto dado de elementos

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

forma un espacio vectorial de acuerdo con las propiedades de adición vectorial y multiplicación por un escalar definidas en la Sección 3.1.

1. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde $3x_1 - 2x_2 = 0$

2. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

3. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

4. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

5. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ para todo número real a y b

6. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ donde

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \quad 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

En cada uno de los Problemas 7-11, determine si el conjunto dado de funciones constituye un espacio vectorial de acuerdo con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de una función por una constante.

7. El conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 4.
8. El conjunto de todas las funciones diferenciables.
9. El conjunto de todas las funciones diferenciables cuya derivada en $t = 1$ es tres.
10. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \cos t$.
11. El conjunto de todas las funciones $y(t)$ que tienen periodo 2π, es decir, que $y(t + 2\pi) = y(t)$.
12. Demuestre que el conjunto de soluciones con valores vectoriales

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + 1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 1$$

no es un espacio vectorial.

3.3 DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea **V** el conjunto de soluciones $y(t)$ de la ecuación lineal homogénea de segundo orden $(d^2y/dt^2) + p(t)(dy/dt) + q(t)y = 0$. Recuérdese que toda solución $y(t)$ puede expresarse como combinación lineal de cualesquiera dos soluciones linealmente independientes. Así pues, si se conocieran dos funciones "independientes" $y^1(t)$ y $y^2(t)$ en **V**, entonces se podrían encontrar todas las funciones en **V** al tomar todas las combinaciones lineales $c_1y^1(t) + c_2y^2(t)$ de y^1 y y^2. Sería deseable poder deducir una propiedad similar para las soluciones de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Para ello, se define la noción de un conjunto finito de vectores que generan el espacio total, y la noción de independencia de vectores en un espacio vectorial arbitrario **V**.

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ *genera* a **V** si el conjunto de todas las combinaciones lineales $c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_n\mathbf{x}^n$ agota a **V**. Es decir, los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ generan **V** si todo elemento de **V** puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$.

EJEMPLO 1 Sea **V** el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $(d^2x/dt^2) - x = 0$. Sea x^1 la función cuyo valor en cualquier tiempo t es e^t, y sea x^2 la función cuyo valor en cualquier tiempo t es e^{-t}. Las funciones x^1 y x^2 están en **V**, ya que satisfacen la ecuación diferencial. Más aún, estas funciones también generan a **V**, ya que toda solución $x(t)$ de la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

de modo que

$$x = c_1x^1 + c_2x^2.$$

EJEMPLO 2 Sea $\mathbf{V} = R^n$ y denótese por $\mathbf{e}^j$ al vector con un 1 en el lugar j y ceros en las demás posiciones; es decir,

$$\mathbf{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de vectores $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ genera a R^n, ya que todo vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_n\mathbf{e}^n.$$

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ es *linealmente dependiente* si uno de los vectores es una combinación lineal de los otros. Una manera de expresarlo con precisión matemática es la siguiente. Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ es linealmente dependiente si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *no todas iguales a cero* y tales que

$$c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_n\mathbf{x}^n = \mathbf{0}.$$

Estas dos definiciones son equivalentes, porque si $\mathbf{x}^j$ es una combinación lineal de $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{j-1}, \mathbf{x}^{j+1}, \ldots, \mathbf{x}^n$, es decir, si

$$\mathbf{x}^j = c_1\mathbf{x}^1 + \ldots + c_{j-1}\mathbf{x}^{j-1} + c_{j+1}\mathbf{x}^{j+1} + \ldots + c_n\mathbf{x}^n,$$

entonces la combinación lineal

$$c_1\mathbf{x}^1 + \ldots + c_{j-1}\mathbf{x}^{j-1} - \mathbf{x}^j + c_{j+1}\mathbf{x}^{j+1} + \ldots + c_n\mathbf{x}^n$$

es nula y no todas las constantes son iguales a cero. Recíprocamente, si $c_1\mathbf{x}^1$, $+ c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_n\mathbf{x}^n = \mathbf{0}$ y $c_j \neq 0$ para alguna j, entonces es posible dividir entre c_j y despejar $\mathbf{x}^j$ como una combinación lineal de $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{j-1}, \mathbf{x}^{j+1}, \ldots, \mathbf{x}^n$. Por ejemplo, si $c_1 \neq 0$ entonces puede dividirse entre c_1 para obtener

$$\mathbf{x}^1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}^2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{x}^3 - \ldots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{x}^n.$$

DEFINICIÓN. Si los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ no son linealmente dependientes, es decir, si ninguno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros, entonces se dice que son *linealmente independientes*. La expresión matemática precisa significa que los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son linealmente independientes si la ecuación

$$c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_n\mathbf{x}^n = \mathbf{0}$$

implica necesariamente que todas las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son iguales a cero.

Para determinar si un conjunto de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ es linealmente dependiente o independiente, se escribe la ecuación $c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_n\mathbf{x}^n = \mathbf{0}$, y se ve qué implica la igualdad acerca de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si todas las consantes deben ser nulas, entonces $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son linealmente independientes. Por otro lado, si no todas las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ deben ser iguales a cero, entonces $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{V} = R^3$ y sean $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$ los vectores

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Para determinar si los vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes, se escribe la ecuación $c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_3\mathbf{x}^3 = \mathbf{0}$, es decir,

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El primer miembro de esta ecuación es el vector

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 3c_3 \\ -c_1 + 2c_2 \\ c_1 + 3c_2 + 5c_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las constantes c_1, c_2 y c_3 deben satisfacer las ecuaciones

$$c_1 + c_2 + 3c_3 = 0, \qquad \text{(i)}$$
$$-c_1 + 2c_2 = 0, \qquad \text{(ii)}$$
$$c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0. \qquad \text{(iii)}$$

La ecuación (ii) afirma que $c_1 = 2c_2$. Sustituyendo esto en las ecuaciones (i) y (iii) se obtiene

$$3c_2 + 3c_3 = 0 \quad \text{y} \quad 5c_2 + 5c_3 = 0.$$

Estas ecuaciones tienen un número infinito de soluciones c_2, c_3 puesto que se reducen a la ecuación $c_2 + c_3 = 0$. Una solución particular es $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. Entonces, a partir de la ecuación (ii) se tiene $c_1 = -2$. Por lo tanto,

$$-2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$ son vectores linealmente dependientes en R^3.

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{V} = R^n$ y sean $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$, los vectores

$$\mathbf{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar si $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ son linealmente dependientes o independientes, se escribe la ecuación $c_1\mathbf{e}^1 + \ldots + c_n\mathbf{e}^n = \mathbf{0}$, es decir,

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + c_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El primer miembro de esta ecuación es el vector

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, y $c_n = 0$. Como consecuencia, $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ son vectores linealmente independientes en R^n.

DEFINICIÓN. La *dimensión* de un espacio vectorial **V**, que se denota por dim **V**, es el número mínimo de vectores linealmente independientes que genera a **V**. Se dice que **V** es un espacio de dimensión finita si su dimensión lo es. Por otra parte, se dice que **V** es un espacio de dimensión infinita si ningún conjunto finito de elementos genera a **V**.

La dimensión de un espacio **V** puede caracterizarse como el número mínimo de elementos que hay que encontrar para conocer todos los elementos de **V**. En este sentido, la definición de dimensión refleja la idea intuitiva sobre el tema. Sin embargo, a partir de esta definición únicamente, es muy difícil calcular la dimensión de un espacio **V**. Por ejemplo, sea $\mathbf{V} = R^n$. En los Ejemplos 2 y 4 se mostró que los vectores $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ son linealmente independientes y generan a **V**. Más aún, se tiene la idea intuitiva de que no es posible generar a R^n con menos de n vectores. Así pues, la dimensión de R^n debe ser igual a n. Pero, ¿cómo es posible demostrarlo rigurosamente? De hecho, ¿cómo es posible demostrar la imposibilidad de encontrar un conjunto de $(n - 1)$ vectores linealmente independientes que generen a R^n? Así pues, la definición considerada de dimensión no es muy útil. Sin embargo, será de muchísima utilidad después de demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si n vectores linealmente independientes generan a* **V**, *entonces* $\dim \mathbf{V} = n$.

Se necesitarán dos lemas para demostrar el Teorema 2. El primero trata de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales y puede motivarse de la siguiente manera. Supóngase que se tiene interés en determinar de manera única n números desconocidos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Parece razonable que deberían tenerse n ecuaciones que se satisfagan con estas incógnitas. Si se tienen muy pocas ecuaciones entonces podría haber muchas soluciones diferentes, es decir, muchos conjuntos distintos de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfarían las ecuaciones dadas. El Lema 1 demuestra especialmente el caso de que se tengan m ecuaciones lineales homogéneas para $n > m$ incógnitas.

LEMA 1. *Un conjunto de m ecuaciones lineales homogéneas para n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admite siempre una solución no trivial si $m < n$. Es decir, el conjunto de m ecuaciones con n incógnitas*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

tiene siempre una solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferente de $x_1 = \ldots = x_n = 0$, si $m < n$.

OBSERVACIÓN. Nótese que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ ciertamente es una solu-

ción del sistema de ecuaciones (1). Así pues, el Lema 1 asegura que las ecuaciones tienen más de una solución.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Se demostrará el lema por inducción sobre m. Para ello, obsérvese que el lema es verdadero si $m = 1$, ya que en caso se tiene únicamente una ecuación de la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$, con $n \geq 2$. Si $a_{ll} = 0$, entonces es posible encontrar una solución no trivial de esta ecuación tomando $x_1 = 1, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si $a_{11} \neq 0$, entonces es posible una solución no trivial de esta ecuación tomando $x_2 = 1, \ldots, x_n = 1$ y $x_1 = -(a_{12} + \ldots + a_{1n})/a_{11}$.

Para el siguiente paso en la demostración por inducción, supóngase que el Lema 1 es verdadero para algún entero $m = k$. Se demostrará que ello implica que el Lema 1 es verdadero para $m = k + 1$ y $k + 1 < n$. Para tal fin, considérense las siguientes $k + 1$ ecuaciones para las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

con $k + 1 < n$. Si $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k+1,1}$ son todas iguales a cero, entonces $x_1 = 1, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ es claramente una solución no trivial. Por lo tanto, es posible suponer que al menos uno de los coeficientes es distinto de cero. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $a_{11} \neq 0$, ya que de otra manera se toma la ecuación con el coeficiente para x_1 distinto de cero y se remarca con índices como la primera ecuación. Entonces

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n.$$

Al sustituir este valor de x_l en las ecuaciones segunda hasta la $(k + 1)$ se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + \ldots + b_{kn}x_n &= 0 \\ b_{k+1,2}x_2 + b_{k+1,3}x_3 + \ldots + b_{k+1,n}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde $b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11}$. Ahora bien, las últimas k ecuaciones de (3) son k ecuaciones lineales homogéneas para las $(n - 1)$ incógnitas $x_2, \ldots, x_n$. Más aún, k es menor que $n - 1$, ya que $k + 1$ es menor que n. Por lo tanto, por la hipótesis de inducción,

estas ecuaciones tienen una solución no trivial $x_2, \ldots, x_n$. Una vez que se conocen $x_2, \ldots, x_n$, se tiene entonces como antes $x_1 = -(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)/a_{11}$ a partir de la primera ecuación en (3). Esto demuestra el Lema 1 para $m = k + 1$, y como consecuencia, por inducción, par toda m. □

Si un espacio vectorial **V** tiene dimensión m, entonces tiene m vectores linealmente independientes $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$, y todo vector en el espacio puede expresarse como una combinación lineal de m vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$. En este caso se tiene la impresión de que no puede haber más de m vectores linealmente independientes en **V**. Ese es el contenido del Lema 2.

LEMA 2. *En un espacio de dimensión m, cualquier conjunto de n > m vectores debe ser linealmente dependiente. En otras palabras, el número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión finita es la dimensión del espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que **V** tiene dimensión m, entonces existen m vectores linealmente independientes $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ que generan a **V**. Sean $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ un conjunto de n vectores en **V** con $n > m$. Puesto que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ generan a **V**, entonces todas las $\mathbf{y}^j$ se pueden escribir como combinaciones lineales de estos vectores. Es decir, existen constantes a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, tales que

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^1 &= a_{11}\mathbf{x}^1 + a_{12}\mathbf{x}^2 + \ldots + a_{1m}\mathbf{x}^m\\
\mathbf{y}^2 &= a_{21}\mathbf{x}^1 + a_{22}\mathbf{x}^2 + \ldots + a_{2m}\mathbf{x}^m\\
&\vdots\\
\mathbf{y}^n &= a_{n1}\mathbf{x}^1 + a_{n2}\mathbf{x}^2 + \ldots + a_{nm}\mathbf{x}^m.
\end{aligned} \tag{4}$$

Para determinar si $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ son linealmente dependientes o linealmente independientes, considérese la ecuación

$$c_1\mathbf{y}^1 + c_2\mathbf{y}^2 + \ldots + c_n\mathbf{y}^n = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Usando (4), la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= c_1\mathbf{y}^1 + c_2\mathbf{y}^2 + \ldots + c_n\mathbf{y}^n\\
&= (c_1a_{11} + \ldots + c_na_{n1})\mathbf{x}^1 + (c_1a_{12} + \ldots + c_na_{n2})\mathbf{x}^2\\
&\quad + \ldots + (c_1a_{1m} + \ldots + c_na_{nm})\mathbf{x}^m.
\end{aligned}$$

Esta ecuación establece que una combinación lineal de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ es igual a cero. Dado que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^m$ son linealmente independientes, entonces todos los coeficientes deben ser iguales a cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_na_{n1} &= 0\\
c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_na_{n2} &= 0\\
&\vdots\\
c_1a_{1m} + c_2a_{2m} + \ldots + c_na_{nm} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora bien, obsérvese que el sistema de ecuaciones (6) es un conjunto de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ con $n > m$. Por el Lema 1, estas ecuaciones tienen una solución no trivial. Así pues, existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas iguales a cero y tales que $c_1\mathbf{y}^1 + c_2\mathbf{y}^2 + \ldots + c_n\mathbf{y}^n = \mathbf{0}$. Como consecuencia, $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ son linealmente dependientes. □

Ahora es posible demostrar el Teorema 2.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Si n vectores linealmente independientes generan a $\mathbf{V}$, entonces por la definición de dimensión, $\dim \mathbf{V} \leq n$. Por el Lema 2 se tiene que $n \leq \dim \mathbf{V}$. Por lo tanto, $\dim \mathbf{V} = n$. □

EJEMPLO 5 La dimensión de R^n es n, dado que $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$, son n vectores linealmente independientes que generan a R^n.

EJEMPLO 6 Sea $\mathbf{V}$ el conjunto de todas las matrices de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

y denótese por $\mathbf{E}_{ij}$ la matriz con un 1 en el renglón i y la columna j, y ceros en los elementos restantes. Por ejemplo,

$$\mathbf{E}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar si estas matrices son linealmente dependientes o independientes, considérese la ecuación siguiente

$$\sum_{i,j=1}^{3} c_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ahora bien, debe observarse que el lado izquierdo de (7) es la matriz

$$c_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + c_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Al igualar esta matriz con la matriz cero se obtiene $c_{11} = 0, c_{12} = 0, \ldots, c_{33} = 0$. Por lo tanto, las 9 matrices $\mathbf{E}_{ij}$ son linealmente independientes. Más aún, estas 9 matrices también generan a $\mathbf{V}$, ya que cualquier matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

puede escribirse, por supuesto, en la forma $\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$. Por lo tanto, $\dim \mathbf{V} = 9$.

DEFINICIÓN. Si un conjunto de vectores linealmente independientes genera a un espacio vectorial **V**, entonces se dice que dicho conjunto constituye una *base* de **V**. Una base se llama también un *sistema coordenado*. Por ejemplo, los vectores

$$\mathbf{e}^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}^3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad \mathbf{e}^4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

son una base para R^4. Si

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + x_3\mathbf{e}^3 + x_4\mathbf{e}^4$, y los números x_i se denominan componentes o coordenadas relativas a esta base.

COROLARIO. *En un espacio vectorial de dimensión finita, toda base tiene el mismo número de vectores, y dicho número es la dimensión del espacio.*

El siguiente teorema es de extrema utilidad para determinar si un conjunto de vectores es una base de **V**.

TEOREMA 3. *Cualesquiera n vectores linealmente independientes en un espacio* **V** *de dimensión n, deben generar a* **V**. *Es decir, cualesquiera n vectores linealmente independientes en un espacio* **V** *de dimensión n son una base de* **V**.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ n vectores linealmente independientes en un espacio **V** de dimensión n. Para demostrar que generan a **V**, es necesario hacer ver que cualquier **x** en **V** puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$. Para ello, tómese cualquier **x** en **V** y considérese el conjunto de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$. Dichos vectores forman un conjunto de $(n + 1)$ elementos en un espacio vectorial **V** de dimensión n; por el Lema 2 los vectores deben ser linealmente dependientes. En consecuencia, existen constantes $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas iguales a cero, y tales que

$$c\mathbf{x}+c_1\mathbf{x}^1+c_2\mathbf{x}^2+\ldots+c_n\mathbf{x}^n=\mathbf{0}. \tag{8}$$

Es claro que $c \neq 0$, porque de otro modo el conjunto de vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ sería linealmente dependiente. Por lo tanto, es posible dividir ambos lados de (8) entre c, para obtener que

$$\mathbf{x}=-\frac{c_1}{c}\mathbf{x}^1-\frac{c_2}{c}\mathbf{x}^2-\ldots-\frac{c_n}{c}\mathbf{x}^n.$$

Por lo tanto, cualesquiera n vectores linealmente independientes en un espacio **V** de dimensión n también deben generar a **V**.

EJEMPLO 7 Demostrar que los vectores

$$\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

forman una base para R^2.

SOLUCIÓN. Para determinar si $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ son linealmente dependientes o independientes, considérese la ecuación

$$c_1\mathbf{x}^1+c_2\mathbf{x}^2=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{9}$$

La ecuación (9) implica que $c_1 + c_2 = 0$ y $c_1 - c_2 = 0$. Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene $c_1 = 0$, y al restarlas resulta $c_2 = 0$. Como consecuencia, $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ son dos vectores linealmente independientes en el espacio R^2, de dimensión 2. Por lo tanto, deben generar a $\mathbf{V}$.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 4, determine si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o independiente.

1. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-13\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

5. Sea $\mathbf{V}$ el conjunto de las matrices 2×2. Determine si los siguientes conjuntos de matrices son linealmente dependientes o independientes en $\mathbf{V}$.

   (a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Sea $\mathbf{V}$ el espacio de polinomios en t de grado ≤ 2.
   (a) Muestre que $\dim \mathbf{V} = 3$.
   (b) Sean p_1, p_2 y p_3 los polinomios cuyos valores en cualquier tiempo t son $(t-1)^2$, $(t-2)^2$, y $(t-1)(t-2)$, respectivamente. Demuestre que p_1, p_2 y p_3 son linealmente independientes. Concluya que, por lo tanto, según el Teorema 3, p_1, p_2 y p_3 forman una base para $\mathbf{V}$.

7. Sea $\mathbf{V}$ el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $d^2y/dt^2 - y = 0$.
   (a) Demuestre que $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial.
   (b) Encuentre una base para $\mathbf{V}$.

8. Sea **V** el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $(d^3y/dt^3) + y = 0$ que satisfacen que $y(0) = 0$. Demuestre que **V** es un espacio vectorial y halle una base para él.

9. Sea **V** el conjunto de polinomios $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ que satisfacen

$$p(0)+2p'(0)+3p''(0)=0.$$

Demuestre que **V** es un espacio vectorial y encuentre una base para él.

10. Sea **V** el conjunto de soluciones

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 6 & -11 & 6\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Pruebe que

$$\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix} e^t\\ e^t\\ e^t\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix} e^{2t}\\ 2e^{2t}\\ 4e^{2t}\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad \mathbf{x}^3(t)=\begin{bmatrix} e^{3t}\\ 3e^{3t}\\ 9e^{3t}\end{bmatrix}$$

forman una base para **V**.

11. Sea **V** un espacio vectorial. Se dice que **W** es un subespacio de **V** si **W** es un subconjunto de **V**, el cual es también espacio vectorial. Sea **W** el subconjunto de R^n formado por los vectores

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

y que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=0\\ 2x_1-x_2+x_3&=0\\ 6x_1\qquad+6x_3&=0. \end{aligned}$$

Pruebe que **W** es un subespacio de R^3 y halle una base para él.

12. Demuestre que cualesquiera n vectores que generan un espacio vectorial **V** de dimensión n, deben ser linealmente independientes. *Sugerencia:* Muestre que todo conjunto de vectores linealmente dependientes contiene un subconjunto linealmente independiente que también genera a **V**.

13. Sean $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ n vectores en un espacio vectorial **V**. Sea **W** el subconjunto de **V** formado por las combinaciones lineales $c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2 + \ldots + c_n\mathbf{v}^n$ de $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Demuestre que **W** es un subespacio de **V** y que $\dim \mathbf{W} \leq n$.

14. Sea **V** el conjunto de funciones $f(t)$ que son analíticas para $|t| < 1$; es decir, $f(t)$ tiene un desarrollo en series de potencias $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$, el cual

converge para $|t| < 1$. Demuestre que **V** es un espacio vectorial y que su dimensión es infinita. *Sugerencia:* **V** contiene a todos los polinomios.

15. Sean $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^m$ m vectores linealmente independientes en un espacio vectorial **V** de dimensión n, con $n > m$. Demuestre que es posible encontrar vectores $\mathbf{v}^{m+1}, \ldots, \mathbf{v}^n$ tales que $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^m, \ldots, \mathbf{v}^n$ forman una base para **V**. Es decir, todo conjunto de m vectores linealmente independientes en un espacio **V** de dimensión n, puede ser completado para formar una base para **V**.

16. Encuentre una base para R^3 que incluya los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

17. (a) Demuestre que

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linalmente independientes en R^3.

(b) Sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\mathbf{e}^2 + x_3\mathbf{e}^3.$$

Dado que $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ y $\mathbf{v}^3$ son linealmente independientes, entonces son una base y $\mathbf{x} = y_1\mathbf{v}^1 + y_2\mathbf{v}^2 + y_3\mathbf{v}^3$. ¿Cuál es la relación entre las coordenadas originales x_i y las nuevas coordenadas y_j?

(c) Exprese la relación entre las coordenadas en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Pruebe que las columnas de **B** son $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ y $\mathbf{v}^3$.

3.4 APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Recuérdese que el Teorema de existencia y unicidad, enunciado en la Sección 2.1 fue un medio importante para resolver la ecuación lineal homogénea de segundo orden $(d^2y/dt^2) + p(t)(dy/dt) + q(t)y = 0$. De manera similar, se hará uso extensivo del Teorema 4, que se enuncia a continuación, para resolver el sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

La demostración de este teorema se indicará en la Sección 4.6.

TEOREMA 4. (Teorema de existencia y unicidad). *Existe una, y sólamente una, solución al problema de valor inicial*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0=\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Más aún, dicha solución existe para $-\infty < t < \infty$.

El Teorema 4 es muy poderoso y tiene muchas aplicaciones. En particular, si $\mathbf{x}(t)$ es una solución no trivial, entonces $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t. (Si $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{0}$ para alguna t^*, entonces $\mathbf{x}(t)$ debe ser igual a cero, ya que ésta y la trivial satisfacen la misma ecuación diferencial y tienen el mismo valor en $t = t^*$.)

Ya se mostró (Ejercicio 7 de la Sección 3.2) que el espacio $\mathbf{V}$ de las soluciones de (1) es un espacio vectorial. El siguiente paso es determinar la dimensión de $\mathbf{V}$.

TEOREMA 5. *La dimensión del espacio* $\mathbf{V}$ *de las soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales* (1) *es* n.

DEMOSTRACIÓN. Se exhibirá una base para $\mathbf{V}$ que contiene n elementos. Para ello, sea $\phi^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0)=\mathbf{e}^j=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} -\text{renglón } j. \tag{3}$$

Por ejemplo $\phi^1(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (1) que satisface la condición inicial

$$\phi^1(0)=\mathbf{e}^1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que, según el Teorema 4, $\phi^j(t)$ existe para toda t y es única. Para determinar si $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$ son vectores linealmente dependientes o independientes en $\mathbf{V}$, considérese la ecuación

$$c_1\phi^1 + c_2\phi^2 + \ldots + c_n\phi^n = \mathbf{0} \tag{4}$$

donde el cero en el segundo miembro de (4) representa al vector nulo en $\mathbf{V}$ (es decir,

aquel cuyas componentes son iguales a la función cero). Se desea mostrar que (4) implica $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Al evaluar ambos lados de (4) en $t = 0$ se obtiene

$$c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + c_n\phi^n(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

o bien

$$c_1\mathbf{e}^1 + c_2\mathbf{e}^2 + \dots + c_n\mathbf{e}^n = \mathbf{0}.$$

Dado que se sabe $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$ son linealmente independientes en R^n, entonces $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Se concluye, por lo tanto, que $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ son vectores linealmente independientes en $\mathbf{V}$.

La afirmación ahora es que $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ también generan a $\mathbf{V}$. Para demostrarlo es necesario que cualquier vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{V}$ (es decir, cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (1)) pueda escribirse como combinación lineal de $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$. Para ello, tómese cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbf{V}$, y denótese por

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

al valor de $\mathbf{x}$ en $t = 0$ $(\mathbf{x}(0) = \mathbf{c})$. Con las constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, construyase la función con valores vectoriales

$$\phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t).$$

se sabe que $\phi(t)$ satisface (1), ya que es una combinación lineal de soluciones. Más aún,

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_1\phi^1(0) + c_2\phi^2(0) + \dots + c_n\phi^n(0) \\ &= c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + c_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

Ahora obsérvese que $\mathbf{x}(t)$ y $\phi(t)$ satisfacen el mismo sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales, y que $\mathbf{x}(t)$ y $\phi(t)$ tienen el mismo valor en $t = 0$. En consecuencia, por el Teorema 4, $\mathbf{x}(t)$ y $\phi(t)$ deben ser idénticas, es decir

$$\mathbf{x}(t) \equiv \phi(t) = c_1\phi^1(t) + c_2\phi^2(t) + \dots + c_n\phi^n(t).$$

Así pues, $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$ también generan a $\mathbf{V}$. Por lo tanto, por el Teorema 2 de la Sección 3.3, $\dim \mathbf{V} = n$.

El Teorema 5 establece que el espacio $\mathbf{V}$ de soluciones de (1) tiene dimensión n. Por lo tanto, sólo se necesitan conjeturar o hallar de otra manera n soluciones lineal-

mente independientes de (1). El Teorema 6, que se enuncia a continuación, aporta un criterio para determinar la independencia lineal de las soluciones. Eso reduce el problema de determinar si n soluciones $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son linealmente independientes, al problema más simple de determinar si sus valores $\mathbf{x}^1(t_0), \mathbf{x}^2(t_0), \ldots, \mathbf{x}^n(t_0)$ en un tiempo apropiado t_0, son vectores linealmente independientes en R^n.

TEOREMA 6. (Criterio de independencia lineal). *Sean* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$, *$k$ soluciones de* $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. *Elíjase* t_0 *convenientemente. Entonces* $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ *son soluciones linealmente independientes si y sólo si* $\mathbf{x}^1(t_0), \mathbf{x}^2(t_0), \ldots, \mathbf{x}^k(t_0)$ *son vectores linealmente independientes en* R^n.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ son soluciones linealmente dependientes. Entonces existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + \ldots + c_k\mathbf{x}^k = \mathbf{0}.$$

Al evaluar esta ecuación en $t = t_0$, se obtiene que

$$c_1\mathbf{x}^1(t_0) + c_2\mathbf{x}^2(t_0) + \ldots + c_k\mathbf{x}^k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}^1(t_0), \mathbf{x}^2(t_0), \ldots, \mathbf{x}^k(t_0)$ son vectores linealmente dependientes en R^n.

Inversamente, supóngase que los valores de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ para algún tiempo t_0 son vectores linealmente dependientes en R^n. Entonces, existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{x}^1(t_0) + c_2\mathbf{x}^2(t_0) + \ldots + c_k\mathbf{x}^k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Determínese la siguiente función con valores vectoriales usando las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^1(t) + c_2\mathbf{x}^2(t) + \ldots + c_k\mathbf{x}^k(t).$$

Esta función satisface (1), ya que es combinación lineal de soluciones. Más aún, $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \mathbf{0}$. Por lo tanto, por el Teorema 4, $\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{0}$ para toda t. Esto implica que $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ son soluciones linealmente dependientes. □

EJEMPLO 1 Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 2x_2 \quad \text{o bien} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Este sistema de ecuaciones proviene de la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0 \tag{6}$$

al tomar $x_1 = y$ y $x_2 = dy/dt$. Dado que $y_1(t) = e^{-t}$ y $y_2(t) = te^{-t}$ son dos soluciones de (6), entonces

$$\mathbf{x}^1(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}^2(t)=\begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

son dos soluciones de (5). Para determinar si $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ son linealmente dependientes o independientes, se verificará si sus valores iniciales

$$\mathbf{x}^1(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}^2(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente dependientes o independientes en R^2. Así pues, se considera la ecuación

$$c_1\mathbf{x}^1(0)+c_2\mathbf{x}^2(0)=\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1+c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta ecuación implica que tanto c_1 como c_2 son iguales a cero. Por lo tanto, $\mathbf{x}^1(0)$ y $\mathbf{x}^2(0)$ son vectores linealmente independientes en R^2. En consecuencia, por el Teorema 6, $\mathbf{x}^1(t)$ y $\mathbf{x}^2(t)$ son soluciones linealmente independientes de (5) y cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (5) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (c_1+c_2t)e^{-t} \\ (c_2-c_1-c_2t)e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

EJEMPLO 2 Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Por el Ejemplo 1 se sabe que toda solución $\mathbf{x}(t)$ debe ser de la forma (7). Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2-c_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $c_1 = 1$ y $c_2 = 1 + c_1 = 2$, y como consecuencia

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} \\ (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Al estudiar la ecuación (1) han sido de utilidad hasta este momento algunos conceptos de álgebra lineal, como espacio vectorial, dependencia, dimensión, base, así como las notaciones vectorial y matricial. Cabe, sin embargo, preguntarse si todo esto es algo más que un lenguaje útil y conveniente. Valdría la pena introducirlo aunque no fuera nada más que un lenguaje, pues una buena notación es esencial para expresar ideas matemáticas. Sin embargo, es más que eso, constituye una teoría propia con muchas aplicaciones.

En las Secciones 3.8-3.10 la tarea de encontrar todas las soluciones de (1) se reducirá al problema algebraico más sencillo de resolver ecuaciones lineales simultáneas de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, se pasará ahora a estudiar la teoría de las ecuaciones lineales simultáneas. También se verá que función desempeña el álgebra lineal.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 4, halle una base para el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial dada.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ (*Sugerencia:* Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que se satisfaga para $x_1(t)$.)

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ (*Sugerencia:* Halle una ecuación diferencial de tercer orden que se satisfaga para $x_1(t)$.)

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Determine para cada una de las ecuaciones diferenciales de la 5 a la 9 si las soluciones dadas son una base para el conjunto de todas las soluciones.

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}^1(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^3(t)=\begin{bmatrix} e^{6t} \\ 0 \\ e^{6t} \end{bmatrix}$

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^3(t)=\begin{bmatrix} -e^{-4t} \\ e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$

8. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$

9. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^3(t)=\begin{bmatrix} e^{-3t}+e^{-7t} \\ e^{-3t} \\ e^{-7t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^4(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-7t} \\ e^{-5t} \\ e^{-5t}+2e^{-7t} \end{bmatrix}$

10. Determine las soluciones $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$ (véase la demostración del Teorema 5) para el sistema de ecuaciones diferenciales en (a) Problema 5; (b) Problema 6; (c) Problema 7.

11. Sea **V** el espacio vectorial de las funciones continuas de $(-\infty, \infty)$ en R^n (los valores de $\mathbf{x}(t)$ están en R^n. Sean $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ funciones en **V**.
   (a) Demuestre que si $\mathbf{x}^1(t_0), \ldots, \mathbf{x}^n(t_0)$ son vectores linealmente independientes en R^n para algún t_0, entonces $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son funciones linealmente independientes en **V**.
   (b) ¿Es cierto que si $\mathbf{x}^1(t_0), \ldots, \mathbf{x}^n(t_0)$ son vectores linealmente dependientes en R^n para algún t_0, entonces $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^n$ son funciones linealmente dependientes en **V**? Justifique la respuesta.

12. Sea **u** un vector en $R^n(\mathbf{u} \neq 0)$.
   (a) ¿Es $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{u}$ una solución de la ecuación diferencial homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$?
   (b) ¿Lo es $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$?
   (c) ¿Lo es $\mathbf{x}(t) = (e^t - e^{-t})\mathbf{u}$?
   (d) ¿Lo es $\mathbf{x}(t) = (e^t + e^{-t})\mathbf{u}$?
   (e) ¿Lo es $\mathbf{x}(t) = (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})\mathbf{u}$?
   (f) ¿Para qué funciones $\phi(t)$ puede ser $\mathbf{x}(t) = \phi(t)\mathbf{u}$ una solución de alguna ecuación de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$?

3.5 TEORÍA DE LOS DETERMINANTES

En esta sección se estudiarán ecuaciones simultáneas de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

El objetivo es determinar una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones (1) tenga solución única $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para comprender mejor el problema, se empieza con el caso más simple $n = 2$. Si se multiplica por a_{21} la primera ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$; la segunda ecuación $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, por a_{11}, y se resta la primera de la segunda, resulta que

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

De manera similar, si se multiplica la primera ecuación por a_{22}, la segunda por a_{12}, y se resta la segunda de la primera, se obtiene que

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Como consecuencia, el sistema de ecuaciones (1) tiene solución única

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

si el número $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ es diferente de cero. Si este número es igual a cero, entonces puede haber soluciones o no. Por ejemplo, el sistema

$$x_1 - x_2 = 1, \qquad 2x_1 - 2x_2 = 4$$

obviamente no tiene soluciones, mientras que el sistema

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad 2x_1 - 2x_2 = 0$$

posee un número infinito de soluciones $x_1 = c$, $x_2 = c$ para cualquier número c. En ambos sistemas se tiene que

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1(-2) - (-1)2 = 0.$$

El caso de tres ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{2}$$

con tres incógnitas x_1, x_2, x_3 puede resolverse también fácilmente. Al eliminar una de las variables en dos de las ecuaciones (2) y reducir por ende el problema al caso $n = 2$, es posible mostrar (Ejercicio 1) que el sistema (2) tiene una solución única x_1, x_2, x_3 si y sólo si el número

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{3}$$

es diferente de cero.

Ahora es posible suponer que el sistema de ecuaciones (1), el cual puede abreviarse en la forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

tiene solución única **x**, si y sólo si un cierto número que depende de los elementos a_{ij} de la matriz **A**, es distinto de cero. Para $n = 4$ puede determinarse este número eliminando una de las variables de dos de las ecuaciones (1). Sin embargo, el álgebra es tan complicada que el número resultante es ininteligible. En vez de eso, se generalizará el número (3), de modo que a cada sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se le asociará un sólo número llamado *determinante de* **A** (simbolizado por $\det \mathbf{A}$), el cual depende de los elementos de la matriz **A**. Se mostrarán algunas propiedades útiles de dicha asociación y se usarán estas propiedades para hacer ver que el sistema de ecuaciones (4) tiene solución única **x** si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Si se analiza la expresión (3) con cuidado, se ve que puede describirse de la siguiente manera. Primero se toma un elemento a_{1j_1} del primer renglón de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

El elemento puede ser a_{11}, o bien a_{12} o a_{13}. Se multiplica a_{1j_1} por un elemento a_{2j_2} del segundo renglón de **A**. Sin embargo, j_2 no debe ser igual a j_1. Por ejemplo, si se elije a_{12} del primer renglón de **A**, entonces hay que elegir a_{21} o bien a_{23} del segundo renglón de **A**. Después se multiplican los dos números por el elemento en el tercer renglón de **A** en la columna restante. Esto se hace para todas las posibles elecciones de elementos de cada renglón de **A** sin tomarlos nunca dos veces de la misma columna. De esta manera, se obtienen 6 distintos productos de tres elementos de **A**, ya que hay tres maneras de elegir un elemento del primer renglón de **A**, dos modos para escoger entonces un elemento del segundo renglón de **A** y sólo una manera de elegir un elemento del tercer renglón de **A**. Cada uno de estos productos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ se multiplica por ± 1 dependiendo del orden específico $j_1j_2j_3$. Los productos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ con $(j_1j_2j_3) = (123), (231)$ y (312) se multiplican por $+1$, mientras que los productos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, con $(j_1j_2j_3) = (321), (213)$ y (132), se multiplican por -1. Por último, se suman los resultados.

Los seis conjuntos de números (123), (231), (312), (321), (213) y (132) se llaman *permutaciones* de los enteros 1, 2 y 3. Obsérvese que cada una de las tres permutaciones que corresponden a los términos positivos requiere de un número par de intercambios entre números adyacentes para reordenarlos, es decir, para llevar los enteros a su orden natural. De manera similar, cada una de las tres permutaciones correspondientes a los términos negativos requiere de un número impar de intercambios entre números para reordenarlos. Para verificarlo, obsérvese que

$$\begin{array}{ll} 231 \to 213 \to 123 & \text{(2 intercambios)} \\ 312 \to 132 \to 123 & \text{(2 intercambios)} \\ 321 \to 312 \to 132 \to 123 & \text{(3 intercambios)} \\ 213 \to 123 \quad \text{and} \quad 132 \to 123 & \text{(1 intercambio cada una)} \end{array}$$

Esto motiva la siguiente definición del *determinante* de una matriz **A** de $n \times n$.

DEFINICIÓN.

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \tag{5}$$

donde $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = 1$ si la permutación $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es par, es decir, si se pueden reordenar los enteros según su orden natural en un número par de intercambios de enteros adyacentes. $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = -1$ si la permutación es impar. En otras palabras, elíjase un elemento a_{1j_1} del primer renglõn de la matriz $\mathbf{A}$. Multiplíquese por un elemento a_{2j_2} del segundo renglón de $\mathbf{A}$, con $j_2 \neq j_1$. Este proceso continua pasando una vez por cada renglón y tomando cada vez un elemento de una columna diferente. Por último, multiplíquese el producto $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{nj_n}$ por $+1$ si la permutación $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es par, y por -1 si la permutación es impar. Lo anterior para todas las posibles elecciones de un elemento de cada renglón de $\mathbf{A}$, sin tomar dos veces de la misma columna. Después se suman todas estas contribuciones y se denota el número resultante por $\det \mathbf{A}$.

OBSERVACIÓN. Hay muchas maneras de reordenar una permutación de los enteros $1, 2, \ldots, n$ a su orden natural por medio de intercambios sucesivos de enteros adyacentes. Por ejemplo,

$$4312 \to 4132 \to 1432 \to 1423 \to 1243 \to 1234$$

y

$$4312 \to 3412 \to 3142 \to 3124 \to 1324 \to 1234.$$

Sin embargo, es posible mostrar que el número de intercambios de enteros adyacentes que se necesita para reordenar la permutación $j_1 j_2 \ldots j_n$ es siempre impar o siempre par. Por lo tanto, queda perfectamente definido el número $\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$.

EJEMPLO 1 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En este caso, hay solamente dos productos $a_{11}a_{22}$ y $a_{12}a_{21}$ que satisfacen la definición de $\det \mathbf{A}$. Dado que la permutación (12) es par y la permutación (21) es impar, el término $a_{11}a_{22}$ se multiplica por $+1$ y el término $a_{12}a_{21}$ por -1. Por lo tanto, $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

EJEMPLO 2 Calcular

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Un método sencillo para evaluar el determinante de una matriz de 3×3 es escribir las primeras dos columnas a un lado de la matriz y luego tomar los productos a lo largo de las diagonales, como se muestra a continuación:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 3(-1) - (-1)\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 = -3.$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, entonces en general det $\mathbf{A}$ consta de $n!$ productos de n elementos. El determinante de una matriz de 4×4 consta, en general, de 24 términos, mientras que el de una matriz de 10×10 consta del enorme número de 3 628 800 términos. Así pues, resulta impráctico calcular el determinante de una matriz grande $\mathbf{A}$ usando sólo la definición (5). La manera inteligente, y la única posible, de calcular determinantes es (i) encontrar matrices especiales cuyos determinantes puedan calcularse con facilidad, y (ii) reducir el problema de hallar cualquier determinante al problema más sencillo de evaluar el que corresponde a alguna de estas matrices. Para ello, obsérvese que hay tres clases especiales de matrices cuyos determinantes son fáciles de evaluar.

1. *Matrices diagonales:* Una matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

cuyos elementos fuera de la diagonal son todos ceros, se llama *matriz diagonal.* Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Esto es el resultado inmediato de la observación de que la única manera de poder elegir un elemento diferente de cero del primer renglón de $\mathbf{A}$ es eligiendo a_{11}. De manera similar, la única forma de poder seleccionar un elemento distinto de cero del renglón j de $\mathbf{A}$ es eligiendo a_{jj}. Así pues, el único producto diferente de cero que entra en la definición de det $\mathbf{A}$ es $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, y dicho término se multiplica por $+1$ ya que la permutación $(1, 2 \ldots n)$ es par.

2. *Matrices triangulares inferiores:* Una matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

cuyos elementos arriba de la diagonal son todos ceros, se denomina *matriz triangular inferior*, y su determinante es también el producto de los elementos de la diagonal $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Para demostrarlo, obsérvese que la única manera de poder elegir un elemento diferente de cero del primer renglón de $\mathbf{A}$ es eligiendo a_{11}. El segundo renglón de $\mathbf{A}$ tiene dos elementos distintos de cero, pero, dado que ya se eligió de la primera columna, entonces se está forzado a elegir a_{22} del segundo renglón. De manera similar, la elección obligada es a_{jj} del renglón j de $\mathbf{A}$. Así pues, det $\mathbf{A} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

3. *Matrices triangulares superiores:* Una matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

cuyos elementos abajo de la diagonal son todos ceros, se llama *matriz triangular superior* y su determinante es también el producto de los elementos de la diagonal $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. Para demostrarlo es posible proceder en dirección inversa. La única forma de seleccionar un elemento diferente de cero del último renglón de la matriz **A** es eligiendo a_{nn}. Esto obliga entonces a elegir $a_{n-1,n-1}$ del renglón $n - 1$ de **A**. Igualmente, está obligado a elegir a_{jj} del renglón j de **A**. Por lo tanto, $\det \mathbf{A} = a_{nn}\ldots a_{22}a_{11}$. $a_{nn}\ldots a_{22}a_{11}$.

A continuación se deducen algunas propiedades sencillas, aunque muy útiles, de los determinantes.

PROPIEDAD 1. Si se intercambian dos renglones adyacentes de **A**, entonces cambia el signo del determinante.

DEMOSTRACIÓN. Sea **B** la matriz que se obtiene de **A** al intercambiar los renglones k y $k + 1$. Obsérvese que todos los productos que aparecen en la definición de det **B** son los mismos que aparecen en la definición de det **A**. La única diferencia es que se cambia el orden en el que se elijan de las columnas de **A** y de **B**. Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

El producto $4 \times 2 \times 2$ aparece en det **A** al elegir primero del primer renglón, tercera columna; después del segundo renglón, primera columna y, por último, del tercer renglón, segunda columna. El mismo producto aparece en det **B** al seleccionar primero del primer renglón, tercera columna; después del segundo renglón, segunda columna y, por último, del tercer renglón, primera columna. De manera más general, el término

$$a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}a_{k+1j_{k+1}}\cdots a_{nj_n}$$

en det **A** corresponde al término

$$b_{1j_1}\cdots b_{k,j_{k+1}}b_{k+1j_k}\cdots b_{nj_n}$$

en det **B**. El signo del primer término está dado por la permutación $(j_1\ldots j_kj_{k+1}\ldots j_n)$, y el signo del segundo término lo está por la permutación $(j_1\ldots j_{k+1}j_k\ldots j_n)$. Dado que la segunda se obtiene de la primera al intercambiar los elementos k y $k + 1$, se ve que los dos elementos tienen signos contrarios. Por lo tanto, $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

PROPIEDAD 2. Si se intercambian cualesquiera dos renglones de **A**, entonces cambia el signo del determinante.

DEMOSTRACIÓN. Se mostrará que el número de intercambios de renglones adyacentes que se requiere para alternar los renglones i y j de **A** es impar. Así la Propiedad

2 será una consecuencia de la Propiedad 1. Para ello, supóngase que j es mayor que i. Se necesitan $j - i$ intercambios sucesivos de renglones adyacentes para llevar el renglón j a la posición i, y después $j - i - 1$ intercambios sucesivos de renglones adyacentes para llevar a la posición j el renglón que se encontraba originalmente en la posición i. Así pues, el número total de intercambios que se requieren es $2(j - i) - 1$, y este número siempre es impar.

PROPIEDAD 3. Si cualesquiera dos renglones de $\mathbf{A}$ son iguales, entonces $\det \mathbf{A} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que los renglones i y j de $\mathbf{A}$ son iguales, y llámese $\mathbf{B}$ a la matriz que se obtiene de $\mathbf{A}$ al intercambiar los renglones i y j. Obviamente, $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, aunque por la Propiedad 2, se tiene que $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$. Por lo tanto, $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$ si dos renglones de $\mathbf{A}$ son iguales, y esto solamente es posible si $\det \mathbf{A} = 0$.

PROPIEDAD 4. $\det c\mathbf{A} = c^n \det \mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Es obvia.

PROPIEDAD 5. Sea $\mathbf{B}$ la matriz que se obtiene de $\mathbf{A}$ al multiplicar su renglón i por una constante c. Entonces $\det \mathbf{B} = c \det \mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Es obvia.

PROPIEDAD 6. Sea $\mathbf{A}^T$ la matriz que se obtiene de $\mathbf{A}$ al intercambiar renglones por columnas. La matriz $\mathbf{A}^T$ se conoce como la *transpuesta* de $\mathbf{A}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Una manera concisa de decirlo es $(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}$. Entonces

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que los productos que aparecen en la definición de $\det \mathbf{A}$ y $\det \mathbf{A}^T$ son los mismos, ya que siempre se elige un elemento de cada renglón y de cada columna. Sin embargo, la demostración de que estos productos tienen el mismo signo es muy difícil y no se incluye aquí. (Cada vez que el autor enseña determinantes a sus alumnos desearía ser un rey para poder declarar que la Propiedad 6 es verdadera por decreto.)

OBSERVACIONES. De las Propiedades 2, 3 y 6 se deduce inmediatamente que, al intercambiar dos columnas de $\mathbf{A}$, cambia el signo del determinante, y que $\det \mathbf{A} = 0$ si dos columnas de $\mathbf{A}$ son iguales.

PROPIEDAD 7. Si a un renglón de $\mathbf{A}$ se le suma un múltiplo de otro renglón de $\mathbf{A}$, entonces el valor del determinante no cambia.

DEMOSTRACIÓN. Primeramente, obsérvese que det**A** es función lineal de cada renglón de **A** por separado. Eso significa lo siguiente. Escríbase la matriz **A** en la forma

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}^2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ c\mathbf{a}^k \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = c\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^k \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} \tag{i}$$

y

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^k+\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^k \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}. \tag{ii}$$

Por ejemplo,

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 7 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ya que (4, 1,9) + (4, 2, −2) = (8, 3, 7). Con esto se ve que la ecuación (i) es la Propiedad 5. Para obtener la ecuación (ii), calcúlese

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k+\mathbf{b}\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} = \sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{1j_1}\ldots(a_{kj_k}+b_{j_k})\ldots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{1j_1}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{nj_n} + \sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} a_{1j_1}\ldots b_{j_k}\ldots a_{nj_n}$$

$$= \det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{b}\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix}.$$

Ahora bien, la Propiedad 7 se sigue inmediatamente de la ecuación (ii), ya que si **B** es la matriz que se obtiene de **A** al sumar c veces el renglón k de **A**, al renglón j de **A**, entonces

$$\det\mathbf{B} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^j+c\mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^j\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ c\mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} = \det\mathbf{A} + c\det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix}.$$

Pero se sabe que

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^k\\ \vdots\\ \mathbf{a}^n\end{bmatrix} = 0$$

ya que esta matriz tiene dos renglones iguales. Por tanto, $\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}$.

OBSERVACIÓN 1. Todo lo que se afirma acerca de los renglones es también válido para las columnas, ya que $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$. Así pues, no se cambia el valor del determinante cuando se suma un múltiplo de una columna a otra en **A**.

OBSERVACIÓN 2. El determinante es una función lineal de cada renglón de **A** por separado. No es función lineal de **A**, ya que, en general, se tiene que

$$\det c\mathbf{A} \neq c \det \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 0,$$

mientras que $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = 3 - 9 = -6$.

La Propiedad 7 es muy importante, pues permite reducir el problema de evaluar cualquier determinante, al problema mucho más sencillo de calcular el determinante de una matriz triangular superior. De hecho, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y $a_{11} \neq 0$, entonces es posible sumar un múltiplo adecuado del primer renglón de **A** a los renglones restantes de **A**, de modo que los valores resultantes $a_{21}, \ldots, a_{n1}$ sean todos iguales a cero. De manera similar, pueden sumarse múltiplos del segundo renglón resultante de **A** a los renglones de más abajo, de modo que los valores que resultan $a_{32}, \ldots, a_{n2}$ sean todos nulos, etcétera. El método se ilustra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3 Calcular

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Al restar dos veces el primer renglón del segundo; cuatro veces el primero del tercero; y el primero del último renglón, se obtiene que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ahora se resta cinco veces el segundo renglón de esta última matriz del tercer renglón, y tres veces el segundo renglón del cuarto. Entonces

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, sumando el tercer renglón de esta matriz al cuarto renglón, se obtiene que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= 4(-4)(-8) = 128.$$

(La alternativa podría haber sido intercambiar la tercera y cuarta columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

para obtener el mismo resultado.)

OBSERVACIÓN 1. Si $a_{11} = 0$ y $a_{j1} \neq 0$ para alguna j, entonces pueden intercambiarse el primer renglón y el j de $\mathbf{A}$ para garantizar que $a_{11} \neq 0$. (Por supuesto, que hay que acordarse de multiplicar el determinante por -1.) Si toda la primera columna de $\mathbf{A}$ es igual a cero, es decir, si $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$, entonces no es necesario continuar el procedimiento, pues en tal caso se tiene $\det \mathbf{A} = 0$.

OBSERVACIÓN 2. De la misma manera que se redujo la matriz $\mathbf{A}$ a una matriz triangular superior, puede reducirse el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

a un sistema equivalente de la forma

$$\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1\\ c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n&=d_2\\ &\vdots\\ c_{nn}x_n&=d_n. \end{aligned}$$

En la última ecuación se puede despejar x_n (si $c_{nn}\neq 0$), x_{n-1} en la ecuación $n-1$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 4 Encontrar todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ -x_1+x_2+x_3&=2\\ 2x_1-x_2+x_3&=3. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN. Al sumar la primera ecuación a la segunda y restar dos veces la primera de la tercera ecuación, se obtiene que

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=3\\ -3x_2-x_3&=1. \end{aligned}$$

Ahora bien, sumando 3/2 veces la segunda ecuación a la tercera,

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=3\\ 2x_3&=\tfrac{11}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_3=\frac{11}{4}$, $x_2=(3-\frac{11}{2})/2=-\frac{5}{4}$, y $x_1=1+\frac{5}{4}-\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS

1. Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}$$

tiene una solución única x_1, x_2, x_3 si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\neq 0.$$

Sugerencia: Despeje x_1 en términos de x_2 y x_3 de una de estas ecuaciones.

2. (a) Demuestre que el número total de permutaciones de los enteros 1, 2, ..., n es par.
(b) Demuestre que exactamente la mitad de dichas permutaciones son pares, y la otra mitad, impares.

En cada uno de los Problemas del 3 al 8 evalúe el determinante de la matriz dada.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

9. Pruebe, sin hacer cálculos, que

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e & b & h \\ d & a & g \\ f & c & k \end{bmatrix}.$$

En cada uno de los Problemas del 10 al 15 halle todas las soluciones del sistema dado de ecuaciones.

10. $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0 \\ 2x_1 \quad + \quad x_3&=14 \\ x_2+x_3&=13 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6 \\ x_1-x_2-x_3&=-4 \\ x_2+x_3&=-1 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0 \\ x_1-x_2-x_3&=0 \\ x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3-x_4&=1 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4&=1 \\ x_1+3x_2-3x_3-x_4&=1 \\ x_1+4x_2-4x_3-x_4&=1 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-x_4&=1 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4&=2 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4&=1 \\ -x_1-x_2-2x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x_1-\ x_2+x_3+\ x_4&=0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4&=0 \\ 3x_1+3x_2-x_3+7x_4&=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-\ x_4&=0 \end{aligned}$$

3.6 SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección se demostrará que el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

tiene solución única $\mathbf{x}$ si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Para ello se define el producto de dos matrices de $n \times n$ y se deducen algunas propiedades adicionales de los determinantes.

DEFINICIÓN. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices de $n \times n$ con elementos a_{ij} y b_{ij}, respectivamente. Se define su producto $\mathbf{AB}$ como la matriz $\mathbf{C}$ de $n \times n$ cuyo elemento ij, o sea c_{ij}, es el producto del renglón i de $\mathbf{A}$ y la columna j de $\mathbf{B}$. Es decir,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Dicho de otro modo, si se escribe $\mathbf{B}$ en la forma $\mathbf{B} = (\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^n)$, donde $\mathbf{b}^j$ es la columna j de $\mathbf{B}$, entonces el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puede expresarse en la forma $\mathbf{C} = (\mathbf{Ab}^1, \mathbf{Ab}^2, \ldots, \mathbf{Ab}^n)$, *ya que el componente i* del vector $\mathbf{Ab}^j$ es $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

EJEMPLO 1 Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluar $\mathbf{AB}$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+1 & -3-1+0 & 0+1+0 \\ 0+4-1 & 0-2+0 & 0+2+0 \\ 1+2-1 & -1-1+0 & 0+1+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ las matrices en el Ejemplo 1. Calcular $\mathbf{BA}$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 1-2+0 & -1-1+0 \\ 6+0+1 & 2-2+1 & -2-1+1 \\ -3+0+0 & -1+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN 1. Como indican los Ejemplos 1 y 2, no es cierto en general que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Sin embargo, es posible demostrar que

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{2}$$

para cualesquiera tres matrices **A**, **B** y **C** de $n \times n$. En la siguiente sección se ofrece una demostración muy sencilla de (2).

OBSERVACIÓN 2. Denótese por **I** la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

I se denomina *matriz identidad*, ya que $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ (Ejercicio 5) para toda matriz **A** de $n \times n$.

Las siguientes dos propiedades de los determinantes son extremadamente útiles en muchas aplicaciones.

PROPIEDAD 8.

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}.$$

Es decir, el determinante del producto es igual al producto de los determinantes.

PROPIEDAD 9. Denótese por $\mathbf{A}(i|j)$ la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de **A** al eliminar el renglón i y la columna j de **A**. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces,} \quad \mathbf{A}(2|3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Sea $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}(i|j)$. De modo que

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

para cualquier elección de j entre 1 y n. Este proceso de cálculo de determinantes se conoce como "desarrollo por elementos de columna" y la Propiedad 9 establece que no importa qué columna se elija para desarrollar. Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 9 & -1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Desarrollando con respecto a la primera, a la segunda, a la tercera y a la cuarta columnas de **A**, respectivamente, resulta

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 9 \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$+2\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -3\det\begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 2\det\begin{bmatrix} 9 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 9 & -1 & 7 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-3\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 9 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -6\det\begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} + 7\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-4\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} + 5\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Las Propiedades 8 y 9 se deducirán con la ayuda del siguiente lema.

LEMA 1. *Sea $D = D(\mathbf{A})$ una función que a cada matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ le asigna un número $D(\mathbf{A})$. Supóngase además que D es una función lineal de cada columna (renglón) de $\mathbf{A}$ por separado, es decir,*

$$D(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^j + c\mathbf{b}^j,\ldots,\mathbf{a}^n) = D(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{a}^j,\ldots,\mathbf{a}^n) + cD(\mathbf{a}^1,\ldots,\mathbf{b}^j,\ldots,\mathbf{a}^n),$$

y $D(\mathbf{B}) = -D(\mathbf{A})$, si $\mathbf{B}$ se obtiene de $\mathbf{A}$ intercambiando dos columnas (renglones) de $\mathbf{A}$. Entonces

$$D(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A} \times D(\mathbf{I}).$$

Una función D que a cada matriz de $n \times n$ le asigna un número, se dice que es *alternante* si $D(\mathbf{B}) = -D(\mathbf{A})$, siempre que $\mathbf{B}$ se obtenga de $\mathbf{A}$ intercambiando dos columnas (renglones) de $\mathbf{A}$. El Lema 1 señala que la propiedad de ser alternante y lineal en las columnas (renglones) de $\mathbf{A}$ caracteriza casi por completo a la función determinante $\det\mathbf{A}$. Dicho con más precisión, cualquier función $D(\mathbf{A})$ que es alternante y lineal en las columnas (renglones) de $\mathbf{A}$, debe ser un múltiplo de $\det\mathbf{A}$. Si además se cumple que $D(\mathbf{I}) = 1$, entonces $D(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}$ para todas las matrices $\mathbf{A}$ de $n \times n$. También se deduce inmediatamente del Lema 1 que si $D(\mathbf{A})$ es alternante y lineal en las columnas de $\mathbf{A}$, entonces también es alternante y lineal en los renglones de $\mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Primero escriba $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n)$ donde

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Al expresar $\mathbf{a}^1$ en la forma $a_{11}\mathbf{e}^1 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}^n$ se ve que

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) &= D\left(a_{11}\mathbf{e}^1 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}^n, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n\right) \\ &= a_{11} D(\mathbf{e}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) + \ldots + a_{n1} D(\mathbf{e}^n, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) \\ &= \sum_{j_1} a_{1j_1} D(\mathbf{e}^{j_1}, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n). \end{aligned}$$

De manera semejante, al escribir $\mathbf{a}^2$ en la forma $\mathbf{a}^2 = a_{12}\mathbf{e}^1 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}^n$ se ve que

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j_1, j_2} a_{1j_1} a_{2j_2} D(\mathbf{e}^{j_1}, \mathbf{e}^{j_2}, \mathbf{a}^3, \ldots, \mathbf{a}^n).$$

Procediendo por inducción,

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j_1, \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} D(\mathbf{e}^{j_1}, \mathbf{e}^{j_2}, \ldots, \mathbf{e}^{j_n}).$$

Ahora sólo se requiere sumar sobre todos los enteros $j_1, j_2, \ldots, j_n$ con $j_i \neq j_k$, ya que $D(\mathbf{A})$ es cero si dos de las columnas de $\mathbf{A}$ son iguales. Más aún

$$D(\mathbf{e}^{j_1}, \mathbf{e}^{j_2}, \ldots, \mathbf{e}^{j_n}) = \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} D(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n) = \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} D(\mathbf{I}).$$

Por lo tanto,

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j_1, \ldots j_n} \varepsilon_{j_1 \ldots j_n} a_{1j_1} \ldots a_{nj_n} D(\mathbf{I}) = \det \mathbf{A} \times D(\mathbf{I}). \qquad \square$$

Ahora es posible deducir las Propiedades 8 y 9.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8. Sea $\mathbf{A}$ una matriz fija de $n \times n$ y defínase la función $D(\mathbf{B})$ mediante la fórmula

$$D(\mathbf{B}) = \det \mathbf{AB}.$$

Obsérvese que $D(\mathbf{B})$ es alternante y lineal en las columnas $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ de $\mathbf{B}$. Esto es consecuencia de que las columnas de $\mathbf{AB}$ son $\mathbf{Ab}^1, \ldots, \mathbf{Ab}^n$. Por lo tanto, por el Lema 1.

$$D(\mathbf{B}) = \det \mathbf{B} \times D(\mathbf{I}) = \det \mathbf{B} \times \det \mathbf{AI} = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}. \qquad \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 9. Elíjase cualquier entero j entre 1 y n y defínase

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij},$$

donde $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}(i|j)$. Es fácil verificar que D es alternante y lineal en las columnas de $\mathbf{A}$. Por tanto, por el Lema 1,

$$D(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \times D(\mathbf{I}) = \det \mathbf{A}. \qquad \square$$

La clave para resolver el sistema de ecuaciones (1) es la observación importante de que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad k \neq j \tag{3}$$

donde $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}(i|j)$. La demostración de (3) es muy sencilla. Denótese por $\mathbf{B}$ la matriz que se obtiene de $\mathbf{A}$ al sustituir la columna j por la columna k, dejando el resto sin alterar. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad j=2, \qquad \text{y} \qquad k=3,$$

entonces,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, el determinante de $\mathbf{B}$ es cero, ya que dos de sus columnas son iguales. Por otro lado, desarrollando con respecto a la columna j de $\mathbf{B}$, se obtiene que

$$\det \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\hat{c}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\hat{c}_{ij}$$

donde

$$\hat{c}_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{B}(i|j) = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}(i|j) = c_{ij}.$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}c_{ij} = 0$ si k es diferente de j.

Ahora bien, siempre que se tiene una sumatoria desde 1 hasta n, que comprende los productos de términos con dos índices fijos j y k (como en (3)), se trata de expresar como el elemento jk del producto de dos matrices. Si se denota por $\mathbf{C}$ la matriz cuyo elemento ij es c_{ij}, y se hace

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} \equiv \mathbf{C}^T,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{adj} \mathbf{A})_{ji} a_{ik} = (\operatorname{adj} \mathbf{A} \times \mathbf{A})_{jk}.$$

Por lo tanto, de (3) se obtiene que

$$(\operatorname{adj} \mathbf{A} \times \mathbf{A})_{jk} = 0 \quad \text{para} \quad j \neq k.$$

Combinando estos dos resultados con la siguiente igualdad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = (\operatorname{adj} \mathbf{A} \times \mathbf{A})_{jj},$$

resulta que

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\det\mathbf{A} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det\mathbf{A} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \det\mathbf{A}\end{bmatrix}=(\det\mathbf{A})\mathbf{I}. \tag{4}$$

De manera similar, trabajando con $\mathbf{A}^T$ en vez de con $\mathbf{A}$ (Ejercicio 8) se ve que

$$\mathbf{A}\times\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\det\mathbf{A} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det\mathbf{A} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \det\mathbf{A}\end{bmatrix}=(\det\mathbf{A})\mathbf{I}. \tag{5}$$

EJEMPLO 3 Sea

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Calcular adj $\mathbf{A}$ y verificar directamente las igualdades (4) y (5).

SOLUCIÓN.

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

de modo que

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{A}\times\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\mathbf{I}.$$

Ahora bien, $\det\mathbf{A} = 1 - 2 + 1 + 2 = 2$. Por tanto,

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}\times\operatorname{adj}\mathbf{A}=(\det\mathbf{A})\mathbf{I}.$$

Ahora es posible retomar el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Si $\mathbf{A}$ fuera un número diferente de cero en vez de una matriz, se dividirían ambos miembros de (6) entre $\mathbf{A}$ para obtener $\mathbf{x} = \mathbf{b}/\mathbf{A}$. Por supuesto que esta expresión no

tiene sentido si $\mathbf{A}$ es una matriz. Sin embargo, hay una manera de obtener la solución $\mathbf{x} = \mathbf{b}/\mathbf{A}$ que se generaliza al caso cuando $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. De hecho, si el número $\mathbf{A}$ fuera diferente de cero, entonces sería posible multiplicar ambos lados de (6) por el número $\mathbf{A}^{-1}$ a fin de obtener

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Ahora bien, si puede definirse $\mathbf{A}^{-1}$ como una matriz de $n \times n$ cuando $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, entonces la expresión $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ tendría cabal sentido. Esto lleva a formular las dos preguntas siguientes.

Pregunta 1: Dada una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, ¿existirá otra matriz de $n \times n$, a la cual se le llamará $\mathbf{A}^{-1}$, con la propiedad de que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}?$$

Pregunta 2: Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, ¿se podrá garantizar que es única? Es decir, ¿es posible que existan dos matrices *diferentes* $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ con la propiedad de que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{CA} = \mathbf{AC} = \mathbf{I}?$$

En los Teoremas 7 y 8 se dan las respuestas a estas preguntas.

TEOREMA 7. *Una matriz* $\mathbf{A}$ *de* $n \times n$ *tiene a lo sumo una inversa.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\mathbf{A}$ tiene dos inversas diferentes. Entonces hay dos matrices distintas $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ con la propiedad de que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}.$$

Si se multiplican por $\mathbf{B}$ ambos lados de la ecuación $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, se obtiene que

$$\mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}.$$

Por lo tanto, $B = \mathbf{C}$, lo cual es una contradicción □

TEOREMA 8. $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si $\det\mathbf{A} \neq 0$, y en tal caso

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\operatorname{adj}\mathbf{A}. \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\det\mathbf{A} \neq 0$. Entonces es posible dividir entre $\det\mathbf{A}$ ambos miembros de las igualdades (4) y (5) para obtener que

$$\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} \times \mathbf{A} = \mathbf{I} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathbf{A} \times \operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{A} \times \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{adj}\mathbf{A}/\det\mathbf{A}$.

Recíprocamente, supóngase que $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Al aplicar determinantes en ambos lados de la ecuación $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y utilizando la Propiedad 8, se obtiene

$$(\det\mathbf{A}^{-1})\det\mathbf{A} = \det\mathbf{I} = 1.$$

Y esta ecuación implica que $\det\mathbf{A}$ es diferente de cero.

Por último, supóngase que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Entonces $\mathbf{A}^{-1}$ existe, y multiplicando ambos lados de (6) por esta matriz,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Por lo tanto, si existe una solución, debe ser $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Más aún, este vector es una solución de (6), ya que

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{I}\mathbf{b}=\mathbf{b}.$$

Así pues, la ecuación (6) tiene una solución única $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ si $\det \mathbf{A} \neq 0$.

EJEMPLO 4 Hallar las soluciones de la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

SOLUCIÓN.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}=24.$$

Por lo tanto, la ecuación (8) tiene la solución *única* $\mathbf{x}$. Pero

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es obviamente una solución. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es la única solución de (8).

OBSERVACIÓN 1. Con frecuencia, es muy laborioso calcular la inversa de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ a partir de la ecuación (7). Esto es cierto en particular si $n \leq 4$. La alternativa mucho más eficiente es calcular $\mathbf{A}^{-1}$, por medio de "operaciones elementales de renglones".

DEFINICIÓN. Una operación elemental de renglones en una matriz $\mathbf{A}$ es uno de los procesos siguientes:

(i) el intercambio de dos renglones,
(ii) la multiplicación de un renglón por un número diferente de cero, o
(iii) la suma de un múltiplo de un renglón a otro.

Es posible mostrar que cualquier matriz $\mathbf{A}$, con $\det \mathbf{A} \neq 0$, puede ser transformada en la de identidad $\mathbf{I}$ mediante la aplicación sucesiva de dichas operaciones. Más aún,

si la misma sucesión de operaciones se aplica a **I**, entonces se transforma en $\mathbf{A}^{-1}$. El método se ilustrará en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Encontrar la inversa de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. La matriz **A** puede transformarse en **I** por medio de la siguiente sucesión de operaciones elementales de renglones. El resultado, después de cada paso, aparece abajo de la operación realizada.

(a) Para obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal de la primera columna, se resta el primer renglón tanto del segundo como del tercero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Para obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal de la segunda columna se suma (-2) veces el segundo renglón al tercero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Para obtener un 1 en la posición diagonal de la tercera columna, se multiplica el tercer renglón por ½.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Por último para obtener ceros en las posiciones fuera de la diagonal en la tercera columna, se suma el tercer renglón al primero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se realiza la misma sucesión de operaciones elementales de renglones sobre **I**, se obtiene la siguiente sucesión de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

La última de estas matrices es $\mathbf{A}^{-1}$.

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 4, calcule **AB** y **BA** para las matrices dadas **A** y **B**.

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 9\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 6 & 2\end{pmatrix}$ **2.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **4.** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}$

5. Demuestre que **IA** = **A** para cualquier matriz **A**.

6. Demuestre que dos matrices diagonales cualesquiera **A** y **B** *se conmutan*, es decir, **AB** = **BA** si **A** y **B** son matrices diagonales.

7. Suponga que **AD** = **DA** para cualquier matriz **A**. Pruebe que **D** es un múltiplo de la matriz identidad.

8. Demuestre que **A** × adj **A** = det **A** × **I**.

En cada uno de los Problemas del 9 al 14 halle la inversa de la matriz dada, si existe.

9. $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 6 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & i & -i\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix}1 & 1+i & 1-i\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

15. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$

si det **A** ≠ 0.

16. Demuestre que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ si det **A** × det **B** ≠ 0.

Prueba en cada uno de los problemas del 17 al 20 que **x** = **0** es la única solución del sistema dado de ecuaciones.

17.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0\\ x_2 + x_3 &= 0\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0\\ -x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= 0\\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 0\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

3.7 TRANSFORMACIONES LINEALES

En la sección anterior se trató el problema de resolver la ecuación

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

preguntándose si existía la matriz $\mathbf{A}^{-1}$. El estudio llevó a la conclusión de que la ecuación (1) tiene una solución única $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Para determinar qué ocurre cuando $\det \mathbf{A} = 0$ se analizará ahora, con otro enfoque, el problema de resolver la ecuación (1). De hecho, se estudiará el conjunto $\mathbf{V}$ de vectores que se obtienen al multiplicar por $\mathbf{A}$ cualquier vector de R^n, y se verá si $\mathbf{b}$ se encuentra en este conjunto. Obviamente, la ecuación (1) tiene al menos una solución $\mathbf{x}$ si, y sólo si, $\mathbf{b}$ está en $\mathbf{V}$. Se iniciará con el siguiente lema que, aunque sencillo, es muy útil.

LEMA 1. *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz de* $n \times n$ *con elementos* a_{ij}, *y sea* $\mathbf{x}$ *un vector con componentes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Denótese la columna* j *de* $\mathbf{A}$ *por*

$$\mathbf{a}^j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{Ax}=x_1\mathbf{a}^1+x_2\mathbf{a}^2+\ldots+x_n\mathbf{a}^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Se mostrará que los vectores $\mathbf{Ax}$ y $x_1\mathbf{a}^1 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n$ tienen los mismos componentes. Para ello, obsérvese que $(\mathbf{Ax})_j$, la componente j de $\mathbf{Ax}$ es $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$, mientras que la componente j del vector $x_1\mathbf{a}^1 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n$ es

$$x_1\mathbf{a}_j^1+\ldots+x_n\mathbf{a}_j^n=x_1a_{j1}+\ldots+x_na_{jn}=(\mathbf{Ax})_j.$$

Por lo tanto,

$$Ax = x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_na^n \qquad \square$$

Ahora denótese por $\mathbf{V}$ al conjunto de vectores que se obtiene al multiplicar cada uno de los vectores $\mathbf{x} \in R^n$ por la matriz $\mathbf{A}$. Del Lema 1 se sigue inmediatamente que $\mathbf{V}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$, es decir, $\mathbf{V}$ es generado por las columnas de $\mathbf{A}$. Por lo tanto, la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene una solución si, y sólo si, $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. Con la ayuda de esta observación puede demostrarse ahora el siguiente teorema.

TEOREMA 9. (a) *La ecuación* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene una solución única si las columnas de* $\mathbf{A}$ *son linealmente independientes.*

(b) La ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *no tiene solución, o bien tiene un número infinito de soluciones si las columnas de* $\mathbf{A}$ *son linealmente dependientes.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Supóngase que las columnas de **A** son linealmente independientes. Entonces $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ forman una base para R^n. En particular cualquier vector **b** puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$. En consecuencia, la Ecuación (1) tiene al menos una solución. Para demostrar exactamente esto último, se hará ver que cualesquiera dos soluciones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

deben ser iguales. Para ello, obsérvese que si **x** y **y** son dos soluciones de (1), entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, por el Lema 1,

$$(x_1 - y_1)\mathbf{a}^1 + (x_2 - y_2)\mathbf{a}^2 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{a}^n = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Pero esto implica que $x_1 = y_1$, $x_2 = y_h$, ..., y $x_n = y_n$, ya que $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ son linealmente independientes. En consecuencia se tiene $x = \mathbf{y}$.

(b) Si las columnas de **A** son linealmente dependientes, entonces puede elegirse un subconjunto $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ de vectores linealmente dependientes que también generen a **V** (Ejercicio 12 de la Sección 3.3). Según esto, se tiene entonces que la dimensión del espacio **V** es a lo sumo $n - 1$. En otras palabras, el espacio **V** es diferente de R^n y más pequeña que él. Por lo tanto, hay vectores en R^n que no están en **V**. Si **b** es uno de estos vectores, entonces obviamente la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ no tiene solución. Por otro lado, si **b** está en **V**, es decir, si existe al menos un vector $\mathbf{x}^*$ tal que $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$, entonces la Ecuación (1) tiene un número infinito de soluciones. Para demostrarlo, obsérvese primero que ciertamente $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ es una solución de (1). Además nótese que si $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$ para algún vector ξ en R^n, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \xi$ también es una solución de (1), ya que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \xi) = \mathbf{Ax}^* + \mathbf{A}\xi = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Por último, hay que observar que existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todos iguales a cero, y que $c_1\mathbf{a}^1 + c_2\mathbf{a}^2 + \ldots + c_n\mathbf{a}^n = \mathbf{0}$. Por lo tanto, por el Lema 1 se tiene que $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$, donde

$$\xi = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Pero si $\mathbf{A}\xi$ es igual a cero, entonces $\mathbf{A}(\alpha\xi)$ también es nulo para cualquier constante α. Así pues, hay una infinidad de vectores ξ con la propiedad de que $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$. Por lo tanto, la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene un número infinito de soluciones. □

EJEMPLO 1 (a) ¿Para qué vectores de la forma

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

es posible reolver la siguiente ecuación?

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{b}?$$

(b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. (a) Las columnas de la matriz **A** son

$$\mathbf{a}^1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}^2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}^3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $\mathbf{a}^1$ y $\mathbf{a}^2$ son linealmente independientes, mientras que $\mathbf{a}^3$ es la suma de $\mathbf{a}^1$ y $\mathbf{a}^2$. Por lo tanto, es posible resolver la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si y sólo si

$$\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 \\ c_1 \\ 2c_1+c_2 \end{bmatrix}$$

para algún par de constantes c_1 y c_2. De igual manera (Ejercicio 25) si $b_3 = b_1 + b_2$. $b_1 + b_2$.

(b) Considérense las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3&=0 \\ x_1 \quad + \ x_3&=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3&=0. \end{aligned}$$

Hay que notar que la tercera ecuación es la suma de las primeras dos. Por lo tanto, basta considerar solamente las primeras dos ecuaciones. La segunda implica que $x_1 = -x_3$. Al sustituir este valor de x_1 en la primera ecuación se obtiene que $x_2 = -x_3$. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ son de la forma

$$\mathbf{x}=c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Primero obsérvese que

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una solución de la ecuación. Sea $\mathbf{x}^2$ cualquier otra solución de la ecuación. Se deduce de inmediato que $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \xi$, donde ξ es una solución de la ecuación homogénea $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Más aún, la suma de cualquier solución de la ecuación no homogénea

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con una solución de la ecuación homogénea, es a su vez solución de la ecuación no homogénea. Por lo tanto, cualquier solución de la ecuación

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El Teorema 9 es muy útil ya que establece condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tenga solución única. Sin embargo, con frecuencia es difícil aplicar el Teorema 9, ya que es difícil determinar si n vectores son linealmente dependientes o independientes. Por fortuna se puede relacionar la pregunta de si las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes o independientes, con el problema más sencillo de ver si el determinante de $\mathbf{A}$ es cero o no. Hay varias maneras de hacerlo. En esta sección se presenta un método más complejo que utiliza el concepto de transformación lineal.

DEFINICIÓN. Una transformación lineal $\mathcal{A}$ de R^n en R^n es una función que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ en R^n un nuevo vector llamado $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$. Más aún, la asociación cumple las siguientes reglas:

$$\mathcal{A}(c\mathbf{x}) = c\mathcal{A}(\mathbf{x}) \tag{i}$$

y

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}). \tag{ii}$$

EJEMPLO 2 La transformación

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es claramente una transformación lineal R^n en R^n, ya que

$$\mathcal{C}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x} = c\mathcal{C}(\mathbf{x})$$

y

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{y}).$$

EJEMPLO 3 La transformación

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

es una transformación lineal de R^3 en R^3, ya que

$$\mathcal{C}(c\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} cx_1 + cx_2 + cx_3 \\ cx_1 + cx_2 - cx_3 \\ cx_1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = c\mathcal{C}(\mathbf{x})$$

y

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3) \\ (x_1+y_1) + (x_2+y_2) - (x_3+y_3) \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 - y_3 \\ y_1 \end{bmatrix} = \mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{y}).$$

EJEMPLO 4 Sea $\mathcal{C}$ el punto que se obtiene de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ al girarlo 30° en dirección contraria a las manecillas del reloj. La intuición indica que cualquier rotación es una transformación lineal. Sin embargo, si el lector aún no se convence de ello, calcule

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x_2 \end{bmatrix}$$

y verifique entonces directamente que $\mathcal{C}$ es una transformación lineal de R^2 en R^2.

EJEMPLO 5 La transformación

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

es de R^2 en R^2, pero no es lineal, pues

$$\mathcal{C}(2\mathbf{x}) = \mathcal{C}(2x_1, 2x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4x_1^2 + 4x_2^2 \end{pmatrix} \neq 2\mathcal{C}(\mathbf{x}).$$

Ahora bien, toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ define de manera natural una transformación lineal de R^n en R^n. De hecho, considérese la transformación de R^n en R^n definida por

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

En la Sección 3.1 se mostró que $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$. Por lo tanto, la asociación $\mathbf{x} \to \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es lineal. Recíprocamente, cualquier transformación lineal $\mathcal{Q}$ de R^n en R^n debe ser de la forma $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para alguna matriz $\mathbf{A}$. Eso constituye el contenido del siguiente teorema:

TEOREMA 10. *Cualquier transformación lineal* $\mathbf{x} \to \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ *de* R^n *en* R^n *debe ser de la forma* $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. *En otras palabras, dada cualquier transformación lineal* $\mathcal{Q}$ *de* R^n *en* R^n, *es posible encontrar una matriz* $\mathbf{A}$ *de* $n \times n$, *tal que*

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

para toda $\mathbf{x}$.

DEMOSTRACIÓN. Denótese por $\mathbf{e}^j$ al vector cuya componente j es uno y cuyas demás componentes son iguales a cero, y tómese

$$\mathbf{a}^j = \mathcal{Q}(\mathbf{e}^j).$$

se afirma que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) \tag{3}$$

para toda

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

en R^n. Para demostrarlo, obsérvese que cualquier vector $\mathbf{x}$ puede escribirse en la forma $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}^1 + \ldots + x_n\mathbf{e}^n$. Por lo tanto, por la linealidad de $\mathcal{Q}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\mathbf{x}) &= \mathcal{Q}(x_1\mathbf{e}^1 + \ldots + x_n\mathbf{e}^n) = x_1\mathcal{Q}(\mathbf{e}^1) + \ldots + x_n\mathcal{Q}(\mathbf{e}^n) \\ &= x_1\mathbf{a}^1 + \ldots + x_n\mathbf{a}^n = \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1. La manera más sencilla de evaluar una transformación lineal $\mathcal{Q}$ es calcular $\mathbf{a}^1 = \mathcal{Q}(\mathbf{e}^1), \ldots, \mathbf{a}^n = \mathcal{Q}(\mathbf{e}^n)$ y después observar que, según el Teorema 10 y el Lema 1, $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n)$. Así pues, para evaluar la transformación lineal del Ejemplo 4, se observa que, en una rotación de 30° en sentido contrario al del reloj, el punto (1, 0) se transforma en el punto $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, y el punto (0, 1) en el punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. De modo que cualquier punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ se transforma en el punto

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_2 \end{bmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 2. Si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{B}$ son transformaciones lineales de R^n en R^n, entonces la composición $\mathcal{Q} \circ \mathcal{B}$ definida por la relación

$$\mathcal{Q} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

es de nuevo una transformación lineal de R^n en R^n. Para demostrarlo, obsérvese que

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(c\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(c\mathbf{x})) = \mathcal{A}(c\mathcal{B}(\mathbf{x})) = c\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$
$$= c\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x})$$

y

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}))$$
$$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{y})) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{y}).$$

Más aún, es muy fácil mostrar (Ejercicio 15) que si $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ y $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$, entonces

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx}. \tag{4}$$

De manera similar, si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son tres transformaciones lineales de R^n en R^n con $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$ y $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx}$, entonces

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathbf{AB})\mathbf{Cx} \tag{5}$$

y

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{BC})\mathbf{x}. \tag{6}$$

Ahora bien, claramente se cumple que $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(\mathbf{x})$. Por lo tanto, se tiene que

$$(\mathbf{AB})\mathbf{Cx} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})\mathbf{x}$$

para cualquier vector $\mathbf{x}$ en R^n. Esto implica que (Ejercicio 14)

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

para cualesquiera tres matrices **A**, **B** y **C** de $n \times n$.

En la mayoría de las aplicaciones es deseable, y muchas veces esencial, que exista la inversa de una transformación lineal. La interpretación heurística es que la inversa de una transformación $\mathcal{A}$ deshace lo efectuado por $\mathcal{A}$. Es decir, si $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, entonces la transformación inversa aplicada a $\mathbf{y}$ debe producir $\mathbf{x}$. Dicho con más precisión, se define $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ como el único elemento $\mathbf{x}$ en R^n para el cual $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Por supuesto, que la transformación $\mathcal{A}^{-1}$ puede no existir. Es posible que haya algunos vectores $\mathbf{y}$ con la propiedad de que $\mathbf{y} \neq \mathcal{A}(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x}$ en R^n. O bien, puede haber algunos vectores $\mathbf{y}$ que provienen de más de una $\mathbf{x}$, es decir, $\mathcal{A}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{y}$ y $\mathcal{A}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{y}$. En ambos casos, la transformación $\mathcal{A}$ no tiene inversa. De hecho, es claro que $\mathcal{A}$ tiene una inversa, a la cual se le llamará $\mathcal{A}^{-1}$ si y sólo si la ecuación $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene una solución única $\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{y} \in R^n$. Además es claro que si $\mathcal{A}$ es una transformación lineal y $\mathcal{A}^{-1}$ existe, entonces $\mathcal{A}^{-1}$ también debe ser lineal. Para demostrarlo, obsérvese primero que $\mathcal{A}^{-1}(c\mathbf{y}) = c\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$, ya que $\mathcal{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{y}$ si $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Adviértase también que $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}^1 + \mathbf{y}^2) = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}^1) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}^2)$, ya que $\mathcal{A}(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = \mathbf{y}^1 + \mathbf{y}^2$ si $\mathcal{A}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{y}^1$ y $\mathcal{A}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{y}^2$. Así pues en caso de que $\mathcal{A}^{-1}$ exista, debe ser lineal.

En este momento el lector sentirá que hay una conexión estrecha entre la transformación lineal $\mathcal{A}^{-1}$ y la matriz $\mathbf{A}^{-1}$. Eso es el contenido del siguiente lema.

LEMA 2. *Sea* **A** *una matriz de* $n \times n$ *y sea* $\mathcal{A}$ *una transformación lineal definida por la ecuación* $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. *Entonces* $\mathcal{A}$ *tiene una inversa si, y sólo si, la matriz* **A** *tiene una inversa. Más aún, si* $\mathbf{A}^{-1}$ *existe, entonces* $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\mathcal{A}^{-1}$ existe. Es claro que

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \tag{7}$$

y que $\mathcal{A}^{-1}$ es lineal. Además, existe una matriz **B** con la propiedad de que $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Por lo tanto, se tiene a partir de (4) y (7) que

$$\mathbf{ABx} = \mathbf{BAx} = \mathbf{x}$$

para toda $\mathbf{x}$ en R^n. Y esto implica de inmediato que (Ejercicio 14)

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

Recíprocamente, supóngase ahora que $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Entonces la ecuación

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

tiene una solución única $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ para toda $\mathbf{y}$ en R^n. Así pues, $\mathbf{A}^{-1}$ también existe.

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$$ □

Ahora ya hay condiciones para relacionar el problema de determinar si las columnas de una matriz **A** de $n \times n$ son linealmente dependiente o independientes, con el problema mucho más sencillo de ver si el determinante de **A** es igual o diferente de cero.

LEMA 3. *Las columnas de una matriz* **A** *de* $n \times n$ *son linealmente independientes si y sólo si,* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se probará el Lema 3 con ayuda del siguiente argumento que, aunque complejo, es muy ingenioso.

(1) Las columnas de **A** son linealmente independientes si y sólo si la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única $\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{b}$ en R^n. Lo establecido es sólo una reformulación del Teorema 9.
(2) De acuerdo con las observaciones que precedieron al Lema 2, se concluye que la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única para toda $\mathbf{b}$ si y sólo si la transformación lineal $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ tiene una inversa.
(3) Según el Lema 2, la transformación lineal $\mathcal{A}$ tiene una inversa si, y sólo si existe la matriz $\mathbf{A}^{-1}$.
(4) Por último, la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Esto es el contenido del Teorema 8, de la Sección 3.6. Por lo tanto, se concluye que las columnas de **A** son linealmente independientes si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. □

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 11. *La ecuación* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene solución única* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ *si* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *La ecuación* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *no tiene solución, o bien tiene un número infinito de soluciones si* $\det \mathbf{A} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 11 se sigue inmediatamente después del Teorema 9 y el Lema 3. □

COROLARIO. *La solución* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *tiene una solución no trivial (es decir, una solución*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde no todas las x_i *son iguales a cero) si y sólo si,* $\det \mathbf{A} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

siempre es una solución de la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, es la única solución si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Por otro lado, si $\det \mathbf{A} = 0$, entonces existe un número infinito de soluciones y todas, excepto una de ellas son no triviales. □

EJEMPLO 6 ¿Para qué valores de λ tiene una solución no trivial la siguiente ecuación?

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

SOLUCIÓN.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \lambda + \lambda - 1 - \lambda = \lambda - 1.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial si, y sólo si, $\lambda = 1$.

OBSERVACIÓN 1. Todo lo que se ha dicho acerca de la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se aplica de igual manera cuando los elementos de $\mathbf{A}$ y las componentes de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son números complejos. En tal caso se interpreta a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{b}$ como vectores en C^n y la matriz $\mathbf{A}$ se interpreta como una transformación lineal de C^n sobre sí mismo.

OBSERVACIÓN 2. Supóngase que se desea determinar n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La idea intuitiva es que se necesitan n ecuaciones que se satisfagan para dichas incógnitas. Ciertamente ese es el caso si se tienen n ecuaciones lineales de la forma

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

y $\det \mathbf{A} \neq 0$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la intuición parecería fallar cuando $\det \mathbf{A} = 0$. Sin embargo, no es así. De hecho, si $\det \mathbf{A} = 0$, entonces las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes. Pero entonces las columnas de $\mathbf{A}^T$, que son los renglones de $\mathbf{A}$, también son linealmente dependientes, pues $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$. En consecuencia, alguno de los renglones de $\mathbf{A}$ es una combinación lineal de los renglones restantes. Ahora bien, ello implica que el primer miembro de alguna de las ecuaciones de (9), es una combinación lineal de los restantes primeros miembros. Llámese k a la posición de dicha ecuación. Obviamente, la ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ no tiene solución si b_k no es exactamente la misma combinación lineal de $b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_n$. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

obviamente no tiene soluciones. Por otro lado, si b_k es la misma combinación lineal de $b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_n$, entonces la ecuación k es redundante. En tal caso, se tienen entonces solamente $n - 1$ ecuaciones para las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

OBSERVACIÓN 3. Una vez que se ha introducido el concepto de transformación lineal, ya no es necesario considerar una matriz de $n \times n$ como un arreglo bidimensional de números. Más bien, puede pensarse ahora en una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ que induce una transformación lineal $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ en $\mathbb{R}^n$. La ventaja de este enfoque es que es posible deducir algunas propiedades de la matriz $\mathbf{A}$, al encontrar las propiedades equivalentes de la transformación lineal $\mathcal{A}$. Por ejemplo, se demostró que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ para cualesquiera tres matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ de $n \times n$ viendo que las transformaciones lineales inducidas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ satisfacen la relación $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})$. Ahora bien, es posible demostrar el mismo resultado directamente, pero ello requiere de mucho más trabajo (Ejercicio 24).

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 3, halle todos los vectores $\mathbf{b}$ para los cuales el sistema dado de ecuaciones tiene una solución.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 8 & 12 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

3. $\begin{pmatrix} 11 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

En cada uno de los Problemas del 4 al 9, encuentre todas las soluciones del sistema dado de ecuaciones.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En cada uno de los Problemas del 10 al 12, determine todos los valores de λ para los cuales el sistema de ecuaciones dado tiene una solución no trivial.

10. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$

12. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & \lambda & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}.$

13. (a) ¿Para qué valores de λ tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre todas las soluciones para dicho valor λ.

14. Suponga que $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}$ para todo vector

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

15. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos transformaciones lineales de R^n en R^n. Entonces existen matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$, tales que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ y $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$. Demuestre que $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx}$. *Observación:* $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ es una transformación lineal de R^n en R^n. Por lo tanto, existe una matriz $\mathbf{C}$ de $n \times n$ tal que $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx}$. La columna j de $\mathbf{C}$ es $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{e}^j)$. Demuestre entonces que $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\mathbf{e}^j)$ es la columna j de la matriz $\mathbf{AB}$.

16. Sea $\mathcal{A}$ una transformación lineal de R^n en R^n. Demuestre que $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

17. Sea $\mathcal{R}(\theta)$ la transformación lineal que rota los puntos del plano en un ángulo θ en dirección contraria a las manecillas del reloj. Demuestre que

$$\mathcal{R}(\theta)(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

18. Sea $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ las transformaciones lineales que rotan los puntos del plano en ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente. Entonces la transformación lineal $\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ rota los puntos del plano en un ángulo $\theta_1 + \theta_2$ (en dirección contraria a las manecillas del reloj). Usando el Ejercicio 15, pruebe que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\text{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

y con ello, deduzca las siguientes igualdades trigonométricas.

$$\text{sen}(\theta_1+\theta_2) = \text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\text{sen}\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2.$$

19. Sea

$$\mathcal{Q}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que $\mathcal{Q}$ es lineal.
(b) Demuestre que todos los puntos (x_1, x_2) en la circunferencia unitaria $x_1^2 + x_2^2 = 1$ son transformados en puntos en la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

20. Sea **V** el espacio de todos los polinomios de grado menor que o igual a 3, defina $(Dp)(t) = dp(t)/dt$.
(a) Demuestre que D es una transformación lineal de **V** en **V**.
(b) Demuestre que D no tiene inversa.

21. Sea **V** el espacio de todas las funciones continuas $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, y defina $(Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds$.
(a) Pruebe que K es una transformación lineal de **V** en **V**.
(b) Pruebe que $(DK)f = f$ donde $Df = f'$.
(c) Sea $f(t)$ una función derivable. Demuestre que

$$[(KD)f](t) = f(t) - f(0).$$

22. Se dice que una transformación lineal $\mathcal{Q}$ es 1 a 1 si $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \neq \mathcal{Q}(\mathbf{y})$ siempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. En otras palabras, no es posible que dos vectores diferentes se transformen en el mismo bajo $\mathcal{Q}$. Demuestre que $\mathcal{Q}$ es 1 a 1 si y sólo si $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

23. Se dice que una transformación lineal es *suprayectiva* si la ecuación $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ tiene al menos una solución para toda $\mathbf{y}$ en R^n. Demuestre que $\mathcal{Q}$ es suprayectiva si y sólo si $\mathcal{Q}$ es 1 a 1. *Sugerencia:* Muestre primero que $\mathcal{Q}$ es suprayectiva si y sólo si los vectores $\mathcal{Q}(\mathbf{e}^1), \ldots, \mathcal{Q}(\mathbf{e}^n)$ son linealmente independientes. Use entonces el Lema 1 para hacer ver que si $\mathcal{Q}(\mathbf{e}^1), \ldots, \mathcal{Q}(\mathbf{e}^n)$ son linealmente dependientes, entonces es posible encontrar una solución diferente de cero de la ecuación $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Por último, pruebe que $\mathcal{Q}(\mathbf{e}^1), \ldots, \mathcal{Q}(\mathbf{e}^n)$ son linealmente dependientes si la ecuación $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 0$ tiene solución diferente de cero.

24. Demuestre directamente que $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. *Sugerencia:* Pruebe que las dos matrices tienen los mismos elementos.

25. Demuestre que

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si $b_3 = b_1 + b_2$.

3.8 MÉTODO DE VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS PARA OBTENER SOLUCIONES

Considérese nuevamente la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

El objetivo es encontrar n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$. Recordando que tanto la ecuación escalar lineal homogénea de primer orden como la de segundo orden tienen funciones exponenciales como soluciones, se sugiere intentar $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ un vector constante, como solución de (1). Para ello, obsérvese que

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\mathbf{v}=\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

y

$$\mathbf{A}(e^{\lambda t}\mathbf{v})=e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución de (1) si y sólo si $\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}$. Al dividir ambos lados de la ecuación entre $e^{\lambda t}$ se obtiene

$$\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}. \tag{2}$$

Así pues, $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución de (1) si y sólo si λ y $\mathbf{v}$ satisfacen (2).

DEFINICIÓN. Un vector $\mathbf{v}$ diferente de cero que satisface (2) se denomina un *vector característico* (o *eigenvector*) de $\mathbf{A}$ con *valor característico* (o *eigenvalor*) λ.*

OBSERVACIÓN. Se excluye al vector $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ debido a que no interesa. Obviamente, se cumple que $\mathbf{A}\mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}$ para cualquier número λ.

Un vector característico o eigenvector de una matriz $\mathbf{A}$ es un vector muy especial; bajo la transformación lineal $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}$, dicho vector convierte en un múltiplo λ de él

* (**N. del R.**) Es usual en inglés y en español servirse de los términos híbridos *eigenvector* y *eigenvalue*, o *eigenvector* y *eigenvalor*, donde interviene como prefijo el término *eigen* del alemán (= propio o característico). Las palabras alemanas para los conceptos matemáticos son *Eigenvektor* y *Eigenwert*, respectivamente.

mismo. Los vectores que son transformados en múltiplos de sí mismos desempeñan un papel importante en muchas aplicaciones. Con objeto de encontrar tales vectores, se escribe la ecuación (2) en la forma

$$\mathbf{0}=\mathbf{A}\mathbf{v}-\lambda\mathbf{v}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}. \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene una solución $\mathbf{v}$ diferente de cero solamente si $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\mathbf{0}$. Por lo tanto, los valores característicos o eigenvalores λ de $\mathbf{A}$ son las raíces de la ecuación

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix},$$

y los vectores característicos de $\mathbf{A}$ son las soluciones diferentes de cero de las ecuaciones $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$, para dichos valores λ.

El determinante de la matriz $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ es claramente un polinomio de grado n en λ, con término de mayor potencia igual a $(-1)^n\lambda^n$. Es frecuente llamarlo *polinomio característico* de $\mathbf{A}$ y denotarlo por $p(\lambda)$. Para cada raíz λ_j de $p(\lambda)$, es decir, para cada número λ_j tal que $p(\lambda_j)=0$, existe al menos un vector $\mathbf{v}^j$ distinto de cero, tal que $\mathbf{A}\mathbf{v}^j=\lambda_j\mathbf{v}^j$. Ahora bien, todo polinomio de grado ≥ 1 tiene al menos una raíz (posiblemente compleja). Por lo tanto, toda matriz tiene al menos un valor característico, y en consecuencia, al menos un vector característico. Por otro lado, $p(\lambda)$ tiene a lo más n raíces distintas. De modo que toda matriz de $n\times n$ tiene a lo sumo n valores característicos. Obsérvese, por último, que toda matriz de $n\times n$ tiene cuando mucho n vectores característicos linealmente independientes, pues el espacio de todos los vectores

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

tiene dimensión n.

OBSERVACIÓN. Sea $\mathbf{v}$ un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ. Obsérvese que

$$\mathbf{A}(c\mathbf{v})=c\mathbf{A}\mathbf{v}=c\lambda\mathbf{v}=\lambda(c\mathbf{v})$$

para cualquier constante c. Por lo tanto, cualquier múltiplo $(c\neq 0)$ de un eigenvector de $\mathbf{A}$ es también un eigenvector de $\mathbf{A}$, con el mismo valor característico.

Para cada eigenvector $\mathbf{v}^j$ de $\mathbf{A}$ con valor característico λ_j, se tiene una solución $\mathbf{x}^j(t)=e^{\lambda_j t}\mathbf{v}^j$ de (1). Si $\mathbf{A}$ tiene n vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n$ con valores característicos $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, respectivamente, ($\lambda_1,\dots,\lambda_n$ no tienen por qué ser diferentes), entonces $\mathbf{x}^j(t)=e^{\lambda_j t}\mathbf{v}^j$, $j=1,\dots,n$ son n soluciones linealmente independientes de (1). Esto se sigue inmediatamente del Teorema 6 de la

Sección 3.4 y del hecho que $\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{v}^j$. En tal caso, entonces toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}^n. \tag{4}$$

Esta fórmula se llama a veces la "solución general" de (1).

El caso más sencillo es cuando $\mathbf{A}$ tiene n valores característicos reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con vectores característicos $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$, respectivamente, ya que en tal caso se garantiza la independencia lineal de $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$. Tal es el contenido del Teorema 12.

TEOREMA 12. *Cualesquiera k vectores característicos $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ de $\mathbf{A}$ con valores característicos diferentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente, son linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción sobre k, el número de eigenvectores. Nótese que el teorema claramente es cierto para $k = 1$. Ahora supóngase que el Teorema 1 es cierto para $k = j$. Es decir, que cualquier conjunto de j vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos diferentes es linealmente independiente. Hay que demostrar entonces que cualquier conjunto de $j + 1$ eigenvectores de $\mathbf{A}$ con eigenvalores diferentes, es también linealmente independiente. Para ello, sean $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{j+1}$ $j + 1$ vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1}$, respectivamente. Para determinar si estos vectores son linealmente dependientes o independientes, se considera la ecuación

$$c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2 + \ldots + c_{j+1}\mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Al aplicar $\mathbf{A}$ a ambos lados de (5) se obtiene

$$\lambda_1 c_1\mathbf{v}^1 + \lambda_2 c_2\mathbf{v}^2 + \ldots + \lambda_{j+1} c_{j+1}\mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Así pues, si se multiplican por λ_1 ambos lados de (5), y se resta de (6) la ecuación resultante, se obtiene

$$(\lambda_2 - \lambda_1)c_2\mathbf{v}^2 + \ldots + (\lambda_{j+1} - \lambda_1)c_{j+1}\mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Pero $\mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{j+1}$ son j vectores característicos de A con valores característicos distintos, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{j+1}$, respectivamente. Por hipótesis de inducción, los vectores son linealmente independientes. Por lo tanto, se tiene que

$$(\lambda_2 - \lambda_1)c_2 = 0, \qquad (\lambda_3 - \lambda_1)c_3 = 0, \ldots, \qquad \text{y} \qquad (\lambda_{j+1} - \lambda_1)c_{j+1} = 0.$$

Dado que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j+1}$ son todos distintos, se concluye entonces que $c_2, c_3, \ldots, c_{j+1}$ son todos iguales a cero. La ecuación (5) obliga entonces a que c_1 sea nulo. Por lo tanto, $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{j+1}$ son linealmente independientes. Se tiene entonces por inducción que todo conjunto de k vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos distintos es linealmente independiente. □

EJEMPLO 1 Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

es

$$p(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & 4\\ 3 & 2-\lambda & -1\\ 2 & 1 & -1-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)+2+12-8(2-\lambda)+(1-\lambda)-3(1+\lambda)$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2).$$

De modo que los valores característicos de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$.

(i) $\lambda_1 = 1$. Se busca un vector $\mathbf{v}$, diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$-v_2+4v_3=0,\qquad 3v_1+v_2-v_3=0\qquad \text{y}\qquad 2v_1+v_2-2v_3=0.$$

Al despejar v_1 y v_2 en términos de v_3 en las primeras dos ecuaciones, se obtiene $v_1 = -v_3$ y $v_2 = 4v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$\mathbf{v}=c\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico igual a 1. Por lo tanto,

$$ce^{t}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial para cualquier constante c. Para simplificar, se toma

$$\mathbf{x}^1(t)=e^{t}\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}.$$

(ii) $\lambda_2 = 3$. Se busca un vector $\mathbf{v}$, no nulo, tal que

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$-2v_1-v_2+4v_3=0,\qquad 3v_1-v_2-v_3=0\qquad \text{y}\qquad 2v_1+v_2-4v_3=0.$$

Despejando v_1 y v_2 en términos de v_3 en las dos primeras ecuaciones, se obtiene $v_1 = v_3$ y $v_2 = 2v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$\mathbf{v} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico 3. De modo que,

$$\mathbf{x}^2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una segunda solución de la ecuación diferencial

(iii) $\lambda_3 = -2$. Se busca un vector **v**, diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$3v_1 - v_2 + 4v_3 = 0, \qquad 3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0 \qquad \text{y} \qquad 2v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Despejando v_1 y v_2 en términos de v_3, se obtiene $v_1 = -v_3$ y $v_2 = v_3$. Por lo tanto, cualquier vector

$$\mathbf{v} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un eigenvector de **A** con eigenvalor -2. Por consiguiente,

$$\mathbf{x}^3(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una tercera solución de la ecuación diferencial. Las tres soluciones son linealmente independientes, ya que los valores característicos de **A** son diferentes. Por lo tanto, toda solución $\mathbf{x}(t)$ debe ser de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN. Si λ es un valor característico de **A**, entonces las n ecuaciones

$$a_{j1}v_1 + \ldots + (a_{jj}-\lambda)v_j + \ldots + a_{jn}v_n = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

no son linealmente independientes, al menos una de ellas es una combinación de las otras. Se tienen, por tanto, a lo sumo $n-1$ ecuaciones linealmente independientes para las n incógnitas $v_1, \ldots, v_n$. Tal cosa implica que por lo menos una de las incógnitas $v_1, \ldots, v_n$ puede ser elegida arbitrariamente.

EJEMPLO 2 Resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 3 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 12\\ 3 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2-36=(\lambda-7)(\lambda+5).$$

Así pues, los valores característicos de A son $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = -5$.

(i) $\lambda_1 = 7$. Se busca un vector $\mathbf{v}$ diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A}-7\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Esto implica que $v_1 = 2v_2$. Por lo tanto, cualquier vector

$$\mathbf{v}=c\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

Es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico 7. Por consiguiente

$$\mathbf{x}^1(t)=e^{7t}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

(ii) $\lambda_2 = -5$. Se busca un vector $\mathbf{v}$, diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A}+5\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Esto implica que $v_1 = -2v_2$. De manera que

$$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor -5, y

$$\mathbf{x}^2(t)=e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

es una segunda solución de la ecuación diferencial. Las dos soluciones son linealmente independientes, ya que los valores característicos de $\mathbf{A}$ son diferentes. Por lo tanto, $\mathbf{x}(t) =$

$c_1\mathbf{x}^1(t) + c_2\mathbf{x}^2(t)$. Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = c_1\mathbf{x}^1(0) + c_2\mathbf{x}^2(0) = \begin{pmatrix}2c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2c_2\\c_2\end{pmatrix}.$$

Así pues, $2c_1 - 2c_2 = 0$ y $c_1 + c_2 = 1$. La solución a estas dos ecuaciones es $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}e^{7t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}e^{7t} - e^{-5t}\\ \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t}\end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 3 Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

SOLUCIÓN. No es necesario calcular el polinomio característico de $\mathbf{A}$ para encontrar los valores característicos y los vectores característicos de $\mathbf{A}$. De hecho, obsérvese que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, cualquier vector $\mathbf{x}$ cuyas componentes sumen cero es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico 0. En particular

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}^4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

son cuatro eigenvectores de $\mathbf{A}$, linealmente independientes, con eigenvalor cero. Más aún, obsérvese que

$$\mathbf{v}^5 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$$

es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico 15, ya que

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} = (1+2+3+4+5)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} = 15\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que los cinco vectores $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$, $\mathbf{v}^4$ y $\mathbf{v}^5$ son linealmente independientes. Por lo tanto, toda solución $\mathbf{x}(t)$ es de la forma

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}+c_5e^{15t}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 6, encuentre todas las soluciones de la ecuación diferencial dada.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}6&-3\\2&1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-2&1\\-4&3\end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}7&-1&6\\-10&4&-12\\-2&1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-7&0&6\\0&5&0\\6&0&2\end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&2&3&6\\3&6&9&18\\5&10&15&30\\7&14&21&42\end{bmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los Problemas del 7 al 12, resuelva el problema de valor inicial dado.

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

8. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

9. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

10. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&10&2\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\-4\\13\end{pmatrix}$

11. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&-1&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

12. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&2&1\\4&1&-3\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix}$

13. (a) Demuestre que $e^{\lambda(t-t_0)}\mathbf{v}$, con t_0 constante, es una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

(b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&2&1\\4&1&-3\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(1)=\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix}$$

(Ejercicio 12).

14. $$\begin{bmatrix}e^t+e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}e^t+e^{3t}\\e^{3t}\\e^{3t}\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad \begin{bmatrix}e^t-e^{3t}\\-e^{3t}\\-e^{3t}\end{bmatrix}.$$

son tres soluciones de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Obtenga los valores característicos y los vectores característicos de $\mathbf{A}$.

15. Demuestre que los valores característicos de $\mathbf{A}^{-1}$ son los inversos multiplicativos de los valores característicos de $\mathbf{A}$.

16. Demuestre que los eigenvalores de $\mathbf{A}^n$ son los eigenvalores de $\mathbf{A}$ elevados a la potencia n.

17. Pruebe que $\lambda = 0$ es un valor característico de $\mathbf{A}$ si $\det \mathbf{A} = 0$.

18. Pruebe mediante un ejemplo que los valores característicos de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ no son necesariamente la suma de los valores característicos de $\mathbf{A}$ con los valores característicos de $\mathbf{B}$.

19. Demuestre mediante un ejemplo que los eigenvalores de $\mathbf{AB}$ no son necesariamente el producto de los eigenvalores de $\mathbf{A}$ con los valores característicos de $\mathbf{B}$.

20. Demuestre que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ tienen el mismo polinomio característico.

21. Suponga que existe alguna de las dos matrices $\mathbf{B}^{-1}$ o $\mathbf{A}^{-1}$. Demuestre que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ tienen los mismos valores característicos. *Sugerencia:* Use el Ejercicio 20. (Este resultado es cierto aun cuando $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ no existan; sin embargo, su demostración es más difícil.)

3.9 RAÍCES COMPLEJAS

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor característico complejo de $\mathbf{A}$ con vector característico $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, entonces $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución con valores complejos de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Como se muestra a continuación, esta solución con valores complejos da lugar a *dos* soluciones con valores reales.

LEMA 1. *Sea* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + i\mathbf{z}(t)$ *una solución de* (1) *con valores complejos. Entonces, tanto* $\mathbf{y}(t)$ *como* $\mathbf{z}(t)$ *son soluciones de* (1) *con valores reales.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + i\mathbf{z}(t)$ es una solución de (1) con valores complejos, entonces

$$\dot{\mathbf{y}}(t) + i\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{y}(t) + i\mathbf{z}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + i\mathbf{A}\mathbf{z}(t). \tag{2}$$

Igualando las partes reales e imaginarias de (2) se obtiene $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$. Por lo tanto, $\mathbf{y}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{x}(t)\}$ y $\mathbf{z}(t) = \operatorname{Im}\{\mathbf{x}(t)\}$ son soluciones con valores reales de (1). □

La función con valores complejos $\mathbf{x}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2)$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2)\\ &= e^{\alpha t}\left[(\mathbf{v}^1\cos\beta t - \mathbf{v}^2\operatorname{sen}\beta t) + i(\mathbf{v}^1\operatorname{sen}\beta t + \mathbf{v}^2\cos\beta t)\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor característico de $\mathbf{A}$ con vector característico $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, entonces

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}^1\cos\beta t - \mathbf{v}^2\operatorname{sen}\beta t)$$

y

$$\mathbf{z}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}^1\operatorname{sen}\beta t + \mathbf{v}^2\cos\beta t)$$

son dos soluciones con valores reales de (1). Más aún, las dos soluciones deben ser linealmente independientes (Ejercicio 10).

EJEMPLO 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned}p(\lambda) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (1-\lambda)^3 + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores característicos de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

(i) $\lambda = 1$: Claramente,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico 1. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^1(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

es una solución de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(ii) $\lambda = 1 + i$: Se busca un vector $\mathbf{v}$, no nulo, tal que

$$[\mathbf{A}-(1+i)\mathbf{I}]\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $-iv_1 = 0$, $-iv_2 - v_3 = 0$ y $v_2 - iv_3 = 0$. De la primera ecuación se obtiene $v_1 = 0$, y de la segunda o tercera se sigue que $v_2 = iv_3$. Por lo tanto, cualquier vector,

$$\mathbf{v}=c\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico $1 + i$. Así que,

$$\mathbf{x}(t)=e^{(1+i)t}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una solución con valores complejos de la ecuación diferencial $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ahora bien,

$$e^{(1+i)t}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}=e^{t}(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t)\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$=e^{t}\left[\cos t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}-\mathrm{sen}\,t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+i\,\mathrm{sen}\,t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+i\cos t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$=e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}\,t \\ \cos t \end{bmatrix}+ie^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Lema 1

$$\mathbf{x}^2(t)=e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}\,t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^3(t)=e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}$$

son soluciones con valores reales. Las tres soluciones $\mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{x}^2(t)$ y $\mathbf{x}^3(t)$ son linealmente independientes, ya que sus valores iniciales

$$\mathbf{x}^1(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^3(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son vectores linealmente independientes en R^3. Por lo tanto, la solución $\mathbf{x}(t)$ del problema de valor inicial debe tener la forma

$$\mathbf{x}(t)=c_1e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{sen}\,t \\ \cos t \end{bmatrix}+c_3e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}.$$

Tomando $t = 0$, se ve que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_3\\c_2\end{bmatrix}.$$

De modo que, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ y

$$\mathbf{x}(t) = e^t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}0\\-\operatorname{sen} t\\ \cos t\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}0\\ \cos t\\ \operatorname{sen} t\end{bmatrix}$$

$$= e^t\begin{bmatrix}1\\ \cos t - \operatorname{sen} t\\ \cos t + \operatorname{sen} t\end{bmatrix}.$$

OBSERVACIÓN. Si $\mathbf{v}$ es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ, entonces $\bar{\mathbf{v}}$, el conjugado complejo de $\mathbf{v}$, es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico $\bar{\lambda}$. (Cada una de las componentes de $\bar{\mathbf{v}}$ es el conjugado complejo de la componente correspondiente de v.) Para demostrarlo, tómese el conjugado complejo en ambos lados de la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ y obsérvese que el conjugado complejo del vector $\mathbf{A}\mathbf{v}$ es $\mathbf{A}\mathbf{v}$ si $\mathbf{A}$ es real. Por lo tanto, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$, lo que muestra que $\mathbf{v}$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor $\bar{\lambda}$.

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 14, encuentre la solución general de los sistemas dados de ecuaciones diferenciales.

1. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los Problemas del 5 al 8, resuelva el problema de valor inicial dado.

5. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

6. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

7. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

8. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

9. Determine todos los vectores $\mathbf{x}^0$ tales que la solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0$$

es una función periódica del tiempo.

10. Sea $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ una solución de $\mathbf{x} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}$. Demuestre que $\mathbf{y}(t) = \text{Re}\{\mathbf{x}(t)\}$ y $\mathbf{z}(t) = \text{Im}\{\mathbf{x}(t)\}$ son linealmente independientes. *Sugerencia:* Observe que $\mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ son linealmente independientes en C^n, ya que son vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos diferentes.

3.10 RAÍCES IGUALES

Si el polinomio característico de $\mathbf{A}$ no tiene n raíces diferentes, entonces $\mathbf{A}$ puede no tener n vectores característicos linealmente independientes. Por ejemplo, la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

tiene solamente dos eigenvalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ y dos eigenvectores característicos linealmente independientes, que pueden tomarse como

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene solamente dos soluciones linealmente independientes

$$e^{t}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad e^{2t}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

de la forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$. En este caso, el problema es encontrar una tercera solución linealmente independiente. Pero, en general, supóngase que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene solamente $k < n$ vectores característicos linealmente independientes. Entonces la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene sólo k soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$. El problema es encontrar $n - k$ soluciones adicionales linealmente independientes.

El problema se abordará de la siguiente manera, muy ingeniosa por cierto. Recuérdese que $x(t) = e^{at}c$ es una solución de la ecuación diferencial escalar $\dot{x} = ax$, para cualquier constante c. De manera análoga, sería deseable poder decir que $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$ es una solución de la ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

para cualquier vector constante $\mathbf{v}$. Sin embargo, $e^{\mathbf{A}t}$ no está definido si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. Pero esto no constituye una dificultad seria. Hay una manera muy natural de definir $e^{\mathbf{A}t}$, de manera que se asemeje a la exponencial escalar e^{at}; simplemente se define

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \ldots. \tag{2}$$

Es posible mostrar que la serie infinita (2) converge para toda t y que se le puede derivar término por término. En particular, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \ldots + \frac{\mathbf{A}^{n+1}}{n!}t^n + \ldots \\ &= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \ldots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \ldots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

Esto implica que $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$ es una solución de (1), para cualquier vector constante $\mathbf{v}$, ya que

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = \mathbf{A}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}).$$

OBSERVACIÓN. La exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ y la exponencial escalar e^{at} satisfacen muchas propiedades similares. Por ejemplo,

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad \text{y} \quad e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}. \tag{3}$$

De hecho, la misma demostración de que $(e^{at})^{-1} = e^{-at}$ y $e^{a(t+s)} = e^{at}e^{as}$ puede llevarse a cabo para verificar las igualdades (3); sólo es necesario sustituir *a* por $\mathbf{A}$ y 1 por $\mathbf{I}$. Sin embargo, $e^{\mathbf{A}t+\mathbf{B}t}$ es igual a $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ solamente si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ (Ejercicio 15 de la Sección 3.11).

Hay varios tipos de matrices $\mathbf{A}$ (Problemas del 9 al 11) para los cuales puede sumarse de manera exacta la serie infinita (2). Sin embargo, en general no parece posible expresar $e^{\mathbf{A}t}$ en forma reducida. A pesar de todo, un hecho sorprendente es que siempre es posible encontrar n vectores $\mathbf{v}$ linealmente independientes para los cuales puede sumarse de manera exacta la serie infinita $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$. Más aún, una vez que se conocen n soluciones linealmente independientes de (1), hay la posibilidad de calcular $e^{\mathbf{A}t}$ de manera exacta. (Esta última propiedad se demostrará en la siguiente sección.)

A continuación se ilustra cómo encontrar n vectores $\mathbf{v}$ linealmente independientes para los cuales es posible sumar de manera exacta la serie infinita $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$. Obsérvese que

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}e^{\lambda\mathbf{I}t}\mathbf{v}$$

para cualquier constante λ, ya que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\lambda\mathbf{I}) = (\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Pero

$$\begin{aligned}e^{\lambda\mathbf{I}t}\mathbf{v} &= \left[\mathbf{I} + \lambda\mathbf{I}t + \frac{\lambda^2\mathbf{I}^2 t^2}{2!} + \ldots\right]\mathbf{v} \\ &= \left[1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \ldots\right]\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}$.

Obsérvese ahora que si $\mathbf{v}$ satisface $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\mathbf{v}=\mathbf{0}$ para algún entero m, entonces la serie infinita $e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}$ termina después de m términos. Si $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\mathbf{v}=\mathbf{0}$, entonces $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m+l}\mathbf{v}$ también es igual a cero, para cualquier entero positivo l, ya que

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m+l}\mathbf{v}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^l\left[(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\mathbf{v}\right]=\mathbf{0}.$$

Por lo tanto,

$$e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}=\mathbf{v}+t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{v}$$

y

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}&=e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}\\&=e^{\lambda t}\left[\mathbf{v}+t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}+\ldots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{v}\right].\end{aligned}$$

Esto sugiere el siguiente algoritmo para encontrar n soluciones linealmente independientes de (1).

(1) Encuéntrense todos los valores y vectores característicos de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ tiene n eigenvectores linealmente independientes, entonces la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$. (Nótese que la serie infinita $e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}$ termina después del primer término si $\mathbf{v}$ es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ.)

(2) Supóngase que $\mathbf{A}$ tiene únicamente $k<n$ vectores característicos linealmente independientes. Entonces se tienen sólo k soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Para encontrar soluciones adicionales se toma un valor característico λ de $\mathbf{A}$, y se encuentran todos los vectores $\mathbf{v}$ para los cuales $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}=\mathbf{0}$, pero $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Para cada uno de tales vectores $\mathbf{v}$

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}=e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v}=e^{\lambda t}\left[\mathbf{v}+t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}\right]$$

es una solución adicional de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. Esto se hace para todos los valores característicos λ de $\mathbf{A}$.

(3) Si aún no se tienen suficientes soluciones, entonces se buscan todos los vectores $\mathbf{v}$ para los cuales $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\mathbf{v}=\mathbf{0}$, pero $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Para cada uno de tales vectores $\mathbf{v}$,

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}=e^{\lambda t}\left[\mathbf{v}+t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}+\frac{t^2}{2!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}\right]$$

es una solución adicional de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$.

(4) Se continúa de la misma manera hasta encontrar, eso se espera, n soluciones linealmente independientes.

El siguiente lema del álgebra lineal, que se aceptará sin demostración, garantiza que el algoritmo siempre funcione. Más aún, da una cota superior para el número de pasos que se requieren en este algoritmo.

LEMA 1. *Supóngase que el polinomio característico de* $\mathbf{A}$ *tiene k raíces diferentes* $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ *con multiplicidades* $n_1,\ldots,n_k$*, respectivamente. (Eso significa que* $p(\lambda)$ *se puede factorizar en la forma* $(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\ldots(\lambda_k-\lambda)^{n_k}$.)

Supóngase además que $\mathbf{A}$ *tiene solamente* $\nu_j < n_j$ *vectores característicos linealmente independientes con valor característico* λ_j. *Entonces la ecuación* $(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^2\mathbf{v}=\mathbf{0}$ *tiene por lo menos* ν_j+1 *soluciones independientes. En general, si la ecuación* $(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^m\mathbf{v}=\mathbf{0}$ *tiene sólo* $m_j < n_j$ *soluciones independientes, entonces la ecuación* $(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^{m+1}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ *tiene por lo menos* m_j+1 *soluciones independientes.*

El Lema 1 implica claramente que existe un número entero d_j con $d_j \le n_j$, tal que la ecuación $(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^{d_j}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ tiene al menos n_j soluciones linealmente independientes. Así pues, por cada valor característico λ_j de $\mathbf{A}$, es posible calcular n_j soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}=\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}$. Todas esas soluciones tienen la forma

$$\mathbf{x}(t)=e^{\lambda_j t}\left[\mathbf{v}+t(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})\mathbf{v}+\ldots+\frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^{d_j-1}\mathbf{v}\right].$$

Puede mostrarse además que el conjunto de $n_1+\ldots+n_k=n$ soluciones que se obtiene así debe ser linealmente independiente.

EJEMPLO 1 Encontrar tres soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

es $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Por lo tanto, $\lambda=1$ es un valor característico de $\mathbf{A}$ con multiplicidad dos, y $\lambda=2$ es un valor característico de $\mathbf{A}$ con multiplicidad uno.

(i) $\lambda=1$: Se buscan todos los vectores $\mathbf{v}$, diferentes de cero, tales que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Esto implica que $v_2=v_3=0$ y v_1 es arbitrario. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^1(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

es una solución de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. Dado que $\mathbf{A}$ tiene solamente un vector característico linealmente independiente con valor característico 1, se buscan entonces todas las soluciones de la ecuación

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_3 = 0$ y tanto v_1 como v_2 son arbitrarios. Ahora bien, el vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

satisface $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pero $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. (Podría tomarse igualmente cualquier vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el cual $v_2 \neq 0$.) Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^2(t) &= e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e^t\left[\mathbf{I} + t(\mathbf{A}-\mathbf{I})\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\
&= e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

es una segunda solución linealmente independiente.

(ii) $\lambda = 2$: Se busca un vector $\mathbf{v}$, diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_1 = v_2 = 0$ y v_3 es arbitrario. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^3(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una tercera solución linealmente independiente.

EJEMPLO 2 Resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es $(2-\lambda)^3$. Por lo tanto, $\lambda = 2$ es un valor característico de $\mathbf{A}$ con multiplicidad tres. Los vectores característicos de $\mathbf{A}$ satisfacen la ecuación

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_2 = v_3 = 0$ y v_1 es arbitrario. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^1(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

es una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Dado que $\mathbf{A}$ tiene sólo un vector característico linealmente independiente, se buscan entonces todas las soluciones de la ecuación

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_3 = 0$ y tanto v_1 como v_2 son arbitrarias. Ahora bien, el vector

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

satisface $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, pero $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^2(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=e^{2t}e^{(\mathbf{A}-2\mathbf{I})t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=e^{2t}\left[\mathbf{I}+t(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\right]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=e^{2t}\left[\mathbf{I}+t\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=e^{2t}\left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]=e^{2t}\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}$$

es una segunda solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Dado que la ecuación $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ tiene solamente dos soluciones linealmente independientes, se buscan entonces todas las soluciones de la ecuación

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}^3\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Obviamente, cualquier vector es solución de esta ecuación. El vector

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

no satisface $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^3(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = e^{2t}e^{(\mathbf{A}-2\mathbf{I})t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= e^{2t}\left[\mathbf{I} + t(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) + \frac{t^2}{2}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\right]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= e^{2t}\left[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\right] = e^{2t}\begin{bmatrix}3t-\frac{1}{2}t^2\\-t\\1\end{bmatrix}$$

es una tercera solución linealmente independiente. Por consiguiente,

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\left[c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}3t-\frac{1}{2}t^2\\-t\\1\end{bmatrix}\right].$$

Las constantes c_1, c_2 y c_3 se determinan a partir de las condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y $c_3 = 1$. De manera que

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}1+5t-\frac{1}{2}t^2\\2-t\\1\end{bmatrix}.$$

Para la matriz $\mathbf{A}$ en el Ejemplo 2 se cumple que $p(\lambda) = (2-\lambda)^3$ y $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})^3 = \mathbf{0}$. Esto no es accidental. Cualquier matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica. Ese es el contenido del siguiente teorema:

TEOREMA 13. (Cayley-Hamilton). *Sea* $p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \ldots + (-1)^n\lambda^n$ *el polinomio característico de* $\mathbf{A}$. *Entonces se cumple*

$$p(\mathbf{A}) \equiv p_0\mathbf{I} + p_1\mathbf{A} + \ldots + (-1)^n\mathbf{A}^n = \mathbf{0}.$$

DEMOSTRACIÓN ERRÓNEA. Al hacer $\lambda = \mathbf{A}$ en la ecuación $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se obtiene $p(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{I}) = \det\mathbf{0} = 0$. La falacia en esta demostración es que no es posible hacer $\lambda = \mathbf{A}$ en la expresión $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, ya que no es posible restar una matriz de los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}$. Sin embargo, hay una manera muy ingeniosa de corregir tal demostración. Sea $\mathbf{C}(\lambda)$ la adjunta en el sentido clásico (Sección 3.6) de la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Entonces,

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{C}(\lambda) = p(\lambda)\mathbf{I}. \tag{4}$$

Los elementos de la matriz $\mathbf{C}(\lambda)$ son polinomios en λ de grado a lo más $(n-1)$. Por lo tanto, es posible escribir $\mathbf{C}(\lambda)$ en la forma

$$\mathbf{C}(\lambda)=\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\lambda+\ldots+\mathbf{C}_{n-1}\lambda^{n-1}$$

donde $\mathbf{C}_0, \ldots, \mathbf{C}_{n-1}$ son matrices de $n \times n$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}\lambda+\lambda^2 & 2\lambda\\ \lambda^2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda&2\lambda\\0&-\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda^2&0\\\lambda^2&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}+\lambda^2\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

De modo que la Ecuación (4) puede escribirse en la forma

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})[\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\lambda+\ldots+\mathbf{C}_{n-1}\lambda^{n-1}]=p_0\mathbf{I}+p_1\lambda\mathbf{I}+\ldots+(-1)^n\lambda^n\mathbf{I}. \tag{5}$$

Observemos que ambos lados de la ecuación (5) son polinomios en λ, cuyos coeficientes son matrices de $n \times n$. Dado que los dos polinomios son iguales para cualquier valor de λ, entonces sus coeficientes respectivos deben ser iguales. Pero si los coeficientes de potencias iguales coinciden, entonces es posible sustituir λ por cualquier valor conservando la igualdad. En particular, al tomar $\lambda = \mathbf{A}$ se obtiene

$$p(\mathbf{A})=p_0\mathbf{I}+p_1\mathbf{A}+\ldots+(-1)^n\mathbf{A}^n$$
$$=(\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{I})[\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_1\mathbf{A}+\ldots+\mathbf{C}_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}]=\mathbf{0}. \qquad \square$$

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 4, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales dado.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\-3&2&4\end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}$ *Sugerencia:* Revise el Ejemplo 1 del texto.

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\mathbf{x}$

En cada uno de los Problemas del 5 al 8, resuelva el problema de valor inicial dado.

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-4&-4&0\\10&9&1\\-4&-3&1\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&2\\1&-1&4\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

8. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\1&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&2&3\end{bmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

9. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Demuestre que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}.$$

10. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Sugerencia: Escriba **A** en la forma

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{I}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

y observe que

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{\lambda t}\exp\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}t\right].$$

11. Sea **A** la matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix},$$

y sea **P** la matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{P}^n = \mathbf{0}$.
(b) Pruebe que $(\lambda\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{P}(\lambda\mathbf{I})$.

(c) Demuestre que

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{\lambda t}\left[\mathbf{I}+t\mathbf{P}+\frac{t^2\mathbf{P}^2}{2!}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{P}^{n-1}\right].$$

12. Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ si

(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$,

(b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$, (c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

13. (a) Pruebe que $e^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{T}$.
(b) Dado

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

con

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\3&-1&2\\2&2&3\end{pmatrix},$$

calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

14. Suponga que $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ tiene n raíces distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Demuestre directamente que $p(\mathbf{A}) \equiv (-1)^n(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \ldots (\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{I}) = \mathbf{0}$. *Sugerencia:* Escriba los vectores $\mathbf{x}$ en la forma $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}^1 + \ldots + x_n\mathbf{v}^n$ donde $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ son n vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, y concluya que $p(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo vector.

15. Suponga que $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A}$. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$.

16. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \mathbf{0}$.
(b) Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$.

17. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$.
(b) Pruebe que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}\cos t&\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t&\cos t\end{pmatrix}.$$

En cada uno de los Problemas del 18 al 20, verifique directamente el Teorema de Cayley-Hamilton, para la matriz de **A** dada.

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **19.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **20.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3.11 LA MATRIZ FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES; $e^{\mathbf{A}t}$

Si $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

entonces cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{x}^1(t)+c_2\mathbf{x}^2(t)+\ldots+c_n\mathbf{x}^n(t). \tag{2}$$

Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz cuyas columnas son $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$. Entonces es posible escribir la Ecuación (2) en la forma concisa $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)c$, donde

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

DEFINICIÓN. Una matriz $\mathbf{X}(t)$ se denomina *matriz fundamental de soluciones* de (1) si sus columnas forman un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (1).

EJEMPLO 1 Encontrar la matriz fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. Se mostró en la Sección 3.8 que (Ejemplo 1)

$$e^t\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son tres soluciones linealmente independientes de (3). Por lo tanto,

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix} -e^t & e^{3t} & -e^{-2t} \\ 4e^t & 2e^{3t} & e^{-2t} \\ e^t & e^{3t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones de (3).

En la presente sección se mostrará que puede calcularse la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ directamente a partir de cualquier matriz fundamental de soluciones de (1). Esto es sorprendente, ya que no parecería posible sumar la serie infinita $[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/2! + \dots]$ exactamente para una matriz arbitraria $\mathbf{A}$. En concreto, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 14. *Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Entonces*

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0). \tag{4}$$

En otras palabras, el producto de cualquier matriz fundamental de soluciones de (1) y su inversa en $t = 0$ debe dar $e^{\mathbf{A}t}$.

Se demostrará el Teorema 14 en tres pasos. Primero se dará un criterio sencillo para determinar si una función con valores matriciales es una matriz fundamental de soluciones de (1). Después se usará ese criterio para mostrar que $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental de soluciones de (1). Por último, se establecerá la relación que existe entre cualesquiera dos matrices fundamentales de soluciones de (1).

LEMA 1. *Una matriz $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (1) si y sólo si $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ y $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$. (La derivada de una función con valores matriciales $\mathbf{X}(t)$ es la matriz cuyos elementos son las derivadas de los elementos correspondientes de $\mathbf{X}(t)$.)*

DEMOSTRACIÓN. Denótese por $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ las n columnas de $\mathbf{X}(t)$. Obsérvese que

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \left(\dot{\mathbf{x}}^1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}^n(t)\right)$$

y

$$\mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{A}\mathbf{x}^n(t)\right).$$

Por lo tanto, las n ecuaciones vectoriales $\dot{\mathbf{x}}^1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}^n(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^n(t)$ son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$. Más aún, n soluciones $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ son linealmente independientes si y sólo si $\mathbf{x}^1(0), \dots, \mathbf{x}^n(0)$ son vectores linealmente independientes en R^n. Los vectores, a su vez, son linealmente independientes si y sólo si $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$. Por lo tanto, $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (1) si y sólo si, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ y $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$. □

LEMA 2. *La función con valores matriciales $e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2t^2/! + \dots$ es una matriz fundamental de soluciones de (1).*

DEMOSTRACIÓN. En la Sección 3.10 se mostró que $(d/dt)e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$. Por lo tanto, $e^{\mathbf{A}t}$ es solución de la ecuación diferencial matricial $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$. Más aún, su determinante en $t = 0$ es igual a 1, ya que $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$. Por lo tanto, por el Lema 1, $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental de soluciones de (1). □

LEMA 3. *Sean $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ dos matrices fundamentales de soluciones de (1). Entonces, existe una matriz constante $\mathbf{C}$, tal que $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, las columnas $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$ de $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)$ de $\mathbf{Y}(t)$ son conjuntos linealmente independientes de soluciones de (1). En particular, por lo tanto, cualquier columna de $\mathbf{Y}(t)$ puede escribirse como combinación lineal de las columnas de $\mathbf{X}(t)$; es decir, existen constantes $c_1^j, \ldots, c_n^j$ tales que

$$\mathbf{y}^j(t) = c_1^j\mathbf{x}^1(t) + c_2^j\mathbf{x}^2(t) + \ldots + c_n^j\mathbf{x}^n(t), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Sea $\mathbf{C}$ la matriz $(\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \ldots, \mathbf{c}^n)$ donde

$$\mathbf{c}^j = \begin{bmatrix} c_1^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{bmatrix}.$$

Entonces las n ecuaciones (5) son equivalentes a la ecuación matricial $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$. □

Ahora es posible demostrar el Teorema 14.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 14. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de (1). Entonces, por los Lemas 2 y 3, existe una matriz constante $\mathbf{C}$ tal que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}. \tag{6}$$

Tomando $t = 0$ en (6) se obtiene $\mathbf{I} = \mathbf{X}(0)\mathbf{C}$, lo cual implica que $\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}(0)$. Por lo tanto, $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)$. □

EJEMPLO 1 Encontrar $e^{\mathbf{A}t}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. El primer paso consiste en encontrar 3 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Para tal fin se calcula

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda).$$

con lo que se encuentra que $\mathbf{A}$ tiene tres valores característicos $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ y $\lambda = 5$.

(i) $\lambda = 1$: Claramente,

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico uno. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^1(t)=e^t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

es una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(ii) $\lambda = 3$: Se busca una solución diferente de cero de la ecuación

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_3 = 0$ y $v_2 = v_1$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}^2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

Es un vector característico de **A** con valor característico 3. En consecuencia,

$$\mathbf{x}^2(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

es una segunda solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(iii) $\lambda = 5$: Se busca una solución diferente de cero de la ecuación

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-4&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_2 = v_3$ y $v_1 = v_3/2$. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}^3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico 5. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^3(t)=e^{5t}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

es una tercera solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Las tres soluciones son en verdad linealmente independientes. Por lo tanto,

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix}e^t&e^{3t}&e^{5t}\\0&2e^{3t}&2e^{5t}\\0&0&2e^{5t}\end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones. Usando los métodos de la Sección 3.6, se calcula

$$\mathbf{X}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\exp\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}t\right]=\begin{bmatrix}e^{t} & e^{3t} & e^{5t}\\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t}\\ 0 & 0 & 2e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{5t}\\ 0 & e^{3t} & -e^{3t}+e^{5t}\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A}$ igual a

1. $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -4\\ 4 & 1 & -4\end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

7. Encuentre $\mathbf{A}$ si

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}2e^{2t}-e^{t} & e^{2t}-e^{t} & e^{t}-e^{2t}\\ e^{2t}-e^{t} & 2e^{2t}-e^{t} & e^{t}-e^{2t}\\ 3e^{2t}-3e^{t} & 3e^{2t}-3e^{t} & 3e^{t}-2e^{2t}\end{bmatrix}.$$

En cada uno de los Problemas del 8 al 11, determine si la matriz dada es una matriz fundamental de soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{A}$. En caso afirmativo, encuentre $\mathbf{A}$.

8. $\begin{bmatrix}e^{t} & e^{-t} & e^{t}+2e^{-t}\\ e^{t} & -e^{-t} & e^{t}-2e^{-t}\\ 2e^{t} & e^{-t} & 2(e^{t}+e^{-t})\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}-5\cos 2t & -5\,\mathrm{sen}\,2t & 3e^{2t}\\ -2(\cos 2t+\mathrm{sen}\,2t) & 2(\cos 2t-\mathrm{sen}\,2t) & 0\\ \cos 2t & \mathrm{sen}\,2t & e^{2t}\end{bmatrix}$

10. $e^{t}\begin{bmatrix}1 & t+1 & t^2+1\\ 1 & 2(t+1) & 4t^2\\ 1 & t+2 & 3\end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix}e^{2t} & 2e^{-t} & e^{3t}\\ 2e^{t} & 2e^{-t} & e^{3t}\\ 3e^{t} & e^{-t} & 2e^{3t}\end{bmatrix}$

12. Sea $\phi^{j}(t)$ la solución del problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}^{j}$. Demuestre que $e^{\mathbf{A}t} = (\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n)$.

13. Suponga que $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$, donde $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ son matrices fundamentales de soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, y $\mathbf{C}$ es una matriz constante. Demuestre que $\det \mathbf{C} \neq 0$.

14. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de (1), y sea $\mathbf{C}$ una matriz constante con $\det\mathbf{C} \neq 0$. Pruebe que $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$ es también una matriz fundamental de soluciones de (1).

15. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Demuestre que la solución $\mathbf{x}(t)$ del problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ es $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$.

16. Sea $\mathbf{X}(t)$ una matriz fundamental de soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Pruebe que $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$.

17. A continuación se da una demostración ingeniosa de la igualdad $e^{\mathbf{A}t+\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
(a) Demuestre que $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t+\mathbf{B}t}$ satisface el problema de valor inicial $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$.
(b) Demuestre que $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = \mathbf{B}e^{\mathbf{A}t}$ si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. (*Sugerencia:* $\mathbf{A}^j\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^j$ si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.) Se concluye entonces que $(d/dt)e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$.
(c) Del Teorema 4 de la Sección 3.4 se sigue inmediatamente que la solución $\mathbf{X}(t)$ del problema de valor inicial $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$, es única. Concluya, por lo tanto, que $e^{\mathbf{A}t+\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$.

3.12 LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA; VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Considérese ahora la ecuación no homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$. Es posible en este caso hacer uso de las soluciones conocidas de la ecuación homogénea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

para encontrar la solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \tag{2}$$

Sean $\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)$, n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (1). Dado que la solución general de (1) es $c_1\mathbf{x}^1(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}^n(t)$, es natural entonces buscar soluciones de (2) de la forma

$$\mathbf{x}(t) = u_1(t)\mathbf{x}^1(t) + u_2(t)\mathbf{x}^2(t) + \ldots + u_n(t)\mathbf{x}^n(t). \tag{3}$$

Esta ecuación puede escribirse en forma abreviada como $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{u}(t)$ donde $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}^1(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t))$ y

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}.$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ se obtiene

$$\dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}(t). \tag{4}$$

La matriz $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (1). Por lo tanto, $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ y la Ecuación (4) se reduce así a

$$\mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{f}(t). \tag{5}$$

Recuérdese que las columnas de $\mathbf{X}(t)$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ para cualquier tiempo t. Por lo tanto, $\mathbf{X}^{-1}(t)$ existe y se cumple

$$\dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t). \tag{6}$$

Integrando esta expresión de t_0 a t resulta

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds$$
$$=\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Y como consecuencia

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0+\mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{7}$$

Si $\mathbf{X}(t)$ es la matriz fundamental de soluciones $e^{\mathbf{A}t}$, entonces la ecuación (7) se simplifica considerablemente. De hecho, si $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$, entonces $\mathbf{X}^{-1}(s) = e^{-\mathbf{A}s}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}^0+e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{8}$$

EJEMPLO 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\e^t\cos 2t\end{pmatrix},\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Se encuentra primero $e^{\mathbf{A}t}$, donde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Para ello se calcula

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\2&1-\lambda&-2\\3&2&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5).$$

Así que los valores característicos de **A** son

$$\lambda=1 \quad \text{y} \quad \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i.$$

(i) $\lambda = 1$. Se busca un vector **v**, diferente de cero, tal que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_1 = v_3$ y $v_2 = -3v_1/2$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico 1. En consecuencia,

$$\mathbf{x}^1(t)=e^t\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}$$

es una solución de la ecuación homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(ii) $\lambda = 1 + 2i$: Se busca un vector **v**, diferente de cero, tal que

$$\left[\mathbf{A}-(1+2i)\mathbf{I}\right]\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2i&0&0\\2&-2i&-2\\3&2&-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Esto implica que $v_1 = 0$ y $v_3 = -iv_2$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico $1 + 2i$. Por consiguiente,

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}e^{(1+2i)t}$$

es una solución con valores complejos de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Además se tiene que

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}e^{(1+2i)t}=e^t(\cos 2t+i\,\mathrm{sen}\,2t)\left[\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-i\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$=e^t\left[\cos 2t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\mathrm{sen}\,2t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$$

$$+ie^t\left[\mathrm{sen}\,2t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\cos 2t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right].$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^2(t)=e^t\begin{bmatrix}0\\ \cos 2t\\ \operatorname{sen} 2t\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^3(t)=e^t\begin{bmatrix}0\\ \operatorname{sen} 2t\\ -\cos 2t\end{bmatrix}$$

son soluciones con valores reales de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Las soluciones $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ y $\mathbf{x}^3$ son linealmente independientes, ya que sus valores en $t = 0$ son en verdad vectores linealmente independientes en R^3. Por lo tanto,

$$\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix}2e^t & 0 & 0\\ -3e^t & e^t\cos 2t & e^t\operatorname{sen} 2t\\ 2e^t & e^t\operatorname{sen} 2t & -e^t\cos 2t\end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Al calcular

$$\mathbf{X}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

se ve que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}2e^t & 0 & 0\\ -3e^t & e^t\cos 2t & e^t\operatorname{sen} 2t\\ 2e^t & e^t\operatorname{sen} 2t & -e^t\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=e^t\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\operatorname{sen} 2t & \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t\\ 1+\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t-\cos 2t & \operatorname{sen} 2t & \cos 2t\end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$+e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos 2s-\operatorname{sen} 2s & \cos 2s & \operatorname{sen} 2s\\ 1-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2s-\cos 2s & -\operatorname{sen} 2s & \cos 2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^s\cos 2s\end{bmatrix}ds$$

$$=e^t\begin{bmatrix}0\\ \cos 2t-\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t+\operatorname{sen} 2t\end{bmatrix}+e^{\mathbf{A}t}\int_0^t\begin{bmatrix}0\\ \operatorname{sen} 2s\cos 2s\\ \cos^2 2s\end{bmatrix}ds$$

$$=e^t\begin{bmatrix}0\\ \cos 2t-\operatorname{sen} 2t\\ \cos 2t+\operatorname{sen} 2t\end{bmatrix}+e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\ (1-\cos 4t)/8\\ t/2+(\operatorname{sen} 4t)/8\end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t - \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$$

$$+ e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{t \operatorname{sen} 2t}{2} + \dfrac{\cos 2t - \cos 4t \cos 2t - \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} 2t}{8} \\ \dfrac{t \cos 2t}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 4t \cos 2t - \operatorname{sen} 2t \cos 4t + \operatorname{sen} 2t}{8} \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t - \left(1 + \frac{1}{2}t\right) \operatorname{sen} 2t \\ \left(1 + \frac{1}{2}t\right) \cos 2t + \frac{5}{4} \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}.$$

Como se ve en el Ejemplo 1, el método de variación de parámetros es con frecuencia muy tedioso y difícil. Una manera de evitar muchos de estos cálculos es "conjeturar" una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación no homogénea y observan entonces (Ejercicio 9) que cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación no homogénea debe tener la forma $\phi(t) + \psi(t)$, donde $\phi(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.

EJEMPLO 2 Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ct}, \qquad c \neq 1. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se "conjetura" una solución particular $\psi(t)$ de la forma $\psi(t) = \mathbf{b}e^{ct}$. Sustituyendo dicha expresión en (9) se obtiene

$$c\mathbf{b}e^{ct} = \mathbf{A}\mathbf{b}e^{ct} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ct},$$

o bien,

$$(\mathbf{A} - c\mathbf{I})\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$\mathbf{b} = \frac{-1}{1-c} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2(c-4)}{4+(1-c)^2} \\ \dfrac{1+3c}{4+(1-c)^2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (9) es de la forma

$$\mathbf{x}(t)=e^{t}\left[c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\\cos 2t\\\operatorname{sen} 2t\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\-\operatorname{sen} 2t\\\cos 2t\end{bmatrix}\right]$$

$$-\frac{e^{ct}}{1-c}\begin{bmatrix}1\\\dfrac{2(c-4)}{4+(1-c)^2}\\\dfrac{1+3c}{4+(1-c)^2}\end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN 1. Si $c = 1$ se presentan problemas, ya que el número 1 es entonces valor característico de la matriz

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

Mas en general, la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}e^{ct}$ puede no tener soluciones de la forma $\mathbf{b}e^{ct}$ si c es un valor característico de $\mathbf{A}$. En tal caso es necesario conjeturar una solución particular de la forma

$$\psi(t)=e^{ct}\left[\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_1 t+\ldots+\mathbf{b}_{k-1}t^{k-1}\right]$$

para algún entero apropiado k. (Ejercicios del 10 al 18.)

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 6, use el método de variación de parámetros para resolver el problema de valor inicial dado.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}4&5\\-2&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}4e^{t}\cos t\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2&-5\\1&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\\tan t\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

7. Considere la ecuación diferencial escalar de orden n

$$L[y]=\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n y=f(t). \qquad (*)$$

Sea $v(t)$ la solución de $L[y]=0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0)=\ldots=y^{(n-2)}(0)=0$, $y^{(n-1)}(0)=1$. Demuestre que

$$y(t)=\int_0^t v(t-s)f(s)\,ds$$

es la solución de $(*)$ que satisface las condiciones iniciales $y(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$. *Sugerencia:* Transforme $(*)$ en un sistema de n ecuaciones de primer orden de la forma $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ y demuestre que

$$\begin{bmatrix}v(t)\\v'(t)\\\vdots\\v^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}$$

es la columna n de $e^{\mathbf{A}t}$.

8. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{dy}{dt}=\sec t\tan t,\qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$$

9. (a) Sea $\psi(t)$ una solución de la ecuación no homogénea $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)$ y sea $\phi(t)$ una solución de la ecuación homogénea $\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. Demuestre que $\phi(t)+\psi(t)$ es una solución de la ecuación no homogénea.
(b) Sean $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ dos soluciones de la ecuación no homogénea. Demuestre que $\psi_1(t)-\psi_2(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.
(c) Sea $\psi(t)$ una solución particular de la ecuación no homogénea. Pruebe que cualquier otra solución $\mathbf{y}(t)$ debe ser de la forma $\mathbf{y}(t)=\phi(t)+\psi(t)$, donde $\phi(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.

En cada uno de los Problemas del 10 al 14, use el método de la conjetura sensata para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada.

10. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$

11. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}-t^2\\2t\end{pmatrix}$

12. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&2&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}\operatorname{sen}t\\0\\0\end{pmatrix}$

13. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&2\\1&-1&4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{t}$

14. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -4 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ t\\ e^t\end{pmatrix}$

15. Considere la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{v}e^{\lambda t} \qquad (*)$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ. Supóngase además que $\mathbf{A}$ tiene n vectores característicos $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^n$ linealmente independientes con valores característicos distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente.

(a) Demuestre que $(*)$ no tiene soluciones $\psi(t)$ de la forma $\psi(t) = \mathbf{a}e^{\lambda t}$. *Sugerencia:* Escriba $\mathbf{a} = a_1\mathbf{v}^1 + \ldots + a_n\mathbf{v}^n$.

(b) Demuestre que $(*)$ tiene una solución $\psi(t)$ de la forma

$$\psi(t)=\mathbf{a}e^{\lambda t}+\mathbf{b}te^{\lambda t}.$$

Sugerencia: Demuestre que $\mathbf{b}$ es un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ y elíjalo de modo que sea posible resolver la ecuación diferencial.

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}=\mathbf{b}-\mathbf{v}.$$

En cada uno de los Problemas del 16 al 18, obtenga una solución particular $\psi(t)$ de la ecuación diferencial dada de la forma $\psi(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)$.

16. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -4\\ 4 & 1 & -4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$

17. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}e^{3t}$

18. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}e^{8t}$

3.13 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

El método de la transformada de Laplace descrito en el Capítulo 2 puede ser usado también para resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0. \qquad (1)$$

Sean

$$\mathbf{X}(s)=\begin{bmatrix}X_1(s)\\ \vdots\\ X_n(s)\end{bmatrix}=\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}=\begin{bmatrix}\int_0^\infty e^{-st}x_1(t)\,dt\\ \vdots\\ \int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\,dt\end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{F}(s)=\begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}=\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\}=\begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt \end{bmatrix}.$$

Tomando la transformada en ambos lados de (1) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\}&=\mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)\}=\mathbf{A}\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}+\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\}\\ &=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{F}(s),\end{aligned}$$

y a partir del Lema 3 de la Sección 2.9, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\}&=\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{\dot{x}_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{\dot{x}_n(t)\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sX_1(s)-x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s)-x_n(0) \end{bmatrix}\\ &=s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}^0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}^0=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{F}(s)$$

o bien

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s)=\mathbf{x}^0+\mathbf{F}(s), \qquad \mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

La Ecuación (2) es un sistema de n ecuaciones simultáneas para $X_1(s), \dots, X_n(s)$ y puede ser resuelta con diversos métodos. (Una manera especial es multiplicar ambos lados de (2) por $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.) Una vez que se conocen $X_1(s), \dots, X_n(s)$ es posible encontrar $x_l(t), \dots, x_n(t)$ invirtiendo las transformadas.

EJEMPLO 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t, \qquad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. Al tomar transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene

$$s\mathbf{X}(s)-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}(s)+\frac{1}{s-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o bien

$$(s-1)X_1(s)-4X_2(s)=2+\frac{1}{s-1}-$$
$$X_1(s)+(s-1)X_2(s)=1+\frac{1}{s-1}.$$

La solución de estas ecuaciones es

$$X_1(s)=\frac{2}{s-3}+\frac{1}{s^2-1}, \qquad X_2(s)=\frac{1}{s-3}+\frac{s}{(s-1)(s+1)(s-3)}.$$

Ahora bien,

$$\frac{2}{s-3}=\mathcal{L}\{2e^{3t}\}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{s^2-1}=\mathcal{L}\{\operatorname{senh} t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$x_1(t)=2e^{3t}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

Para invertir $X_2(s)$, puede recurrirse a fracciones parciales. Hágase

$$\frac{s}{(s-1)(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}.$$

Esto implica que

$$A(s+1)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s+1)=s. \tag{4}$$

Haciendo $s=1,-1$ y 3, respectivamente, en (4) se obtiene $A=-\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=\frac{3}{8}$. Por consiguiente,

$$x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1}+\frac{11}{8}\frac{1}{s-3}\right\}$$
$$=-\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{11}{8}e^{3t}.$$

EJERCICIOS

Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}t\\3e^t\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^t, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t, \quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ \tan t\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}4e^{t}\cos t\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

8. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

9. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ \delta(t-\pi)\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

10. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1-H_\pi(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

11. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

12. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

13. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{t},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

14. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^{t}\cos 2t\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

15. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

4 Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

es una función no lineal de $x_1, \ldots, x_n$. Desafortunadamente no se conocen métodos para resolver la ecuación (1). Por supuesto, que eso desconcierta mucho. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones no es necesario encontrar explícitamente las soluciones de (1). Por ejemplo, denótese por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las poblaciones en el tiempo t de dos especies que compiten entre sí por el alimento y el espacio vital limitados en su micro-

cosmos. Supóngase además que las tasas de crecimiento de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están gobernadas por la ecuación diferencial (1). En tal caso, no interesan los valores de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en todo tiempo t. Más bien, son de interés las propiedades cualitativas que presentan $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Concretamente, se desea contestar las preguntas siguientes:

1. ¿Hay valores ξ_1 y ξ_2 para los cuales ambas especies coexisten en un régimen permanente? Es decir, ¿existen números ξ_1 y ξ_2 tales que $x_1(t) \equiv \xi_1$, $x_2(t) \equiv \xi_2$ son una solución de (1)? Si tales valores existen se les llama *puntos de equilibrio* de (1).

2. Supóngase que las dos especies coexisten en equilibrio. Repentinamente, se agregan algunos miembros de la primera especie al microcosmos. ¿Permanecerán $x_1(t)$ y $x_2(t)$ cerca de los valores de equilibrio para todo tiempo futuro? Es posible tal vez que los miembros adicionales de la especie 1 le den a la misma una gran ventaja y pueda entonces eliminar a la segunda.

3. Supóngase que x_1 y x_2 tienen valores arbitrarios en $t = 0$. ¿Qué ocurre cuando t tiende a infinito? Triunfará una de las dos especies, o terminará la lucha en un empate?

Más generalmente, interesa determinar las siguientes propiedades de las soluciones de (1).

1. ¿Existen valores de equilibrio

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

para los cuales $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ es una solución de (1)?

2. Sea $\phi(t)$ una solución de (1). Supóngase que $\psi(t)$ es una segunda solución con $\psi(0)$ muy cerca de $\phi(0)$; es decir, $\psi_j(0)$ está muy cerca de $\phi_j(0)$, siendo $j = 1, \ldots, n$. ¿Permanecerá $\psi(t)$ cercano a $\phi(t)$ para todo tiempo futuro, o divergerá $\psi(t)$ de $\phi(t)$ al tender t a infinito? Esta pregunta se conoce como problema de *estabilidad*. Es el problema más fundamental en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y ha ocupado la atención de muchos matemáticos en los últimos cien años.

3. ¿Qué ocurre con las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de (1) cuando t tiende a infinito? ¿Tienden todas las soluciones a valores de equilibrio? Si no tienden a valores de equilibrio, ¿se aproximarán al menos a una solución periódica?

El presente capítulo está dedicado a responder estas tres preguntas. Es sorprendente que con frecuencia pueden darse respuestas satisfactorias a tales preguntas a pesar de no poder resolver explícitamente la ecuación (1). De hecho, la primera pregunta puede responderse de inmediato. Obsérvese $\mathbf{x}(t)$ es igual a cero si $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$. Por lo tanto, $\mathbf{x}^0$ es un valor de equilibrio de (1) si y sólo si

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^0) \equiv \mathbf{0}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Encontrar todos los valores de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1^3 + x_2.$$

SOLUCIÓN.

$$\mathbf{x}^0=\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

es un valor de equilibrio si y sólo si $1 - x_2^0 = 0$ y $(x_1^0)^3 + x_2^0 = 0$. Esto implica que $x_2^0 = 1$ y $x_1^0 = -1$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el único valor de equilibrio del sistema.

EJEMPLO 2 Hallar todas las soluciones de equilibrio del sistema

$$\frac{dx}{dt}=(x-1)(y-1), \qquad \frac{dy}{dt}=(x+1)(y+1).$$

SOLUCIÓN.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es un valor de equilibrio del sistema si y sólo si

$$(x_0 - 1)(y_0 - 1) = 0 \text{ y } (x_0 + 1)(y_0 + 1) = 0.$$

La primera ecuación se satisface si x_0, o bien y_0, es igual a 1, mientras que la segunda ecuación se satisface si x_0, o bien y_0, es igual a -1. Por lo tanto, $x = 1$, $y = -1$ y $x = -1$, $y = 1$ son las soluciones de equilibrio del sistema.

La cuestión de la estabilidad es de importancia primordial en todas las aplicaciones físicas, ya que nunca pueden medirse las condiciones iniciales con precisión. Considérese, por ejemplo, el caso de una partícula cuya masa es 1 kg sujeta a un resorte elástico cuya constante de elasticidad es 1 N/m y que se mueve en un medio sin fricción. Además actúa una fuerza externa $F(t) = \cos 2t$ sobre la partícula. Denótese por $y(t)$ la posición de la partícula en relación con su posición de equilibrio. Entonces $(d^2y/dt^2) + y = \cos 2t$. Haciendo $x_1 = y$, $x_2 = y'$ se transforma esta ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. De manera que

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_1+\cos 2t. \tag{3}$$

Las funciones $y_1(t) = \operatorname{sen} t$ y $y_2(t) = \cos t$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + y = 0$. Más aún, $y = -\frac{1}{3}\cos 2t$ es una solución particular de la ecuación no homogénea. Por lo tanto, cualquier solución

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

de (3) es de la forma

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cos 2t \\ \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En el instante $t = 0$ se mide la posición y la velocidad de la partícula y se obtiene

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Esto implica que $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{4}{3}$. Por consiguiente, la posición y la velocidad de la partícula para cualquier instante después están dadas por la ecuación

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t \\ -\frac{4}{3}\operatorname{sen} t + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Sin embargo, supóngase que las mediciones permiten un error de magnitud 10^{-4}. ¿Permanecerán la posición y la velocidad de la partícula cerca de los valores predichos por (5)? La respuesta a esta pregunta tiene que ser que sí, pues de lo contrario la mecánica newtoniana no tendría valor práctico. Afortunadamente puede demostrarse fácilmente, en este caso, que la posición y la velocidad de la partícula permanecen muy cerca de los valores predichos por (5). Denótense por $y(t)$ y $y'(t)$ los valores reales de $y(t)$ y $y'(t)$, respectivamente. En verdad se cumple que

$$y(t) - \hat{y}(t) = \left(\tfrac{4}{3} - c_2\right)\cos t - c_1 \operatorname{sen} t$$

$$y'(t) - \hat{y}'(t) = -c_1 \cos t - \left(\tfrac{4}{3} - c_2\right)\operatorname{sen} t$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes que satisfacen

$$-10^{-4} \leqslant c_1 \leqslant 10^{-4}, \qquad \tfrac{4}{3} - 10^{-4} \leqslant c_2 \leqslant \tfrac{4}{3} + 10^{-4}.$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$y(t) - \hat{y}(t) = \left[c_1^2 + \left(\tfrac{4}{3} - c_2\right)^2\right]^{1/2} \cos(t - \delta_1), \qquad \tan\delta_1 = \frac{c_1}{c_2 - \frac{4}{3}}$$

$$y'(t) - \hat{y}'(t) = \left[c_1^2 + \left(\tfrac{4}{3} - c_2\right)^2\right]^{1/2} \cos(t - \delta_2), \qquad \tan\delta_2 = \frac{\frac{4}{3} - c_2}{c_1}.$$

Por lo tanto, $y(t) - y(t)$ e $y'(t) - y'(t)$ están acotadas en valor absoluto por $[c_1^2 + (\frac{4}{3} - c_2)^2]^{1/2}$. Esta cantidad es a lo sumo $\sqrt{2}\ 10^{-4}$. Por lo tanto, los valores reales de $y(t)$ y $y'(t)$ están realmente cerca de los valores predichos por la ecuación (5).

Como un segundo ejemplo del concepto de estabilidad, considérese el caso de una partícula de masa m que está sujeta al extremo de un alambre o cuerda inelástica de longitud longitud l y masa despreciable. La cuerda no se flexiona y el sistema vibra libremente en un plano vertical. Esta configuración se llama usualmente *péndulo simple.* La ecuación de movimiento del péndulo es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen} y = 0$$

donde y es el ángulo que la cuerda forma con la vertical A0 (Fig. 1). Si $x_1 = y$ y $x_2 = dy/dt$, se encuentra que

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1. \tag{6}$$

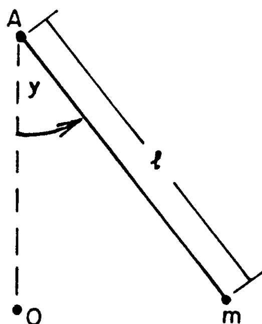


FIGURA 1.

El sistema de ecuaciones (6) tiene soluciones de equilibrio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$. (Si el péndulo es colocado en posición vertical, $y = \pi$, con velocidad cero, entonces permanecerá en esa posición para todo instante posterior.) Las dos soluciones de equilibrio tienen propiedades muy diferentes. Si se desvía ligeramente el péndulo de la posición de equilibrio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ impartiéndole una pequeña velocidad o desplazándolo un poco, entonces presentará pequeñas oscilaciones alrededor de $x_1 = 0$. Por otro lado, si se perturba ligeramente el péndulo desde su posición de equilibrio $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$, entonces presentará oscilaciones muy amplias alrededor de $x_1 = 0$, o bien girará sin interrupción. Así pues, la más pequeña perturbación provoca en el péndulo una desviación notable desde su posición de equilibrio $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$. Intuitivamente se diría que el valor de equilibrio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ de (6) es estable, mientras que el valor de equilibrio $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ de (6) es inestable. Este concepto se precisará en la Sección 4.2.

Por lo regular es muy difícil resolver el problema de la estabilidad ya que no se puede resolver (1) en forma explícita. El único caso posible de analizar es cuando $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ no depende explícitamente de t; es decir, cuando $\mathbf{f}$ es función solamente de $\mathbf{x}$. Las ecuaciones diferenciales que tienen dicha propiedad se denominan *autónomas*. Aun en el caso de ecuaciones diferenciales autónomas hay, en general, sólo dos casos en los que puede resolverse completamente el problema de la estabilidad. El primero es cuando $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y se tratará en la siguiente sección. El segundo es cuando se tiene interés sólo en la estabilidad de la solución de equilibrio de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Este caso se tratará en la Sección 4.3.

La cuestión 3 es muy importante en muchas aplicaciones, ya que una respuesta a la misma es una predicción acerca del comportamiento a largo plazo del sistema en estudio. En los casos que es posible, se da respuesta a esta cuestión en las Secciones 4.6 a 4.8, y se aplican los resultados a casos concretos muy importantes en las Secciones 4.9 a 4.12.

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 8, determine todos los valores de equilibrio de los sistemas de ecuaciones diferenciales dados.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x - x^2 - 2xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 2y - 2y^2 - 3xy$

2. $\dfrac{dx}{dt} = -\beta xy + \mu$

$\dfrac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y$

3. $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$

$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$

$\frac{dz}{dt} = z + x^2 + y^2$

4. $\frac{dx}{dt} = -x - xy^2$

$\frac{dy}{dt} = -y - yx^2$

$\frac{dz}{dt} = 1 - z + x^2$

5. $\frac{dx}{dt} = xy^2 - x$

$\frac{dy}{dt} = x \sin \pi y$

6. $\frac{dx}{dt} = \cos y$

$\frac{dy}{dt} = \sin x - 1$

7. $\frac{dx}{dt} = -1 - y - e^x$

$\frac{dy}{dt} = x^2 + y(e^x - 1)$

$\frac{dz}{dt} = x + \sin z$

8. $\frac{dx}{dt} = x - y^2$

$\frac{dy}{dt} = x^2 - y$

$\frac{dz}{dt} = e^z - x$

9. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{*}$$

(i) Demuestre que $x = 0, y = 0$ es el único punto de equilibrio de (*) si $ad - bc \neq 0$.

(ii) Demuestre que (*) tiene una recta de puntos de equilibrio si $ad - bc = 0$.

10. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ soluciones del problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x - y, \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

Suponga que se comete un error de magnitud 10^{-4} al medir $x(0)$ y $y(0)$. ¿Cuál es el máximo error que se comete al calcular $x(t)$, $y(t)$ para $0 \leq t < \infty$?

11. (a) Verifique que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

es la solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sea $\mathbf{x} = \psi(t)$ la solución de la anterior ecuación diferencial que satisface la condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que todas las componentes de $\psi(t)$ tienden a infinito, en valor absoluto, cuando $t \to \infty$.

4.2 ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

En esta sección se estudia el problema de estabilidad para soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas. Sea $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Interesa determinar si $\boldsymbol{\phi}(t)$ es estable o inestable. Es decir, si cualquier solución $\boldsymbol{\psi}(t)$ de (1) que empieza suficientemente cerca de $\boldsymbol{\phi}(t)$ en $t = 0$ permanece cercana a $\boldsymbol{\phi}(t)$ para todo instante posterior $t \geq 0$. Se iniciará con la siguiente definición formal de estabilidad.

DEFINICIÓN. La solución $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ de (1) es estable si cualquier solución $\boldsymbol{\psi}(t)$ de (1) que empieza suficientemente cerca de $\boldsymbol{\phi}(t)$ en $t = 0$ permanece cercana de $\boldsymbol{\phi}(t)$ para todo instante posterior t. La solución $\boldsymbol{\phi}(t)$ es inestable si hay al menos una solución $\boldsymbol{\psi}(t)$ de (1) que empiece cerca de $\boldsymbol{\phi}(t)$ en $t = 0$, pero no permanezca cerca de $\boldsymbol{\phi}(t)$ para todo instante después. Dicho con más precisión, la solución $\boldsymbol{\phi}(t)$ es estable si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\varepsilon), \qquad j = 1, \ldots, n$$

para toda solución $\boldsymbol{\psi}(t)$ de (1).

El problema de la estabilidad puede resolverse por completo para todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2}$$

Esto no es sorprendente, por supuesto, ya que puede resolverse la ecuación (2) exactamente. Se tiene el siguiente teorema de importancia.

TEOREMA 1. (a) *Toda solución* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ *de* (2) *es estable si todos los valores característicos de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa.*
(b) *Toda solución* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ *de* (2) *es inestable si al menos un valor característico de* $\mathbf{A}$ *tiene parte real positiva.*
(c) *Supóngase que todos los valores característicos de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real* ≤ 0 *y* $\lambda_1 = i\sigma_1, \ldots, \lambda_l = i\sigma_l$ *tienen parte real igual a cero. Supóngase además que* $\lambda_j = i\sigma_j$ *tiene multiplicidad* k_j. *Eso significa que el polinomio característico de* $\mathbf{A}$ *se puede factorizar como*

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \ldots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

donde todas las raíces de $q(\lambda)$ *tienen parte real negativa. Entonces toda solución* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ *de* (1) *es estable si* $\mathbf{A}$ *tiene* k_j *vectores característicos, linealmente independientes para cada valor característico* $\lambda_j = i\sigma_j$. *De otro modo, todas las soluciones* $\boldsymbol{\phi}(t)$ *son inestables.*

El primer paso para demostrar el Teorema 1 es mostrar que toda solución $\boldsymbol{\phi}(t)$ es estable si la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ lo es, y que toda solución $\boldsymbol{\phi}(t)$ es inestable

si $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ es también inestable. Para ello, sea $\psi(t)$ cualquier solución de (2). Obsérvese que $\mathbf{z}(t) = \phi(t) - \psi(t)$ es nuevamente una solución de (2). Por lo tanto, si la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable, entonces $\mathbf{z}(t) = \phi(t) - \psi(t)$ será pequeña si $\mathbf{z}(0) = \phi(0) - \psi(0)$ es suficientemente pequeña. De modo que toda solución $\phi(t)$ de (2) es estable. Por otro lado, supóngase que $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable. Entonces existe una solución $\mathbf{x} = \mathbf{h}(t)$ que es inicialmente muy pequeña pero se vuelve muy grande cuando t tiende a infinito. La función $\psi(t) = \phi(t) + \mathbf{h}(t)$ es claramente una solución de (2). Más aún, $\psi(t)$ está inicialmente muy cerca de $\phi(t)$ pero diverge de $\phi(t)$ cuando t se incrementa. Por lo tanto, toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es inestable.

El siguiente paso en la demostración del Teorema 1 es reducir el problema de hacer ver que son pequeñas n cantidades $\psi_j(t), j = 1, \ldots, n$, al problema mucho más sencillo de mostrar únicamente que una cantidad es pequeña. Tal cosa se logra introduciendo el concepto de magnitud (o longitud) de un vector.

DEFINICIÓN. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

un vector con n componentes. Los números $x_1, \ldots, x_n$ pueden ser reales o complejos. Se define la *magnitud* de x, y se denota por $\|\mathbf{x}\|$ como

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

entonces $\|\mathbf{x}\| = 3$ y si

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

entonces $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}$.

El concepto de magnitud de un vector corresponde al concepto de magnitud (o longitud) de un número. Obsérvese que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ para cualquier vector $\mathbf{x}$ y $\|\mathbf{x}\| = 0$ solamente si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Obsérvese también que

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \text{máx}\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\} = |\lambda| \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

Obsérvese por último que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \text{máx}\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leqslant \text{máx}\{|x_1|+|y_1|, \ldots, |x_n|+|y_n|\} \\ &\leqslant \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Así pues, la definición realmente coincide con el concepto de magnitud (o longitud).

En la Sección 4.7 se da una demostración geométrica sencilla del Teorema 1 para el caso $n = 2$. La siguiente demostración es válida para cualesquiera n.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. (a) Toda solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es de la forma $\psi(t) = e^{\mathbf{A}t}\psi(0)$. Sea $\phi_{ij}(t)$ el elemento ij de la matriz $e^{\mathbf{A}t}$, y sean $\psi_1^0, \ldots, \psi_n^0$ las componentes de $\psi(0)$. Entonces la componente i de $\psi(t)$ es

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \ldots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 \equiv \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(t)\psi_j^0.$$

Supóngase que todos los valores característicos de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa. Sea $-\alpha_1$ la mayor de las partes reales de los valores característicos de $\mathbf{A}$. Es posible mostrar fácilmente (Ejercicio 17) que para cualquier número $-\alpha$, con $-\alpha_1 < -\alpha < 0$, puede encontrarse un número K tal que $|\phi_{ij}(t)| \leq Ke^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. De modo que

$$|\psi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} Ke^{-\alpha t}|\psi_j^0| = Ke^{-\alpha t}\sum_{j=1}^{n}|\psi_j^0|$$

para un par de constantes positivas K y α. Ahora bien, $|\psi_j^0| \leq \|\psi(0)\|$. Por lo tanto,

$$\|\psi(t)\| = \text{máx}\{|\psi_1(t)|, \ldots, |\psi_n(t)|\} \leq nKe^{-\alpha t}\|\psi(0)\|.$$

Sea $\varepsilon < 0$ dada. Elíjase $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/nK$. Entonces, $\|\psi(t)\| < \varepsilon$ si $\|\psi(0)\| < \delta(\varepsilon)$ y $t \geq 0$, ya que

$$\|\psi(t)\| \leq nKe^{-\alpha t}\|\psi(0)\| < nK\varepsilon/nK = \varepsilon.$$

Por lo tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable.

(b) Sea λ un valor característico de $\mathbf{A}$ con parte real positiva y sea $\mathbf{v}$ un vector característico de $\mathbf{A}$ con valor característico λ. Entonces $\psi(t) = ce^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para cualquier constante c. Si λ es real, entonces $\mathbf{v}$ también lo es y $\|\psi(t)\| = |c|e^{\lambda t}\|\mathbf{v}\|$. Claramente $\|\psi(t)\|$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito, para cualquier elección de $c \neq 0$, sin importar cuán pequeña sea. Por lo tanto, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable. Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es complejo, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$ también lo es. En tal caso

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\text{sen}\beta t)(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) \\ &= e^{\alpha t}\left[(\mathbf{v}^1\cos\beta t - \mathbf{v}^2\text{sen}\beta t) + i(\mathbf{v}^1\text{sen}\beta t + \mathbf{v}^2\cos\beta t)\right] \end{aligned}$$

es una solución con valores complejos de (2). Por lo tanto,

$$\psi^1(t) = ce^{\alpha t}(\mathbf{v}^1\cos\beta t - \mathbf{v}^2\text{sen}\beta t)$$

es una solución con valores reales de (2), para cualquier elección de la constante c. Se tiene que $\|\psi^1(t)\|$ no está acotado cuando t tiende a infinito si c y alguno de los vectores $\mathbf{v}^1$ o $\mathbf{v}^2$ es diferente de cero. Así pues, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable.

(c) Si $\mathbf{A}$ tiene k_j vectores característicos linealmente independientes para cada valor característico $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidad k_j, entonces puede encontrarse una constante K tal que $|(e^{\mathbf{A}t})_{ij}| \leq K$ (Ejercicio 18). En tal caso $\|\psi(t)\| \leq nK\|\psi(0)\|$ para toda solución $\psi(t)$ de (2). De la demostración de (a) se sigue entonces inmediatamente que $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es estable.

Por otro lado, si $\mathbf{A}$ tiene menos de k_j vectores característicos linealmente independientes con valor característico $\lambda_j = i\sigma_j$, entonces $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ tiene soluciones $\psi(t)$ de la forma

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t}\left[\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - i\sigma_j\mathbf{I})\mathbf{v}\right]$$

donde $(\mathbf{A} - i\sigma_j\mathbf{I})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Si $\sigma_j = 0$, entonces $\psi(t) = c(\mathbf{v} + t\mathbf{Av})$ toma valores reales. Más aún, $\|\psi(t)\|$ no está acotada cuando t tiende a infinito, para cualquier elección de $c \neq 0$. En forma similar, tanto la parte real como la imaginaria de $\psi(t)$ no están acotadas en magnitud para $\psi(0) \neq \mathbf{0}$ arbitrariamente pequeño, si $\sigma_j \neq 0$. Por lo tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es inestable.

Si todos los valores característicos de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, entonces toda solución $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Esto se sigue inmediatamente de la estimación $\|\mathbf{x}(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}(0)\|$, la cual se obtuvo en la demostración de la parte (a) del Teorema 1. Así pues, no sólo es estable la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, sino que toda solución $\psi(t)$ de (2) tiende a ella cuando t tiende a infinito. Este tipo de estabilidad tan fuerte se conoce como *estabilidad asintótica*.

DEFINICIÓN. Una solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (1) es asintóticamente estable si es estable y si toda solución $\psi(t)$ que empieza suficientemente cerca de $\phi(t)$ tiende a $\phi(t)$ cuando t tiende a infinito. En particular, una solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0$ de (1) es asintóticamente estable si toda solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ de (1) que empieza suficientemente cerca de $\mathbf{x}^0$ en el instante $t = 0$ no sólo permanece cercana a $\mathbf{x}^0$ para todo instante posterior, sino que tiende a $\mathbf{x}^0$ cuando t tiende a infinito.

OBSERVACIÓN. La estabilidad asintótica de cualquier solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2) es claramente equivalente a la estabilidad asintótica de la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$.

EJEMPLO 1 Determinar si cada una de las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

es estable, asintóticamente estable o inestable.

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = (\det \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5).$$

Por lo tanto, $\lambda = -1$ y $\lambda = -1 \pm 2i$ son los valores característicos de $\mathbf{A}$. Dado que los tres valores característicos tienen parte real negativa, se concluye que toda solución de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ es asintóticamente estable.

EJEMPLO 2 Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

es inestable

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25.$$

Por lo tanto, $\lambda = 6$ y $\lambda = -4$ son los valores característicos de $\mathbf{A}$. Dado que un valor característico de $\mathbf{A}$ es positivo, se concluye que toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ es inestable.

EJEMPLO 3 Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

es estable pero no asintóticamente estable.

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6.$$

Así pues, los valores característicos de $\mathbf{A}$ son $\lambda = \pm\sqrt{6}\,i$. Por lo tanto, por la parte (c) del Teorema 1, se tiene que toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ es estable. Sin embargo, ninguna solución es asintóticamente estable. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que la solución general de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\sqrt{6}\,t \\ 2\cos\sqrt{6}\,t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos\sqrt{6}\,t \\ 2\,\mathrm{sen}\sqrt{6}\,t \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, toda solución $\mathbf{x}(t)$ es periódica, con periodo $2\pi/\sqrt{6}$, y ninguna solución $\mathbf{x}(t)$ (excepto $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$) tiende a 0 cuando t tiende a infinito.

EJEMPLO 4 Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es inestable

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

es

$$p(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & -2 \\ -6 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda^2(\lambda+7).$$

Por lo tanto, los valores característicos de $\mathbf{A}$ son $\lambda = -7$ y $\lambda = 0$. Cualquier vector característico $\mathbf{v}$ de $\mathbf{A}$ con valor característico 0 debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior implica que $v_1 = 3v_2/2$ y $v_3 = -3v_2$, de modo que cualquier vector característico $\mathbf{v}$ de $\mathbf{A}$ con valor característico 0 debe ser de la forma

$$\mathbf{v}=c\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, toda solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es inestable, ya que $\lambda = 0$ es un valor característico de multiplicidad 2, y $\mathbf{A}$ tiene solamente un vector característico linealmente independiente con valor característico 0.

EJERCICIOS

Determine la estabilidad o inestabilidad de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -6 \\ 10 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

10. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

11. Determine si las soluciones $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv 1$ de la ecuación escalar $\dot{x} = x(1 - x)$ son estables o inestables.

12. Determine si las soluciones $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv 1$ de la ecuación escalar $\dot{x} = -x(1 - x)$ son estables o inestables.

13. Considere la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2$. Demuestre que todas las soluciones $x(t)$ con $x(0) \geq 0$ son inestables, mientras que todas las soluciones $x(t)$ con $x(0) < 0$ son asintóticamente estables.

14. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{1}{2}\left[x_1^2 + (x_1^2 + 4x_2^2)^{1/2}\right]x_1. \end{aligned} \qquad (*)$$

(a) Demuestre que

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,\mathrm{sen}(ct+d) \\ c^2\cos(ct+d) \end{pmatrix}$$

es una solución de (*) para cualquier elección de constantes c y d.

(b) Suponga que una solución $\mathbf{x}(t)$ de (*) está determinada de manera única una vez que se prescriben $x_1(0)$ y $x_2(0)$. Pruebe que (a) representa la solución general de (*).

(c) Demuestre que la solución $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de (*) es estable pero no asintóticamente estable.

(d) Demuestre que toda solución $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ de (*) es inestable.

15. Pruebe que la estabilidad de cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación no homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ es equivalente a la estabilidad de la solución de equilibrio $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ de la ecuación homogénea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

16. Determine la estabilidad o inestabilidad de todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

17. (a) Sea $f(t) = t^a e^{-bt}$, para constantes positivas a y b, y sea c un número positivo menor que b. Demuestre que es posible encontrar una constante positiva K tal que $|f(t)| \leq Ke^{-ct}$, $0 \leq t < \infty$. *Sugerencia:* Demuestre que $f(t)/e^{-ct}$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.

(b) Suponga que todos los valores característicos de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa. Pruebe que pueden encontrarse constantes positivas K y α tales que $|(e^{\mathbf{A}t})_{ij}| \leq Ke^{-\alpha t}$ para $1 \leq i, j \leq n$. *Indicación:* Cada una de las componentes de $e^{\mathbf{A}t}$ es una combinación lineal finita de funciones de la forma $q(t)e^{\lambda t}$, donde $q(t)$ es un polinomio en t (de grado $\leq n - 1$) y λ es un valor característico de $\mathbf{A}$.

18. (a) Sea $\mathbf{x}(t) = e^{i\sigma t}\mathbf{v}$, σ real, una solución con valores complejos de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Demuestre que tanto la parte real como la parte imaginaria de $\mathbf{x}(t)$ son soluciones acotadas de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) Suponga que todos los valores característicos de $\mathbf{A}$ tienen parte real ≤ 0 y que $\lambda_1 = i\sigma_1, \ldots, \lambda_l = i\sigma_l$ tienen parte real igual a cero. Suponga que $\lambda_j = i\sigma_j$

tiene multiplicidad k_j y que **A** tiene k_j vectores característicos linealmente independientes, para cada valor característico λ_j, $j = 1, \ldots, l$. Demuestre que es posible encontrar una constante K tal que $|(e^{\mathbf{A}t})_{ij}| \leq K$.

19. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y defínase $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Pruebe que

(i) $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 0$ y $\|\mathbf{x}\|_1 = 0$ sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(ii) $\|\lambda\mathbf{x}\|_1 = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|_1$
(iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$.

20. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y defínase $\|\mathbf{x}\|_2 = [|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2]^{l/2}$. Demuestre que

(i) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq 0$ y $\|\mathbf{x}\|_2 = 0$ sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(ii) $\|\lambda\mathbf{x}\|_2 = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|_2$
(iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2$.

21. Muestre que existen constantes M y N tales que

$$M\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant N\|\mathbf{x}\|_1.$$

4.3 Estabilidad de las soluciones de equilibrio

En la Sección 4.2 se analizó la sencilla ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. La siguiente ecuación en nivel de sencillez es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

es muy pequeño comparando con $\mathbf{x}$. Concretamente se supone que

$$\frac{g_1(\mathbf{x})}{\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}}, \ldots, \frac{g_n(\mathbf{x})}{\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}}$$

son funciones continuas de $x_1, \ldots, x_n$ que se anulan para $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Tal

cosa siempre ocurre si cada una de las componentes de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es un polinomio en $x_1, \ldots, x_n$ que empieza con términos de orden 2 o superior. Por ejemplo, si

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

entonces tanto $x_1 x_2^2/\text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$ y $x_1 x_2/\text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$ son funciones continuas de $x_1 = x_2$ que se anulan para $x_1 = x_2 = 0$.

Si $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es una solución de equilibrio de (1). Sería deseable determinar si es estable o inestable. A primera vista parecería imposible el hacerlo, ya que no puede resolverse explícitamente la ecuación (1). Sin embargo, si $\mathbf{x}$ es muy pequeña, entonces $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es muy pequeña comparada con $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Por consiguiente, parece plausible que la estabilidad de la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ de (1) debería estar determinada por la estabilidad de la ecuación "aproximada" $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. En el siguiente teorema se muestra que tal cosa es casi cierta.

TEOREMA 2. *Supóngase que la función con valores vectoriales*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x})/\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

es una función continua de $x_1, \ldots, x_n$ *que se anula para* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Entonces*
(a) *La solución de equilibrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de* (1) *es asintóticamente estable si la solución de equilibrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de la ecuación "linealizada"* $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *es asintóticamente estable. De manera equivalente, la solución* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de* (1) *es asintóticamente estable si todos los valores característicos de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa.*
(b) *La solución de equilibrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de* (1) *es inestable si al menos un valor característico de* $\mathbf{A}$ *tiene parte real positiva.*
(c) *La estabilidad de la solución de equilibrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de* (1) *no se puede determinar a partir de la estabilidad de la solución de equilibrio* $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *de* $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *si todos los valores característicos de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real* ≤ 0 *pero al menos un valor característico de* $\mathbf{A}$ *tiene parte real igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. (a) La parte clave en las demostraciones de estabilidad es, muchas veces, el uso de la fórmula de variación de parámetros de la Sección 3.12. Dicha fórmula implica que toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{g}(\mathbf{x}(s))\,ds. \tag{2}$$

Se desea mostrar que $\|\mathbf{x}(t)\|$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Para ello, recuérdese que si todos los valores característicos o eigenvalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, entonces es posible encontrar constantes K y α tales que (Ejercicio 17 de la Sección 4.2).

$$\|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}(0)\|$$

y

$$\|e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{g}(\mathbf{x}(s))\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}\|\mathbf{g}(\mathbf{x}(s))\|.$$

Mas aún, es posible encontrar una constante positiva σ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \frac{\alpha}{2K}\|\mathbf{x}\| \quad \text{if} \quad \|\mathbf{x}\| \leq \sigma.$$

Esto se sigue inmediatamente de la suposición de que $g(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|$ es continua y se anula en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por consiguiente, la ecuación (2) implica que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| &\leq \|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)\| + \int_0^t \|e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{g}(\mathbf{x}(s))\|\,ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\|\mathbf{x}(s)\|\,ds\end{aligned}$$

mientras $\|\mathbf{x}(s)\| \leq \sigma$, $0 \leq s \leq t$. Al multiplicar por $e^{\alpha t}$ ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$e^{\alpha t}\|\mathbf{x}(t)\| \leq K\|\mathbf{x}(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\alpha s}\|\mathbf{x}(s)\|\,ds. \tag{3}$$

La desigualdad (3) puede simplificarse haciendo $z(t) = e^{\alpha t}\|\mathbf{x}(t)\|$, ya que entonces

$$z(t) \leq K\|\mathbf{x}(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t z(s)\,ds. \tag{4}$$

Parecería propio derivar con respecto a t ambos lados de (4). Sin embargo, no es posible, en general, derivar ambos lados de una desigualdad sin alterar su sentido. Esta dificultad puede evitarse con el siguiente artificio. Hágase

$$U(t) = \frac{\alpha}{2}\int_0^t z(s)\,ds.$$

Entonces

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2}z(t) \leq \frac{\alpha}{2}K\|\mathbf{x}(0)\| + \frac{\alpha}{2}U(t)$$

o bien

$$\frac{dU(t)}{dt} - \frac{\alpha}{2}U(t) \leq \frac{\alpha K}{2}\|\mathbf{x}(0)\|.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por el factor de integración $e^{-\alpha t/2}$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}e^{-\alpha t/2}U \leq \frac{\alpha K}{2}\|\mathbf{x}(0)\|e^{-\alpha t/2},$$

o bien

$$\frac{d}{dt}e^{-\alpha t/2}\left[U(t) + K\|\mathbf{x}(0)\|\right] \leq 0.$$

Por consiguiente,

$$e^{-\alpha t/2}\left[U(t) + K\|\mathbf{x}(0)\|\right] \leq U(0) + K\|\mathbf{x}(0)\| = K\|\mathbf{x}(0)\|,$$

de modo que $U(t) \leq -K\|\mathbf{x}(0)\| + K\|\mathbf{x}(0)\|e^{\alpha t/2}$. Regresando ahora a la desigualdad (4) se ve que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| = e^{-\alpha t}z(t) &\leq e^{-\alpha t}\left[K\|\mathbf{x}(0)\| + U(t)\right] \\ &\leq K\|\mathbf{x}(0)\|e^{-\alpha t/2}\end{aligned} \tag{5}$$

mientras $\|\mathbf{x}(s)\| \leq \sigma$, $0 \leq s \leq t$. Ahora bien, si $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \sigma/K$, entonces la desigualdad (5) garantiza que $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sigma$ para todo instante posterior t. Por lo tanto, la desigualdad (5) es cierta para toda $t \geq 0$ si $\|\mathbf{x}(0)\| \leq \sigma/K$. Por último, obsérvese que de (5) se deduce que $\|\mathbf{x}(t)\| \leq K\|\mathbf{x}(0)\|$ y $\|\mathbf{x}(t)\|$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Por lo tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ de (1) es asintóticamente estable.
(b) La demostración de (b) es demasiado difícil para presentarla aquí.
(c) Se darán dos ecuaciones diferenciales de la forma (1) para las cuales el término no lineal $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ determina la estabilidad de la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$. Considérese primero el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \tag{6}$$

La ecuación linealizada es

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

y los valores característicos de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

son $\pm i$. Para analizar el comportamiento del sistema no lineal (6) se multiplica la primera ecuación por x_1, la segunda ecuación por x_2 y se suman; eso da como resultado

$$\begin{aligned} x_1\frac{dx_1}{dt} + x_2\frac{dx_2}{dt} &= -x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)^2. \end{aligned}$$

Pero

$$x_1\frac{dx_1}{dt} + x_2\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2.$$

Esto implica que

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \frac{c}{1 + 2ct},$$

donde

$$c = x_1^2(0) + x_2^2(0).$$

Así pues, $x_1^2(t) + x_2^2(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito para cualesquiera soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de (6). Más aún, el valor de $x_1^2 + x_2^2$ en cualquier tiempo t es siempre menor que su valor en $t = 0$. Se concluye, por lo tanto, que $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ es asintóticamente estable.

Por otra parte, considérese el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \tag{7}$$

En este caso la linealización es también

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Sin embargo, en este caso, $(d/dt)(x_1^2 + x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2)^2$. Esto implica que

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)=\frac{c}{1-2ct}, \qquad c=x_1^2(0)+x_2^2(0).$$

Nótese que cualquier solución $x_1(t)$, $x_2(t)$ de (7) con $x_1^2(0) + x_2^2(0) \neq 0$ tiende a infinito en algún instante dado. Se concluye, por lo tanto, que la solución de equilibrio $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ es inestable.

EJEMPLO 1 Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1+x_2+3x_3+9x_2^3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -6x_2-5x_3+7x_3^5$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3+x_1^2+x_2^2.$$

Determinar, en lo posible, si la solución de equilibrio $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 0$ es estable o inestable.

SOLUCIÓN. Exprésese el sistema en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ donde

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 9x_2^3 \\ 7x_3^5 \\ x_1^2+x_2^2 \end{bmatrix}.$$

La función $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ satisface las hipótesis del Teorema 2 y los valores característicos de $\mathbf{A}$ son -2, -6 y -1. Por lo tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.

El Teorema 2 sirve para determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio de ecuaciones diferenciales autónomas arbitrarias. Sea $\mathbf{x}^0$ un valor de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

y hágase $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0$. Entonces

$$\dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}^0+\mathbf{z}). \tag{9}$$

Por supuesto que, $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ es una solución de equilibrio de (9) y la estabilidad de $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ es equivalente a la estabilidad de $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Como siguiente paso se mostrará que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z})$, donde $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ es pequeña comparada con $\mathbf{z}$.

LEMA 1. Supóngase que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tiene dos derivadas parciales continuas con res-

pecto a cada una de sus variables $x_1, \ldots, x_n$. Entonces $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0+\mathbf{z})=\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)+\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{g}(\mathbf{z}) \tag{10}$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{z})/\text{máx}\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$ es una función continua de $\mathbf{z}$ que se anula para $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN #1. La ecuación (10) es consecuencia inmediata del Teorema de Taylor, el cual establece que cada una de las componentes $f_j(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ de $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ puede escribirse en la forma

$$f_j(\mathbf{x}^0+\mathbf{z})=f_j(\mathbf{x}^0)+\frac{\partial f_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}z_1+\ldots+\frac{\partial f_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}z_n+g_j(\mathbf{z})$$

donde $g_j(\mathbf{z})/\text{máx}\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$ es una función continua de $\mathbf{z}$ que se anula para $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0+\mathbf{z})=\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)+\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{g}(\mathbf{z})$$

donde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

DEMOSTRACIÓN #2. Si cada una de las componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un polinomio (posiblemente infinito) en $x_1, \ldots, x_n$, entonces cada una de las componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ es un polinomio en $z_1, \ldots, a_n$. De modo que

$$f_j(\mathbf{x}^0+\mathbf{z})=a_{j0}+a_{j1}z_1+\ldots+a_{jn}z_n+g_j(\mathbf{z}) \tag{11}$$

donde $g_j(\mathbf{z})$ es un polinomio en $z_1, \ldots, z_n$ que empieza con términos de orden dos. Haciendo $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ en (11) se obtiene $f_j(\mathbf{x}^0) = a_{j0}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0+\mathbf{z})=\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)+\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{g}(\mathbf{z}), \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y cada una de las componentes de $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ es un polinomio en $z_1, \ldots, z_n$, que empieza con términos de orden dos. $\square$

El Teorema 2 y el Lema 1 proporcionan el siguiente método para determinar si una solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es estable o inestable:

1. Expresar $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$.
2. Escríbase $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z})$ en la forma $\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{z})$, donde $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ es un polinomio en $z_1, \ldots, z_n$ con valores vectoriales, que empieza con términos de orden dos o mayor.

3. Calcular los valores característicos de **A**. Si todos los eigenvalores de **A** tienen parte real negativa, entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ es asintóticamente estable. Si algún valor característico de **A** tiene parte real positiva, entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^0$ es inestable.

EJEMPLO 2 Encontrar todas las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy, \qquad \frac{dy}{dt} = x - y^3 \tag{12}$$

y determinar (si fuera posible) su estabilidad o su inestabilidad.

SOLUCIÓN. Las ecuaciones $1 - xy = 0$ y $x - y^3 = 0$ implican que $x = 1$, $y = 1$, o bien $x = -1$, $y = -1$. Por lo tanto, $x(t) \equiv 1$, $y(t) \equiv 1$ y $x(t) \equiv -1$, $y(t) \equiv -1$ son las únicas soluciones de equilibrio de (12).

(i) $x(t) = 1$, $y(t) = 1$: Hágase $u = x - 1$, $v = y - 1$. Entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} = 1 - (1+u)(1+v) = -u - v - uv$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} = (1+u) - (1+v)^3 = u - 3v - 3v^2 - v^3.$$

Este sistema se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} uv \\ 3v^2 + v^3 \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

tiene solamente un valor característico $\lambda = -2$, ya que

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(3+\lambda) + 1 = (\lambda+2)^2.$$

Por lo tanto, la solución de equilibrio $x(t) \equiv 1$, $y(t) \equiv 1$ de (12) es asintóticamente estable.

(ii) $x(t) \equiv -1$, $y(t) \equiv -1$: Hágase $u = x + 1$, $v = y + 1$. Entonces,

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} = 1 - (u-1)(v-1) = u + v - uv$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} = (u-1) - (v-1)^3 = u - 3v + 3v^2 - v^3.$$

Este sistema puede expresarse en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -uv \\ 3v^2 - v^3 \end{pmatrix}.$$

Los valores característicos de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5}$, cuya parte real es negativa, y $\lambda_2 = -1 + \sqrt{5}$, cuya parte real es positiva. Por lo que la solución de equilibrio $x(t) \equiv -1$, $y(t) \equiv -1$ de (12) es inestable.

EJEMPLO 3 Encontrar todas las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(x+y), \qquad \frac{dy}{dt} = e^x - 1 \tag{13}$$

y determinar si son estables o inestables.

SOLUCIÓN. Los puntos de equilibrio de (13) están determinados por las dos ecuaciones $\operatorname{sen}(x + y) = 0$ y $e^x - 1 = 0$. Esta segunda ecuación implica que $x = 0$ y la primera ecuación implica entonces que $x + y = n\pi$, n un entero. Por consiguiente, $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, son las soluciones de equilibrio de (13). Haciendo $u = x$, $v = y - n\pi$, se obtiene

$$\frac{du}{dt} = \operatorname{sen}(u + v + n\pi), \qquad \frac{dv}{dt} = e^u - 1.$$

Ahora bien, $\operatorname{sen}(u + v + n\pi) = \cos n\pi \operatorname{sen}(u + v) = (-1)^n \operatorname{sen}(u + v)$. Por lo tanto,

$$\frac{du}{dt} = (-1)^n \operatorname{sen}(u+v), \qquad \frac{dv}{dt} = e^u - 1.$$

Obsérvese además que

$$\operatorname{sen}(u+v) = u + v - \frac{(u+v)^3}{3!} + \ldots, \qquad e^u - 1 = u + \frac{u^2}{2!} + \ldots.$$

Por consiguiente,

$$\frac{du}{dt} = (-1)^n\left[(u+v) - \frac{(u+v)^3}{3!} + \ldots\right], \qquad \frac{dv}{dt} = u + \frac{u^2}{2!} + \ldots.$$

Es posible entonces expresar el sistema en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{términos de orden 2 o superior, en } u \text{ y en } v$$

Los valores característicos de la matriz

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son

$$\lambda_1 = \frac{(-1)^n - \sqrt{1 + 4(-1)^n}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{(-1)^n + \sqrt{1 + 4(-1)^n}}{2}.$$

Cuando n es par, $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ es negativa, y $\lambda_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ es positiva. Por consiguiente, $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv n\pi$ es inestable si n es par. Si n es impar, tanto $\lambda_1 = (-1 - \sqrt{3}\,i)/2$ como $\lambda_2 = (-1 + \sqrt{3}\,i)/2$ tienen parte real negativa. Por lo tanto, la solución de equilibrio $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv n\pi$ es asintóticamente estable si n es impar.

EJERCICIOS

Halle todas las soluciones de equilibrio de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y determine, en lo posible, si son estables o inestables.

1. $\dot{x} = x - x^3 - xy^2$
$\dot{y} = 2y - y^5 - yx^4$

2. $\dot{x} = x^2 + y^2 - 1$
$\dot{y} = x^2 - y^2$

3. $\dot{x} = x^2 + y^2 - 1$
$\dot{y} = 2xy$

4. $\dot{x} = 6x - 6x^2 - 2xy$
$\dot{y} = 4y - 4y^2 - 2xy$

5. $\dot{x} = \tan(x + y)$
$\dot{y} = x + x^3$

6. $\dot{x} = e^y - x$
$\dot{y} = e^x + y$

Verifique que el origen es un punto de equilibrio de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y determine, en lo posible, si es estable o inestable.

7. $\dot{x} = y + 3x^2$
$\dot{y} = x - 3y^2$

8. $\dot{x} = y + \cos y - 1$
$\dot{y} = -\operatorname{sen} x + x^3$

9. $\dot{x} = e^{x+y} - 1$
$\dot{y} = \operatorname{sen}(x + y)$

10. $\dot{x} = \ln(1 + x + y^2)$
$\dot{y} = -y + x^3$

11. $\dot{x} = \cos y - \operatorname{sen} x - 1$
$\dot{y} = x - y - y^2$

12. $\dot{x} = 8x - 3y + e^y - 1$
$\dot{y} = \operatorname{sen} x^2 - \ln(1 - x - y)$

13. $\dot{x} = -x - y - (x^2 + y^2)^{3/2}$
$\dot{y} = x - y + (x^2 + y^2)^{3/2}$

14. $\dot{x} = x - y + z^2$
$\dot{y} = y + z - x^2$
$\dot{z} = z - x + y^2$

15. $\dot{x} = e^{x+y+z} - 1$
$\dot{y} = \operatorname{sen}(x + y + z)$
$\dot{z} = x - y - z^2$

16. $\dot{x} = \ln(1 - z)$
$\dot{y} = \ln(1 - x)$
$\dot{z} = \ln(1 - y)$

17. $\dot{x} = x - \cos y - z + 1$
$\dot{y} = y - \cos z - x + 1$
$\dot{z} = z - \cos x - y + 1$

18. (a) Encuentre todas las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = gz - hx, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c}{a + bx} - ky, \qquad \frac{dz}{dt} = ey - fz.$$

(este sistema es un modelo para el control de síntesis de proteínas.)

(b) Determine la estabilidad o inestabilidad de dichas soluciones si alguno de los valores g, e, o c es igual a cero.

4.4 EL PLANO FASE

En esta sección se inicia el estudio de la teoría "geométrica" de ecuaciones diferenciales. Para simplificar, se supondrá en la mayoría de los casos que $n = 2$. El objetivo es obtener una descripción tan completa como sea posible de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y). \tag{1}$$

Con este objeto, obsérvese que toda solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ de (1) define una curva en el espacio tridimensional t, x, y. Es decir, el conjunto de todos los puntos $(t, x(t), y(t))$ describe una curva en el espacio tridimensional t, x, y. Por ejemplo, la solución $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x$$

describe una hélice (Fig. 1) en el espacio (t, x, y).

La teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales empieza con la importante observación de que toda solución $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, de (1), también define una curva en el plano xy. De hecho, conforme t aumenta de t_0 a t_1, el conjunto de puntos $(x(t), y(t))$ describe una curva C en el plano xy. Dicha curva se conoce como *órbita* o *trayectoria* de la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$. El plano xy se denomina *plano fase* de las soluciones de (1). De manera equivalente, la órbita de $x(t)$, $y(t)$ puede considerarse la trayectoria que describe la solución en el plano xy.

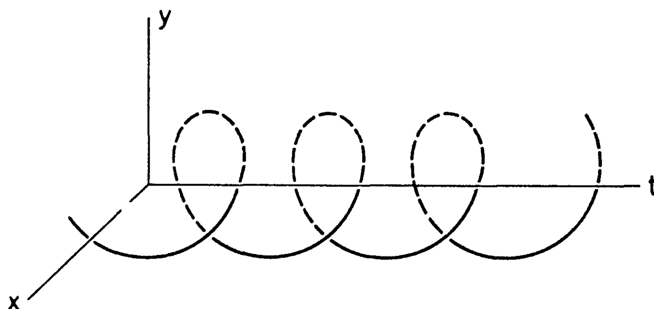


FIGURA 1. Gráfica de la solución $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

EJEMPLO 1 Es posible verificar fácilmente que $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$. Conforme t aumenta de 0 a 2π, el conjunto de puntos $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ describe la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. Por lo tanto, dicha curva $x^2 + y^2 = 1$ es la órbita de la solución $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Conforme t aumenta de 0 a infinito, el conjunto de puntos $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ describe la misma circunferencia un número infinito de veces.

EJEMPLO 2 Puede verificarse fácilmente que $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $dx/dt = -x - y$, $dy/dt = x - y$. Conforme t va de $-\infty$ a ∞, el conjunto de puntos $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$ describe una espiral en el plano xy. Por lo tanto, la órbita de la solución $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$ es la espiral que se muestra en la Figura 2.

EJEMPLO 3 Es posible verificar fácilmente que $x = 3t + 2$, $y = 5t + 7$, $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales $dx/dt = 3$, $dy/dt = 5$. Conforme t va de $-\infty$ a ∞, el conjunto de puntos $(3t + 2, 5t + 7)$ describe una recta que pasa por el punto (2, 7) con pendiente $\frac{5}{3}$. Por lo tanto, la órbita de la solución $x = 3t + 2$, $y = 5t + 7$ es la recta $y = \frac{5}{3}(x - 2) + 7$, $-\infty < x < \infty$.

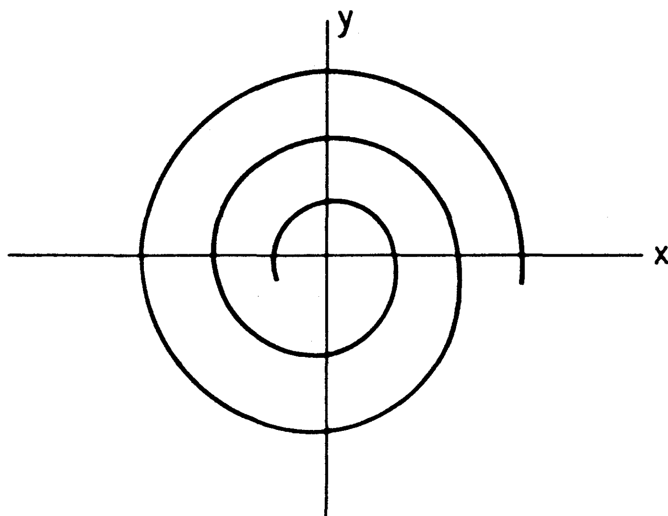


FIGURA 2. Órbita de $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$.

EJEMPLO 4 Puede verificarse fácilmente que $x = 3t^2 + 2$, $y = 5t^2 + 7$, $0 \le t < \infty$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 6[(y-7)/5]^{1/2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 10[(x-2)/3]^{1/2}.$$

Todos los puntos $(3t^2 + 2, 5t^2 2 + 7)$ se encuentran sobre la recta de pendiente $\frac{5}{3}$ que pasa por (2, 7). Sin embargo, x siempre es mayor que o igual a 2, y y siempre es mayor que o igual a 7. Por lo tanto, la órbita de la solución $x = 3t^2 + 2$, $y = 5t^2 + 7$, $0 \le t < \infty$, es la recta $y = \frac{5}{3}(x-2) + 7$, $2 \le x < \infty$.

EJEMPLO 5 Puede verificarse fácilmente que $x = 3t + 2$, $y = 5t^2 + 7$, $-\infty < t < \infty$, es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y - \frac{5}{9}(x-2)^2 - 4, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{10}{3}(x-2).$$

La órbita de dicha solución es el conjunto de todos los puntos $(x, y) = (3t + 2, 5t^2 + 7)$. Introduciendo $t = \frac{1}{3}(x-2)$ se ve que $y = \frac{5}{9}(x-2)^2 + 7$. Por lo tanto, la órbita de la solución $x = 3t + 2$, $y = 5t^2 + 7$ es la parábola $y = \frac{5}{9}(x-2)^2 + 7$, $|x| < \infty$.

Una de las ventajas de considerar la órbita de la solución y no la solución misma es que, con frecuencia, es posible obtener la órbita de una solución sin conocimiento previo de la solución. Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución de (1). Si $x'(t)$ es diferente de cero en $t = t_1$, entonces se puede resolver con $t = t(x)$ en una vecindad o entorno del punto $x_1 = x(t_1)$ (Ejercicio 4). Así pues, para t cerca de t_1, la órbita de la solución $x(t)$, $y(t)$ es la curva $y = y(t(x))$. Obsérvese además que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Así pues, las órbitas de las soluciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ de (1) son las curvas soluciones de la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{2}$$

De modo que no es necesario encontrar una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) para calcular su órbita, sólo se necesita resolver la ecuación diferencial escalar de primer orden (2).

OBSERVACIÓN. A partir de este momento se usará la frase "las órbitas de (1)" para denotar la totalidad de órbitas de las soluciones de (1).

EJEMPLO 6 Las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x^2 \tag{3}$$

son las curvas soluciones de la ecuación escalar $dy/dx = x^2/y^2$. Esta ecuación es de variables separables, y puede verse fácilmente que todas las soluciones son de la forma $y(x) = (x^3 - c)^{1/3}$, c constante. Así que las órbitas de (3) son el conjunto de todas las curvas $y = (x^3 - c)^{1/3}$.

EJEMPLO 7 Las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y(1 + x^2 + y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = -2x(1 + x^2 + y^2) \tag{4}$$

son las curvas soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(1 + x^2 + y^2)}{y(1 + x^2 + y^2)} = -\frac{2x}{y}.$$

Esta ecuación es separable y todas las soluciones son de la forma $\frac{1}{2}y^2 + x^2 = c^2$. Por lo tanto, las órbitas de (4) son la familia de elipses $\frac{1}{2}y^2 + x^2 = c^2$.

ADVERTENCIA. Una curva solución de (2) es una órbita de (1) sólo si dx/dt y dy/dt son distintas de cero simultáneamente a lo largo de la solución. Si una curva solución de (2) pasa por un punto de equilibrio de (1), entonces la curva solución completa no es una órbita. Se trata más bien de la unión de varias órbitas distintas. Por ejemplo, considérese el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y(1 - x^2 - y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = -x(1 - x^2 - y^2). \tag{5}$$

Las curvas soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{x}{y}$$

son la familia de circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = c^2$. Obsérvese, sin embargo, que todo punto de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ es un punto de equilibrio de (5). De modo que las órbitas de este sistema son las circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$, para $c \neq 1$, y todos los puntos de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. De manera

similar, las órbitas de (3) son las curvas $y = (x^3 - c)^{1/3}$, $c \neq 0$; las semirrectas $y = x$, $x > 0$, así como $y = x$, $x < 0$, y el punto $(0, 0)$.

En general, no es posible resolver explícitamente la Ecuación (2). Por consiguiente, tampoco lo es, en general, encontrar las órbitas de (1). Sin embargo, sí es posible obtener una descripción precisa de las órbitas de (1). Tal cosa se puede debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) determina un *campo de direcciones* en el plano xy. Es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales (1) indica cuán rápido se mueve una solución a lo largo de su órbita, y en qué dirección se mueve. Dicho con más precisión, sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución de (1). Conforme t aumenta, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de la órbita de dicha solución. Su velocidad en la dirección x es dx/dt; y en y es dy/dt y la magnitud de su velocidad es $[(dx(t)/dt)^2 + (dy(t)/dt)^2]^{1/2}$. Pero $dx(t)/dt = f(x(t), y(t))$ y $dy(t)/dt = g(x(t, y(t))$. Por lo tanto, en cada punto (x, y) del plano fase de (1) se conoce (i) la tangente a la órbita en (x, y) (la recta que pasa por (x, y) con números directores $f(x, y)$ y $g(x, y)$, respectivamente, y (ii) la magnitud de la velocidad (o rapidez) $[f^2(x, y)\ 2\ g^2(x, y)]^{1/2}$, con la que la solución recorre su órbita. Como se verá en las secciones de la 4.8 a la 13, esta información frecuentemente puede servir para obtener propiedades importantes de las órbitas de (1).

La noción de órbita puede extenderse fácilmente al caso $n > 2$. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una solución de la ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{6}$$

en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$. Conforme t aumenta de t_0 a t_1, el conjunto de puntos $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ describe una curva C en espacio de dimensión n $x_1, x_2, \dots, x_n$. Esta curva es la órbita de la solución $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, para $t_0 \leq t \leq t_1$, y el espacio de dimensión n, $x_1, \dots, x_n$, es el plano fase de las soluciones de (6).

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas 1 a 3, verifique que $x(t)$, $y(t)$ es una solución del sistema de ecuaciones dado. Encuentre también su órbita.

1. $\dot{x} = 1,\quad \dot{y} = 2(1 - x)\mathrm{sen}(1 - x)^2$
$x(t) = 1 + t,\quad y(t) = \cos t^2$

2. $\dot{x} = e^{-x},\quad \dot{y} = e^{e^x - 1}$
$x(t) = \ln(1 + t),\quad y(t) = e^t$

3. $\dot{x} = 1 + x^2,\quad \dot{y} = (1 + x^2)\sec^2 x$
$x(t) = \tan t,\quad y(t) = \tan(\tan t)$

4. Suponga que $x'(t_1) \neq 0$. Demuestre que es posible resolver la ecuación $x = x(t)$ para $t = t(x)$ en la vecindad del punto $x_1 = x(t_1)$. *Sugerencia:* Si $x'(t_1) \neq 0$, entonces $x(t)$ es una función monótona creciente o monótona decreciente de t en la vecindad de $t = t_1$.

Encuentre las órbitas de cada uno de los siguientes sistemas.

5. $\dot{x} = y,$
$\dot{y} = -x$

6. $\dot{x} = y(1 + x^2 + y^2),$
$\dot{y} = -x(1 + x^2 + y^2)$

7. $\dot{x} = y(1 + x + y),$
$\dot{y} = -x(1 + x + y)$

8. $\dot{x} = y + x^2 y,$
$\dot{y} = 3x + xy^2$

9. $\dot{x} = xye^{-3x},$
$\dot{y} = -2xy^2$

10. $\dot{x} = 4y,$
$\dot{y} = x + xy^2$

11. $\dot{x} = ax - bxy,$
$\dot{y} = cx - dxy$
(a, b, c, d positivas)

12. $\dot{x} = x^2 + \cos y,$
$\dot{y} = -2xy$

13. $\dot{x} = 2xy,$
$\dot{y} = x^2 - y^2$

14. $\dot{x} = y + \operatorname{sen} x,$
$\dot{y} = x - y \cos x$

4.5 Teorías matemáticas de la guerra

4.5.1 *La teoría del conflicto de L.F. Richardson*

En esta sección se elaborará un modelo matemático que describe la relación entre dos países, cada uno de ellos decidido a defenderse contra un posible ataque del otro. Ambos consideran como real la posibilidad de que ocurra un ataque entre sí, y por ello basan su temor en la predisposición del otro en gastar en armamento. El modelo se basa en el trabajo de Lewis Fry Richardson. No se trata de hacer afirmaciones con base científica en relación con la política exterior, o predecir en qué fecha se iniciará el siguiente gran conflicto bélico. Tal cosa es, por supuesto, imposible. Se trata de una descripción de lo que la gente haría si no dejara de pensar. Como Richardson mismo asevera: "¿Por qué tantas naciones, aunque no lo deseen, aumentan constantemente sus armamentos como si estuvieran movidas mecánicamente a hacerlo? Porque, según opino, siguen sus tradiciones rígidas y sus instintos mecánicos y porque aún no han hecho un esfuerzo intelectual y moral suficientemente intenso para controlar la situación. El proceso que se describe en seguida con las ecuaciones no debe entenderse como inevitable. Es lo que ocurriría si se permitiera al instinto y la tradición actuar sin control.

Denótese por $x = x(t)$ al potencial bélico, o armamento, del primer país, al cual se llamará Acalandia (o "Tierra de acá"), y sea $y(t)$ al potencial bélico del segundo país, el cual se denominará Allalandia (o "Tierra de allá"). La rapidez de variación de $x(t)$ depende obviamente de la predisposición bélica $y(t)$ de Allalandia y del temor que Acalandia siente hacia aquél país. En un modelo sencillo se representarán estos términos por ky y g, respectivamente, donde k y g son constantes positivas. Ambos términos provocan un incremento en x. Por otro lado, los costos del armamento tienen un efecto restrictivo sobre dx/dt. Dicho efecto se representará por $-\alpha x$, donde α es una constante positiva. Un análisis similar se cumple para dy/dt. Por consiguiente, $x = x(t)$, $y = y(t)$ es una solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ky - \alpha x + g, \qquad \frac{dy}{dt} = lx - \beta y + h. \tag{1}$$

OBSERVACIÓN 1. El modelo (1) no se limita a dos naciones; también puede representar la relación entre dos alianzas de naciones. Por ejemplo, Allalandia y Acalandia pueden representar, respectivamente, la alianza de Francia con Rusia, y de Alemania con Austria-Hungría durante los años que precedieron a la Primera Guerra Mundial.

A través de la historia ha habido constantes discusiones acerca de las causas de la guerra. Hace más de dos mil años Tucídides afirmó que el armamento provoca guerras. En su reseña sobre la guerra del Peloponeso escribe: "Creo que la causa ateniense, lo que alarmó a los espartanos o lacedemonios obligándolos a ir a la guerra". Sir Edward Grey, el secretario del exterior del gobierno inglés durante la Primera Guerra Mundial, es de la misma opinión. Escribe: "El incremento en el armamento, el cual supuestamente debería producir en cada nación consciencia de fortaleza y sensación de seguridad, no ocasiona tales efectos. Por lo contrario, genera una consciencia de la fortaleza del otro país y una sensación de miedo. El gran acopio de armas en Europa y el sentimiento de inseguridad y miedo causado por él, fue lo que hizo inevitable el conflicto. Esa es la realidad del origen de la Gran Guerra".

Por otro lado, L.S. Amery, un miembro del parlamento británico durante la década de 1930, no comparte tal parecer. Cuando la opinión de Sir Edward Grey fue citada en la Cámara de los Comunes, Amery replicó: "Con el debido respeto que se merece la memoria de un eminente estadista, considero que tales afirmaciones son completamente equivocadas. El armamento no fue sino el síntoma de la pugna de ambiciones e ideales de aquellas fuerzas nacionalistas que dieron origen a la conflagración. La guerra se desencadenó debido a que Serbia, Italia y Rumania deseaban desesperadamente incorporar a su territorio regiones que pertenecían en aquel entonces al Imperio Austrohúngaro y las cuales no estaba éste dispuesto a ceder sin luchar. Francia estaba preparada, en caso de que se presentara la ocasión, para tratar de recuperar la región de Alsacia-Lorena. Fue en estos hechos, en el insoluble conflicto de ambiciones, y no en el armamento mismo, donde residían las causas de la guerra."

El sistema de ecuaciones (1) tiene en cuenta ambas teorías de conflicto. Tucídides y Sir Edward Grey tomarían g y h pequeñas comparadas con k y l, mientras que Mr. Amery tomaría k y l pequeñas en comparación con g y h.

El sistema (1) tiene varias implicaciones importantes. Supóngase que tanto g como h son iguales a cero. Entonces $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ es una solución de equilibrio de (1). Es decir, si x, y, g y h son iguales a cero simultáneamente, entonces $x(t)$ y $y(t)$ permanecerán también iguales a cero. Esta situación ideal constituye una paz permanente al establecer el desarme y favorecer la calma y la satisfacción. Ha existido desde 1817 en la frontera entre Canadá y los Estados Unidos, y desde 1905 en la frontera entre Noruega y Suecia.

Las ecuaciones implican, además, que un desarme mutuo sin confianza recíproca no es permanente. Supóngase que x y y se anulan simultáneamente en algún tiempo $t = t_0$. En ese momento $dx/dt = g$ y $dy/dt = h$. Así pues, x y y no serán iguales a cero si g y h son positivas. En vez de ello, ambos países volverán al camino de las armas.

La condición de desarme unilateral corresponde a hacer $y = 0$ en un cierto tiempo. En tal momento, $dy/dt = lx + h$. Eso implica que y no permanecerá nula si alguno de los valores x o h es positivo. Así pues, el desarme unilateral nunca es permanente. Esto coincide con el hecho histórico de que Alemania, cuyo ejército fue reducido a 100 000 efectivos por el Tratado de Versalles, un nivel muy por abajo de varios de sus vecinos, favoreció en su rearme durante los años 1933-1936.

Una carrera armamentista se presenta cuando los términos de "defensa" predominan en (1). En tal caso

$$\frac{dx}{dt}=ky, \qquad \frac{dy}{dt}=lx. \tag{2}$$

Toda solución de (2) es de la forma

$$x(t)=Ae^{\sqrt{kl}\,t}+Be^{-\sqrt{kl}\,t}, \qquad y(t)=\sqrt{\frac{l}{k}}\left[Ae^{\sqrt{kl}\,t}-Be^{-\sqrt{kl}\,t}\right].$$

Por lo tanto, $x(t)$ y $y(t)$ tienden a infinito si A es positiva. Este hecho puede ser interpretado como "guerra".

Ahora bien, el sistema de ecuaciones (1) no es totalmente correcto, ya que no toma en cuenta la cooperación ni el intercambio comercial entre Allalandia y Acalandia. Como se puede ver actualmente, la cooperación entre países tiende a disminuir los temores y sospechas. El modelo puede corregirse cambiando el significado de $x(t)$ y $y(t)$. Considérense las variables $x(t)$ y $y(t)$ como "amenazas" menos "cooperación". Concretamente, hágase $x = U - U_0$ y $y = V - V_0$, donde U es el presupuesto de defensa de Acalandia, V es el presupuesto de defensa de Allalandia, U_0 es la cantidad de bienes que Acalandia exporta a Allalandia, y V_0 es la cantidad de bienes que Allalandia exporta a Acalandia. Nótese que la cooperación incita a la cooperación recíproca, del mismo modo que el armamentismo provoca más armamentismo. Además, los países tienden a reducir su cooperación en la medida que conlleva gastos. Así que el sistema de ecuaciones (1) describe aún el caso más general de relaciones.

El sistema (1) tiene una sola solución de equilibrio

$$x=x_0=\frac{kh+\beta g}{\alpha\beta-kl}, \qquad y=y_0=\frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta-kl} \tag{3}$$

si $\alpha\beta - kl \neq 0$. Lo que interesa ahora es determinar si la solución de equilibrio es estable o inestable. Para ello, escríbase (1) en la forma $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}$, donde

$$\mathbf{w}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}=\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{pmatrix}.$$

La solución de equilibrio es

$$\mathbf{w}=\mathbf{w}_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathbf{A}\mathbf{w}_0 + \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Tomando $\mathbf{z} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0$ se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{w}}=\mathbf{A}\mathbf{w}+\mathbf{f}=\mathbf{A}(\mathbf{z}+\mathbf{w}_0)+\mathbf{f}=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{A}\mathbf{w}_0+\mathbf{f}=\mathbf{A}\mathbf{z}.$$

Claramente, la solución de equilibrio $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0$ de $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{f}$ es estable si y sólo si $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ es una solución estable de $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$. Para determinar la estabilidad de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ se calcula

$$p(\lambda)=\det\begin{pmatrix} -\alpha-\lambda & k \\ l & -\beta-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta-kl.$$

Las raíces de $p(\lambda)$ son

$$\lambda=\frac{-(\alpha+\beta)\pm\left[(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta-kl)\right]^{1/2}}{2}$$

$$=\frac{-(\alpha+\beta)\pm\left[(\alpha-\beta)^2+4kl\right]^{1/2}}{2}.$$

Nótese que las dos raíces son reales y diferentes de cero. Más aún, ambas son negativas si $\alpha\beta - kl > 0$, y una raíz es positiva si $\alpha\beta - kl < 0$. Así pues, $z(t) \equiv \mathbf{0}$ y, por consiguiente, la solución de equilibrio $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$, es estable si $\alpha\beta - kl > 0$, e inestable si $\alpha\beta - kl < 0$.

Ahora se abordará el difícil problema de estimar los coeficientes α, β, k, l, g, h. Obviamente, no hay manera de medir g y h. Sin embargo, es posible obtener estimaciones razonables para α, β, k y l. Obsérvese que las unidades para estos coeficientes son recíprocas de tiempo. Los físicos e ingenieros llamarían a α^{-1} y β^{-1} tiempos de relajación, ya que si y y g fueron idénticamente nulas, entonces $x(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}x(t_0)$. Esto implica que $x(t_0 + \alpha^{-1}) = x(t_0)/e$. Por lo tanto, α^{-1} es el tiempo requerido para que el armamento de Acalandia se reduzca en la proporción 2.718 si el país no tiene desconfianza y ningún otro país posee armamento. Richardson estima que α^{-1} es el tiempo que dura en funciones el parlamento de Acalandia. Así que, para Gran Bretaña $\alpha = 0.2$, ya que el tiempo de duración del Parlamento Británico es de cinco años.

Para estimar k y l, considérese un caso hipotético en el cual $g = 0$ y $y = y_1$, de modo que $dx/dt = ky_1 - \alpha x$. Cuando $x = 0$, $1/k = y_1/(dx/dt)$. Así que $1/k$ es el tiempo requerido para que Acalandia alcance a Allalandia, suponiendo (i) que el armamento de Allalandia permanece constante, (ii) no hay desconfianza, y (iii) el costo del armamento no frena a Acalandia. Considérese ahora el rearme alemán durante los años 1933-1936. Alemania inició su nueva época prácticamente sin armamento y alcanzó a sus vecinos en casi tres años. Suponiendo que el efecto de frenado de α se compensó aproximadamente con la gran desconfianza alemana, se toma $k = 0.3$ (año)$^{-1}$ para Alemania. Obsérvese, además, que obviamente k es proporcional al desarrollo industrial de un país. De modo que para un país con la mitad de la capacidad industrial de Alemania se tiene $k = 0.15$, y para otro con el triple de capacidad industrial germana, $k = 0.9$.

Ahora se comparará el modelo con la carrera armamentista en Europa en los años de 1909 a 1914. Francia estaba aliada con Rusia, y Alemania con Austria-Hungría. Ni Italia ni Gran Bretaña se aliaron definitivamente con alguno de los bandos. Así pues, Acalandia representará la alianza de Francia con Rusia, y Allalandia, la alianza de Alemania con Austria-Hungría. Dado que ambas alianzas eran aproximadamente de igual tamaño, se toma $k = l$, y dado que cada una de las uniones tenía aproximadamente el triple de tamaño que Alemania, se toma entonces $k = l = 0.9$. Se supone además que $\alpha = \beta = 0.2$. Entonces,

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha x+ky+g,\qquad \frac{dy}{dt}=kx-\alpha y+h. \tag{4}$$

La ecuación (4) tiene sólo un punto de equilbrio

$$x_0=\frac{kh+\alpha g}{\alpha^2-k^2},\qquad y_0=\frac{kg+\alpha h}{\alpha^2-k^2}.$$

Dicha solución es inestable ya que

$$\alpha\beta - kl = \alpha^2 - k^2 = 0.04 - 0.81 = -0.77.$$

Esto coincide, por supuesto, con el hecho histórico de que las dos alianzas llegaron a la guerra entre sí.

Ahora bien, el modelo que se construyó es una aproximación burda, ya que se supuso que las desconfianzas g y h permanecen constantes en el tiempo. Tal cosa es obviamente falsa. Las desconfianzas g y h no son siquiera funciones continuas en el tiempo, pues experimentan instantáneamente saltos de gran magnitud. (Sin embargo, es aceptable suponer que g y h son relativamente constantes en largos lapsos.) A pesar de todo, el sistema de ecuaciones (4) aún proporciona una descripción muy precisa de la carrera armamentista que precedió a la Primera Guerra Mundial. Para demostrarlo, súmense las dos ecuaciones de (4), de lo que resulta

$$\frac{d}{dt}(x+y) = (k-\alpha)(x+y) + g + h. \tag{5}$$

Recuérdese que $x = U - U_0$ y $y = V - V_0$, donde U y V son los presupuestos de defensa de una y otra alianza, y U_0 y V_0 son las cantidades de bienes que se exportan desde cada una de las alianzas hacia la otra. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(U+V) = (k-\alpha)\left\{U+V-\left[U_0+V_0-\frac{g+h}{k-\alpha}-\frac{1}{k-\alpha}\frac{d}{dt}(U_0+V_0)\right]\right\}. \tag{6}$$

En la Tabla 1 se muestran los presupuestos de defensa de las dos coaliciones.

TABLA 1. Presupuestos de defensa expresados en millones de libras esterlinas

	1909	1910	1911	1912	1913
Francia	48.6	50.9	57.1	63.2	74.7
Rusia	66.7	68.5	70.7	81.8	92.0
Alemania	63.1	62.0	62.5	68.2	95.4
Austria-Hungría	20.8	23.4	24.6	25.5	26.9
Total $U + V$	199.2	204.8	214.9	238.7	289.0
$\Delta(U + V)$	5.6	10.1	23.8	50.3	
$U + V$ en la misma fecha	202.0	209.8	226.8	263.8	

En la Figura 1 se presenta el incremento anual $U + V$ en función del promedio de $U + V$ en los dos años que se sirvieron para formar el incremento. Nótese cuán cerca están de la línea recta los cuatro puntos, denotados por ○;

$$\Delta(U+V) = 0.73(U+V-194). \tag{7}$$

Así pues, la política exterior realmente tiene una predecibilidad de máquina. Las ecuaciones (6) y (7) implican que

$$g+h = (k-\alpha)(U_0+V_0) - \Delta(U_0+V_0) - 194$$

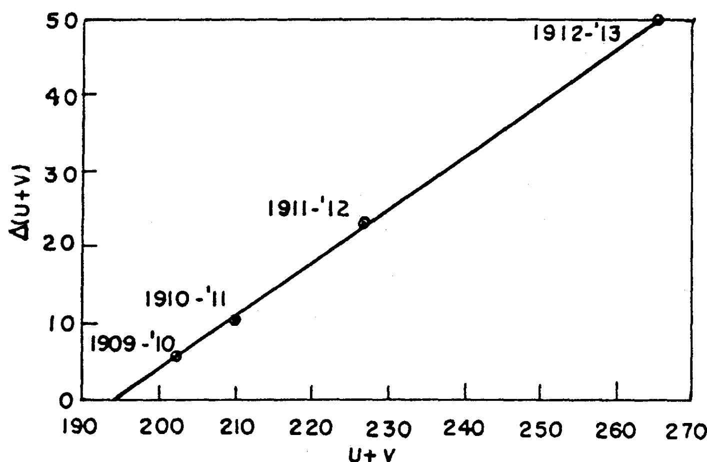


FIGURA 1. Gráfica de $\Delta(U + V)$ en función de $U + V$.

y $k - \alpha = 0.73$. Esto muestra una coincidencia excelente con las estimaciones de Richardson de 0.9 para k y 0.2 para α. Obsérvese, por último, que de (7) se obtiene que el total de los presupuestos de defensa de las dos alianzas aumentará si $U + V$ es mayor que 194 millones (de libras), y de lo contrario disminuirá. En realidad, los gastos de defensa de las dos alianzas ascendían a 199. millones en 1909, mientras que el intercambio comercial entre las dos alianzas ascendía solamente a 171.8 millones. Fue así como que se inició una carrera armamentista que más tarde condujo a la Gran Guerra.

BIBLIOGRAFÍA

Richardson, L.F., "Generalized foreign politics", *The British Journal of Psychology,* suplemento monográfico, No. 23, 1939.

EJERCICIOS

1. Suponga que lo que impulsa a un gobierno a su arme no es la magnitud del armamento de otro país, sino la clase entre el propio y el de otra nación. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(y-x) - \alpha x + g, \qquad \frac{dy}{dt} = l(x-y) - \beta y + h.$$

Demuestre que toda solución de este sistema de ecuaciones es estable si $k_1 l_1 < (\alpha_1 + k_1)(\beta_1 + l_1)$, e inestable si $k_1 l_1 > (\alpha_1 + k_1)(\beta_1 + l_1)$.

2. Considere el caso de tres países, cada uno de los cuales tiene el mismo coeficiente de defensa k y el mismo coeficiente de restricción α. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + ky + kz + g_1$$

$$\frac{dy}{dt} = kx - \alpha y + kz + g_2$$

$$\frac{dz}{dt} = kx + ky - \alpha z + g_3.$$

Haciendo

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\alpha & k & k \\ k & -\alpha & k \\ k & k & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

se encuentra que $\mathbf{u} = \mathbf{Au} + \mathbf{g}$.

(a) Demuestre que $p(\lambda) \equiv \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\alpha + \lambda)^3 + 3k^2(\alpha + \lambda) + 2k^3$.

(b) Demuestre que $p(\lambda) = 0$ si $\lambda = -\alpha - k$. Use esta información para encontrar las dos raíces restantes de $p(\lambda)$.

(c) Pruebe que toda solución $\mathbf{u}(t)$ es estable si $2k < \alpha$, e inestable si $2k > \alpha$.

3. Suponga, en el Problema 2, que el país z es pacifista, mientras que x y y son países belicosos. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + ky + kz + g_1 \\ \frac{dy}{dt} &= kx - \alpha y + kz + g_2 \qquad (*) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \cdot x + 0 \cdot y - \alpha z + g_3. \end{aligned}$$

Demuestre que toda solución $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de (*) es estable si $k < \alpha$, e inestable si $k >$tα.

4.5.2 *Modelos de combate de Lanchester y la batalla de Iwo Jima*

Durante la Primera Guerra Mundial, F.W. Lanchester [4] señaló la importancia de la concentración de tropas en el combate moderno. Construyó modelos matemáticos de los cuales esperaba que pudieran obtenerse los resultados de una acción de combate. En la presente sección se deducirán dos de esos modelos, el de una fuerza de guerra "convencional" contra otra fuerza también "convencional", y el de una fuerza de este último tipo contra una fuerza de guerrilla. A continuación se resolverán los modelos o ecuaciones y se deducirá la "ley de Lanchester de los cuadrados", la cual establece que la "intensidad" de un combate es proporcional al cuadrado del número de combatientes que participan en la lucha. Por último, se ajustará uno de estos modelos con sorprendente precisión a la batalla de Iwo Jima que ocurrió en el Pacífico durante la Segunda Guerra Mundial.

(a) *Construcción de los modelos*

Supóngase que una "fuerza x" y una "fuerza y" se enfrentan en combate. Para simplificar, se define el poderío de cada una el número de sus combatientes. (Véase en Howes y Thrall [3], otra definición de poderío bélico de combate.) Siendo así, denótese por $x(t)$ y $y(t)$ al número de combatientes de la fuerza x y de la fuerza y, respectivamente, donde t se mide en días a partir del inicio de la contienda. Claramente, la rapidez de variación de cada una de estas cantidades es igual a la *tasa de refuerzo* menos la *tasa de pérdidas operacionales* menos la *tasa de pérdidas en combate.*

Tasa de pérdidas operacionales. Esta intensidad de variación de una fuerza de combate es su tasa de pérdidas debida a contratiempos que no ocurren en el combate, es decir,

por deserción, enfermedad, etcétera. Lanchester propuso que la tasa de pérdidas operacionales de una fuerza de combate es proporcional a su poderío. Sin embargo, tal cosa no parece ser realista. Por ejemplo, la tasa de deserciones en una fuerza de combate depende de factores psicológicos y de otra clase que son difíciles de describir, sin mencionar su cuantificación. Aquí se tomará el camino fácil considerando sólo aquellos encuentros en los que las tasas de pérdidas operacionales sean despreciables.

Tasas de pérdidas en combate. Supóngase que la fuerza x es una fuerza "convencional" que opera, comparativamente hablando, en campo abierto, y que todo efectivo de la misma está " a la distancia de muerte" desde el enemigo y. Supóngase también que tan pronto como la fuerza "convencional" sufre una pérdida, el fuego se concentra alrededor de los combatientes restantes. En estas condiciones "ideales", la tasa de pérdidas en combate de una fuerza "convencional" x es igual a $ay(t)$ para alguna constante positiva a. Esta constante se conoce como *coeficiente de efectividad en combate* de la fuerza y.

La situación es muy diferente si x es una fuerza de guerrilla, la cual es invisible a sus oponentes (y) y ocupa una región R. La fuerza y hace fuego hacia la región R pero no puede saber si causa bajas a sus oponentes. Es claro que la tasa de pérdidas en combate para una fuerza de guerrilla x debe ser proporcional a $x(t)$, ya que cuanto mayor sea $x(t)$, tanto mayor será la probabilidad de que un disparo del oponente sea certero. Por otro lado, la tasa de pérdidas en combate para x también es proporcional a $y(t)$, pues cuanto mayor sea y, tanto mayor será el número de aciertos sobre x. Así pues, la tasa de pérdidas en combate para una fuerza de guerrilla x es igual a $cx(t)y(t)$, donde la constante c se conoce como *coeficiente de efectividad en combate del oponente y*.

Tasa de refuerzo. La tasa de refuerzo de una fuerza de combate es la tasa según la cual se incorporan nuevos efectivos (o son retirados otros) del campo de batalla. Las tasas de refuerzo de las fuerzas x y y se denotarán por $f(t)$ y gt, respectivamente.

Según los supuestos enlistados arriba, es posible ahora escribir los dos siguientes modelos lanchesterianos de combate para fuerza convencional-guerrilla.

$$\text{Combate ``convencional''} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx + g(t) \end{cases} \tag{1a}$$

$$\begin{matrix}\text{Combate ``convencional''-guerrilla:} \\ (x = \text{guerrilla})\end{matrix} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cxy + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -dx + g(t) \end{cases} \tag{1b}$$

El sistema de ecuaciones (1a) es un sistema lineal y puede resolverse explícitamente una vez que se conocen a, b, $f(t)$ y $g(t)$. Por otro lado, el sistema de ecuaciones (1b) es no lineal y su resolución es mucho más difícil. (De hecho, es posible obtenerla solamente con la ayuda de una computadora digital.)

Es muy instructivo considerar el caso especial en que las tasas de refuerzo son igua-

les a cero. Tal situación se presenta cuando dos fuerzas están "aisladas". En ese caso, las ecuaciones (1a) y (1b) se reducen a los sistemas más sencillos

$$\frac{dx}{dt} = -ay, \qquad \frac{dy}{dt} = -bx \tag{2a}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = -cxy, \qquad \frac{dy}{dt} = -dx. \tag{2b}$$

Combate "convencional": Ley de los cuadrados. Las órbitas del sistema (2a) son las curvas solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \qquad \text{o bien} \qquad ay\frac{dy}{dx} = bx.$$

Al integrar esta ecuación se obtiene

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = K. \tag{3}$$

Las curvas (3) definen una familia de hipérbolas en el plano xy. En la Figura 1 se muestran sus gráficas. Las flechas sobre las curvas indican el sentido o dirección de cambio de los poderíos conforme pasa el tiempo.

Se adoptará el criterio de que una fuerza gana la batalla si la otra es eliminada primero. Entonces y gana si $K > 0$, pues la fuerza x es eliminada cuando $y(t)$ desciende al nivel $\sqrt{K/a}$. Análogamente, x gana si $K < 0$.

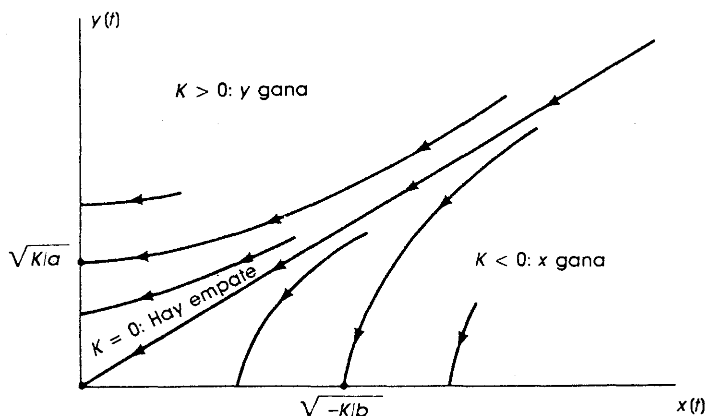


FIGURA 1. Hipérbolas definidas por (3).

OBSERVACIÓN 1. La ecuación (3) se conoce usualmente como "ley de Lanchester de los cuadrados", y el sistema (2a) se denomina modelo de la ley de los cuadrados, ya que el poderío de las fuerzas enemigas aparece *en forma cuadrática* en (3). Esta terminología es más bien anómala, ya que en realidad el sistema (2a) es un sistema lineal.

OBSERVACIÓN 2. La fuerza y buscará siempre una situación en la que los parámetros garanticen que $K > 0$. Es decir, la fuerza y demanda que se cumpla la desigualdad

$$ay_0^2 > bx_0^2$$

Esto puede lograrse incrementando a; es decir, usando armas más poderosas y certeras, o bien aumentando la fuerza inicial y_0. Nótese que duplicar a da como resultado la duplicación de ay_0^2 al *cuádruplo de su valor*. Esta es la clave de la ley de los cuadrados de Lanchester para la guerra con combates de tipo común o "convencional".

Combate "convencional"-guerrilla. Las órbitas del sistema (2b) son las curvas solución de

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{cxy}=\frac{d}{cy}. \tag{4}$$

Multiplicando ambos lados de (4) por cy e integrando, se obtiene

$$cy^2-2dx=cy_0^2-2dx_0=M. \tag{5}$$

Las curvas (5) definen una familia de parábolas en el plano xy. En la Figura 2 se indican sus gráficos. La fuerza y gana si $M>0$, ya que la fuerza x es eliminada en el momento en que $y(t)$ desciende al nivel $\sqrt{M/c}$. Análogamente, x gana si $M<0$.

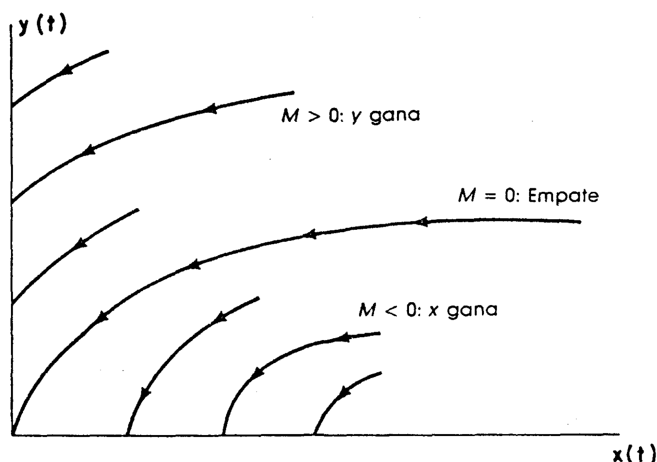


FIGURA 2. Las parábolas definidas por (5)

OBSERVACIÓN. Usualmente resulta imposible determinar de antemano los valores numéricos de los coeficientes de combate a, b, c, d. Parecería entonces que los modelos de combate de Lanchester tienen poca o ninguna aplicación en los combates reales. Sin embargo, no es tal el caso. Como se verá más adelante, suele ser posible determinar valores adecuados para a y b (o bien, para c y d) usando información de la batalla misma. Una vez que se tienen estos valores para un enfrentamiento, se conocen los valores para todos los demás combates que se libre en condiciones similares.

(b) *La batalla de Iwo Jima*

Una de las batallas más violentas librada en la Segunda Guerra Mundial fue la que se desarrolló en la isla de Iwo Jima, en el Pacífico, 660 millas al sur de Tokio. El alto mando de las fuerzas de combate Gringas deseaba capturar Iwo Jima y usar-

la como base para bombarderos cercana a la tierra firme japonesa, en tanto que el alto mando japonés necesitaba la isla como base para aviones de combate que atacarían a las naves de la Marina estadunidense en su camino a bombardear Tokio o alguna otra ciudad japonesa importante. La invasión por Estados Unidos a Iwo Jima se inició el 19 de febrero de 1945, y las luchas intensas se extendieron a lo largo de un mes. Ambos bandos sufrieron severas pérdidas (Tabla 1). Los japoneses habían recibido la orden de pelear hasta el último hombre, y eso fue exactamente lo que hicieron. La isla fue declarada "segura" por las fuerzas militares de Estados Unidos 28 días después de iniciada la batalla, y 8 días después dejó de haber cualquier tipo de combate activo. (¡Los últimos dos soldados japoneses sobrevivientes se rindieron en 1951!)

TABLA 1. Pérdidas de efectivos militares en Iwo Jima

Pérdidas totales de Estados Unidos en Iwo Jima

	Muertos, desaparecidos, o fallecidos a causa de heridas	Heridos	Fatiga de combate	Total
Infantes de Marina:	5 931	17 272	2 648	25 851
Unidades de la armada:				
Embarcaciones y unidades aéreas	633	1 158	1 791	
Personal de sanidad	195	529	724	
Personal de servicio auxiliar	51	218	269	
Médicos y dentistas	2	12	14	
Unidades del ejército en combate	9	28	37	
Totales	6 821	19 217	2 648	28 686

Pérdidas japoneses en Iwo Jima

		Prisioneros	Muertos
Fuerzas de defensa (efectivos estimados)			
21 000	Infantes de Marina	216	20 000
	Miembros del ejército	867	
	Total	1 083	

(Newcomb [6], pág. 296.)

Se dispone de la siguiente información acerca de la citada batalla de Iwo Jima.

1. *Tasas de refuerzo.* Durante el periodo del conflicto no hubo retiro de efectivos ni refuerzos a las tropas japonesas. Los Estados Unidos, por otro lado, desembarcaron 54 000 elementos el primer día de la batalla; ninguno el segundo día; 6 000, el tercer día; ninguno en los días cuarto y quinto, y por último, 13 000 el sexto día. Antes de iniciar la lucha no había tropas de Estados Unidos en Iwo Jima.

2. *Pérdidas en combate.* El capitán Clifford Morehouse del Cuerpo de Infantería de Marina de Estados Unidos (Morehouse [5]) llevó una cuenta diaria de todas las pérdidas de este país ocurridas en las encuestas, pero no se dispone de tal información en el caso de las fuerzas de Japón. Lo más probable es que las listas de pérdidas elaboradas o por el general Kuribayashi (comandante japonés en Iwo Jima) hayan quedado destruidas durante la batalla, y que los registros que se llevaban en Tokio se hayan per-

dido o quemados a causa de los intensos bombardeos ocurridos durante los cinco meses restantes de la guerra. Sin embargo, de la Tabla 1 se deduce que al iniciar la batalla se encontraban, aproximadamente, 21 500 japoneses en Iwo Jima. (En realidad, Newcomb llegó a la cifra de 21 000 efectivos para las fuerzas japonesas, pero esa es una cantidad algo baja, ya que aparentemente no incluyó algunos de los muertos y sobrevivientes encontrados en las cuevas en los últimos días.)

3. *Pérdidas operacionales.* Estas pérdidas en ambos bandos fueron insignificantes.

Ahora bien, denótese por $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente, las fuerzas militares activas japonesas y de Estados Unidos en Iwo Jima a los t días después de iniciada la batalla. Los datos arriba enlistados sugieren el siguiente modelo lanchesteriano para la batalla en cuestión:

$$\frac{dx}{dt} = -ay + f(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -bx \tag{6}$$

donde a y b son los coeficientes de efectividad en combate de las fuerzas de Japón y de Estados Unidos, respectivamente, y

$$f(t) = \begin{cases} 54{,}000 & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & 1 \leqslant t < 2 \\ 6{,}000 & 2 \leqslant t < 3 \\ 0 & 3 \leqslant t < 5 \\ 13{,}000 & 5 \leqslant t < 6 \\ 0 & t \geqslant 6 \end{cases}$$

Usando el método de variación de parámetros expuesto en la Sección 3.12, o el de eliminación de la Sección 2.14, puede verse fácilmente que la solución de (6) que satisface $x(0) = 0$, $y(0) = y_0 = 21\,500$, está dada por

$$x(t) = -\sqrt{\frac{a}{b}}\, y_0 \cosh\sqrt{ab}\, t + \int_0^t \cosh\sqrt{ab}\,(t-s) f(s)\, ds \tag{7a}$$

y

$$y(t) = y_0 \cosh\sqrt{ab}\, t - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \operatorname{senh}\sqrt{ab}\,(t-s) f(s)\, ds \tag{7b}$$

donde

$$\cosh x \equiv (e^x + e^{-x})/2 \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} x \equiv (e^x - e^{-x})/2.$$

El problema ahora es el siguiente: ¿existen constantes a y b tales que (7a) es una buena aproximación a la información recogida por Morehouse? Esta es una pregunta de extrema importancia. Una respuesta afirmativa indicaría que los modelos Lanchesterianos describen batallas reales, mientras que una respuesta negativa arrojaría serias dudas acerca de gran parte del trabajo de Lanchester.

Como se mencionó anteriormente, es muy difícil calcular los coeficientes de efectividad en combate a y b de dos fuerzas oponentes. Sin embargo, con frecuencia es posible determinar valores adecuados de a y b una vez que se tienen los datos de una batalla, y tal es el caso de Iwo Jima.

Cálculo de a y b. Al integrar la segunda ecuación de (6) entre 0 y s se obtiene

$$y(s)-y_0=-b\int_0^s x(t)\,dt$$

de modo que

$$b=\frac{y_0-y(s)}{\int_0^s x(t)\,dt}. \tag{8}$$

En particular, si $s = 36$, se obtiene

$$b=\frac{y_0-y(36)}{\int_0^{36} x(t)\,dt}=\frac{21{,}500}{\int_0^{36} x(t)\,dt}. \tag{9}$$

La integral en el lado derecho de (9) puede aproximarse por la suma de Rieman

$$\int_0^{36} x(t)\,dt \cong \sum_{i=1}^{36} x(i)$$

y se sustituye luego $x(i)$ por el número de combatientes de Estados Unidos el día i de la batalla. Usando los datos disponibles de Morehouse, se calcula para b el valor de

$$b=\frac{21{,}500}{2{,}037{,}000}=0.0106. \tag{10}$$

OBSERVACIÓN. Sería preferible tomar $s = 28$ en (8), ya que ese fue el día en que la isla se declaró segura, y después de ese momento los enfrentamientos fueron esporádicos. Sin embargo, no se conoce $y(28)$. Así que es preciso tomar $s = 36$ en este caso.

Ahora bien, integrando la primera ecuación en (6) de $t = 0$ a $t = 28$ resulta

$$\begin{aligned} x(28) &= -a\int_0^{28} y(t)\,dt+\int_0^{28} f(t)\,dt \\ &= -a\int_0^{28} y(t)\,dt+73{,}000. \end{aligned}$$

Había 52 735 combatientes estadunidenses el día 28 de la contienda, así que

$$a=\frac{73{,}000-52{,}735}{\int_0^{28} y(t)\,dt}=\frac{20{,}265}{\int_0^{28} y(t)\,dt}. \tag{11}$$

Por último, puede aproximarse la integral en el segundo miembro de (11) por la suma de Riemann

$$\int_0^{28} y(t)\,dt \cong \sum_{j=1}^{28} y(j)$$

y el valor $y(j)$, por

$$y(j) = y_0 - b\int_0^j x(t)\,dt$$
$$\approx 21{,}500 - b\sum_{i=i}^{j} x(i).$$

sustituyendo una vez más $x(i)$ por el número de combatientes de Estados Unidos el día i de la batalla, se obtiene como resultado (véase Engel [2])

$$a = \frac{20{,}265}{372{,}500} = 0.0544. \qquad (12)$$

La Figura 3 compara los valores reales del poderío de Estados Unidos con los valores predichos por la ecuación (7a) (con $a = 0.0544$ y $b = 0.0106$). La semejanza es sorprendentemente buena. De modo que un modelo de Lanchester parece realmente describir los enfrentamientos de la vida real.

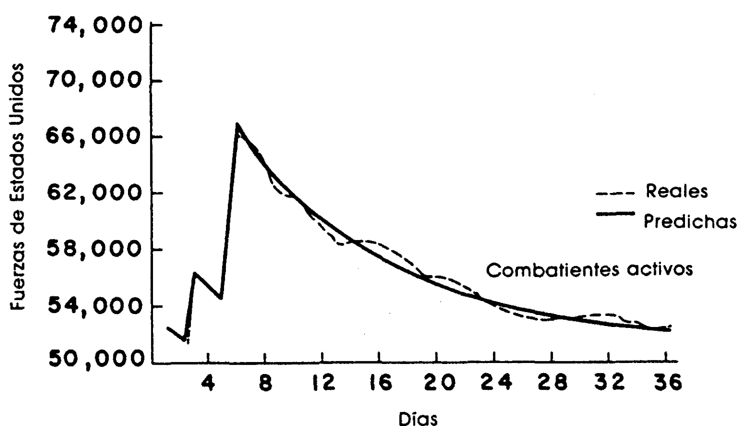


FIGURA 3. Comparación del poderío bélico real con el poderío predicho

OBSERVACIÓN. Los valores usados para los refuerzos de Estados Unidos incluyen a *todo* el contingente desembarcado, tanto tropas de combate como de apoyo. De modo que los números a y b que se calcularon deben ser interpretados como la efectividad *promedio* por persona en la isla.

BIBLIOGRAFÍA

1. Coleman, C.S., Combat Models, MAA Workshop on Modules in Applied Math, Cornell University, agosto 1976.
2. Engel, J.H., A verification of Lanchester's Law, *Operations Research*, 2, (1954), 163-171.
3. Howes, D.R., y Thrall, R.M., A theory of ideal linear weights for heterogeneous combat forces, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 20, 1973, págs. 645-659.

4. Lanchester, F.W., *Aircraft in Warfare, the Dawn of the Fourth Arm*. Tiptree, Constable y Co. Ltd, 1916.
5. Morehouse, C.P., *The Iwo Jima Operation*, USMCR, Historical Division, Hdqr. USMC, 1946.
6. Newcomb, R.F., *Iwo Jima*. New York: Holt, Rinehart y Winston, 1965.

EJERCICIOS

1. Deduzca las ecuaciones (7a) y (7b).

2. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ay\\ \dot{y} &= -by-cxy\end{aligned} \tag{13}$$

es un modelo lanchesteriano para combate fuerza "convencional"-guerrilla en el que la tasa de pérdidas operacionales de la fuerza de guerrilla y es proporcional a $y(t)$.
(a) Determine las órbitas de (13).
(b) ¿Quién gana la batalla?

3. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ay\\ \dot{y} &= -bx-cxy\end{aligned} \tag{14}$$

es un modelo de Lanchester para un combate fuerza "convencional"-guerrilla, en el que la tasa de pérdidas operacionales de la fuerza de guerrilla y es proporcional al poderío de la fuerza "convencional" x. Encuentre las órbitas de (14).

4. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -cxy\\ \dot{y} &= -dxy\end{aligned} \tag{15}$$

es un modelo lanchesteriano para combate guerrilla-guerrilla, en el que las tasas de pérdidas operacionales son despreciables.
(a) Determine las órbitas de (15).
(b) ¿Quién gana la batalla?

5. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ay-cxy\\ \dot{y} &= -bx-dxy\end{aligned} \tag{16}$$

es un modelo lanchesteriano para combate guerrilla-guerrilla, en el que la tasa de pérdidas operacionales de cada una de las fuerzas es proporcional al poderío del oponente. Halle las órbitas de (16).

6. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax-cxy\\ \dot{y} &= -by-dxy\end{aligned} \tag{17}$$

es un modelo de Lanchester para combate guerrilla-guerrilla, en el que la tasa de pérdidas operacionales de cada una de las fuerzas es proporcional a su poderío.

(a) Encuentre las órbitas de (17).
(b) Demuestre que tanto el eje x como el y son órbitas de (17).
(c) Usando el hecho (que será demostrado en la Sección 4.6) de que las órbitas de (17) no se pueden intersecar demuestre que no hay un ganador claro de la batalla. *Sugerencia:* Demuestre que ni $x(t)$ ni $y(t)$ pueden alcanzar el valor cero en un tiempo finito. (Usando los Lemas 1 y 2 de la Sección 4.8, es fácil demostrar que tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a cero cuando $t \to \infty$.)

4.6 PROPIEDADES CUALITATIVAS DE LAS ÓRBITAS

En esta sección se deducirán dos propiedades muy importantes, tanto de las soluciones como de las órbitas del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

La primera propiedad trata de la existencia y unicidad de las órbitas, y la segunda, de la existencia de soluciones periódicas de (1). Se iniciará el análisis con el siguiente teorema de existencia y unicidad para las soluciones de (1).

TEOREMA 3. *Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, el problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ tiene una y sólo una solución $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, para toda $\mathbf{x}^0$ en R^n.*

El Teorema 3 se demuestra exactamente de la misma manera que el teorema de existencia y unicidad para la ecuación diferencial escalar $\dot{x} = f(t, x)$. De hecho, la demostración dada en la Sección 1.10 puede transcribirse aquí palabra por palabra. Sólo se necesita interpretar la cantidad $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$ como

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = \text{máx}\{|x_1(t) - y_1(t)|, \ldots, |x_n(t) - y_n(t)|\},$$

entonces la demostración del Teorema 2 de la Sección 1.10 es válida incluso para funciones con valores vectoriales $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ (Ejercicios 13 y 14).

Además se necesita el siguiente lema sencillo, aunque extremadamente útil.

LEMA 1. *Si $\mathbf{x} = \phi(t)$ es solución de (1), entonces $\mathbf{x} = \phi(t + c)$ es también solución de (1).*

La interpretación del Lema 1 es la siguiente. Sea $\mathbf{x} = \phi(t)$ una solución de (1) y sustitúyase toda t en la fórmula de $\phi(t)$ por $t + c$. De esa manera se obtiene una nueva función $\dot{\mathbf{x}}(t) = \phi(t + c)$. El Lema 1 establece que $\dot{\mathbf{x}}(t)$ es también una solución de (1). Por ejemplo, $x_1 = \tan t$, $x_2 = \sec^2 t$ es una solución del sistema de ecuaciones diferen-

ciales $dx_1/dt = x_2$, $dx_2/dt = 2x_1x_2$. Por lo tanto, $x_1 = \tan(t + c)$, $x_2 = \sec^2(t + c)$ es también una solución para cualquier constante c.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Si $\mathbf{x} = \phi(t)$ es solución de (1), entonces $d\phi(t)/dt = \mathbf{f}(\phi(t))$; es decir, las dos funciones $d\phi(t)/dt$ y $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{f}(\phi(t))$ coinciden en cada momento. Fíjese un tiempo t y una constante c. Dado que $d\phi/dt$ y $\mathbf{h}$ coinciden en todo instante, entonces deben coincidir en el $t + c$. Por lo tanto,

$$\frac{d\phi}{dt}(t+c) = \mathbf{h}(t+c) = \mathbf{f}(\phi(t+c)).$$

Pero $d\phi/dt$ evaluada en $t + c$ es igual a la derivada de $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \phi(t + c)$ evaluada en t. Por consiguiente

$$\frac{d}{dt}\phi(t+c) = \mathbf{f}(\phi(t+c)).$$ □

OBSERVACIÓN 1. La afirmación de Lema 1 puede verificarse explícitamente para la ecuación lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Toda solución $\mathbf{x}(t)$ de esta ecuación es de la forma $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$, para algún vector constante $\mathbf{v}$. De modo que

$$\mathbf{x}(t+c) = e^{\mathbf{A}(t+c)}\mathbf{v} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}c}\mathbf{v}$$

ya que $(\mathbf{A}t)\mathbf{A}c = \mathbf{A}c(\mathbf{A}t)$ para cualesquiera valores de t y c. Por lo tanto, $\mathbf{x}(t + c)$ es también una solución de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ya que es de la forma $e^{\mathbf{A}t}$ multiplicada por el vector constante $e^{\mathbf{A}c}\mathbf{v}$.

OBSERVACIÓN 2. El Lema 1 no es válido si la función $\mathbf{f}$ en (1) depende explícitamente de t. Para verlo, supóngase que $\mathbf{x} = \phi(t)$ es una solución de la ecuación diferencial no autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Entonces, $\dot{\phi}(t + c) = \mathbf{f}(t + c, \phi(t + c))$. Por consiguiente, la función $\mathbf{x} = \phi(t + c)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t+c, \mathbf{x}),$$

y tal ecuación es diferente de (1) si $\mathbf{f}$ depende explícitamente de t.

Ahora es posible deducir las siguientes propiedades muy importantes de las soluciones y órbitas de (1).

PROPIEDAD 1. (Existencia y unicidad de órbitas.) Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a $x_1, \ldots, x_n$. Entonces existe una y sólo una órbita a través de cada punto $\mathbf{x}^0$ en $\mathbb{R}^n$. En particular, si las órbitas de dos soluciones $\mathbf{x} = \phi(t)$ y $\mathbf{x} = \psi(t)$ de (1) tienen un punto común, entonces deben ser idénticas.

PROPIEDAD 2. Sea $\mathbf{x} = \phi(t)$ una solución de (1). Si $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$ para alguna t_0 y $T > 0$, entonces $\phi(t + T)$ es idénticamente igual a $\phi(t)$. En otras palabras, si una solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) regresa a su valor inicial después de un tiempo $T > 0$, entonces debe ser periódica con periodo T (es decir, debe repetirse a intervalos de magnitud T.)

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 1. Sea $\mathbf{x}^0$ un punto cualquiera en el espacio fase $x_1, \ldots, x_n$, de dimensión n, y sea $\mathbf{x} = \phi(t)$ la solución del problema de valor ini-

cial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. La órbita de esta solución pasa por $\mathbf{x}^0$. De modo que existe al menos una órbita a través de cada punto $\mathbf{x}^0$. Supóngase ahora que la órbita de alguna otra solución $\mathbf{x} = \psi(t)$ también pasa por $\mathbf{x}^0$. Esto significa que existe $t_0(\neq 0)$, tal que $\psi(t_0) = \mathbf{x}^0$. Pero entonces, por el Lema 1

$$\mathbf{x} = \psi(t + t_0)$$

es también una solución de (1). Obsérvese que $\psi(t + t_0)$ y $\phi(t)$ tienen el mismo valor en $t = 0$. Por lo tanto, por el Teorema 3, se tiene que $\psi(t + t_0)$ es igual a $\phi(t)$ para todo tiempo t. Eso implica que las órbitas de $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son idénticas. De hecho si ξ es un punto de la órbita de $\phi(t)$, es decir, $\xi = \phi(t_1)$ para alguna t_1, entonces ξ está también en la órbita de $\psi(t)$, ya que $\xi = \phi(t_1) = \psi(t_1 + t_0)$. Recíprocamente, si ξ es un punto de la órbita de $\psi(t)$, es decir, existe t_2 tal que $\psi(t_2) = \xi$, entonces ξ está también en la órbita de $\phi(t)$, ya que $\xi = \psi(t_2) = \phi(t_2 - t_0)$.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2. Sea $\mathbf{x} = \phi(t)$ una solución de (1) y supóngase que $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$ para algún par de números t_0 y T. Entonces la función $\psi(t) = \phi(t + T)$ es también una solución de (1) que coincide con $\phi(t)$ en el tiempo $t = t_0$. Por lo tanto, por el Teorema 3, $\psi(t) = \phi(t + T)$ es idénticamente igual a $\phi(t)$.

La Propiedad 2 es muy útil en las aplicaciones, especialmente cuando $n = 2$. Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ una solución periódica del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y). \tag{2}$$

Si $x(t + T) = x(t)$ y $y(t + T) = y(t)$, entonces la órbita de la solución es una curva cerrada C en el plano xy. En cualquier intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, la solución se mueve una vez a lo largo de C. Recíprocamente, supóngase que la órbita de una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ de (2) es una curva cerrada que no contiene puntos de equilibrio de (2). Entonces la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ es periódica. Para demostrarlo, recuérdese que una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ de () se mueve a lo largo de su órbita con velocidad $[f^2(x, y) + g^2(x, y)]^{1/2}$. Si su órbita C es una curva cerrada que no contiene puntos de equilibrio de (2), entonces la función $[f^2(x, y) + g^2(x, y)]^{1/2}$ tiene un mínimo positivo para (x, y) en C. Por lo tanto, la órbita de $x = x(t)$, $y = y(t)$ debe regresar a su punto inicial $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ en algún tiempo finito T. Pero eso implica que $x(t + T) = x(t)$ e $y(t + T) = y(t)$ para toda t.

EJEMPLO 1 Demostrar que toda solución $z(t)$ de la ecuación diferencial de segundo orden $(d^2z/dt^2) + z + z^3 = 0$ es periódica.

DEMOSTRACIÓN. Primero se transforma esta ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Esto se logra haciendo $x = z$, $y = dz/dt$. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - x^3. \tag{3}$$

Las órbitas de (3) son las curvas soluciones

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = c^2 \tag{4}$$

de la ecuación escalar $dy/dx = -(x + x^3)/y$. La ecuación (4) define una curva cerrada en el plano xy (Ejercicio 7). Más aún, el único punto de equilibrio de (3) es $x = 0, y = 0$. Por consiguiente, toda solución $x = z(t), y = z'(t$ de (3) es una función periódica en el tiempo. Nótese, sin embargo, que no es posible calcular el periodo de ninguna solución particular.

EJEMPLO 2 Demostrar que toda solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ye^{1+x^2+y^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -xe^{1+x^2+y^2} \tag{5}$$

es periódica.

SOLUCIÓN. Las órbitas de (5) son las curvas solución $x^2 + y^2 = c^2$ de la ecuación escalar de primer orden $dy/dx = -x/y$. Más aún, $x = 0, y = 0$ es el único punto de equilibrio de (5). Por consiguiente, toda solución $x = x(t), y = y(t)$ de (5) es una función periódica en el tiempo.

EJERCICIOS

1. Demuestre que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de
$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y\operatorname{sen}x, \qquad \frac{dy}{dt} = -1 + xy + \cos y$$
que empiezan en el primer cuadrante ($x > 0, y > 0$) deben permanecer en él para todo tiempo (tanto hacia adelante como hacia atrás.)

2. Demuestre que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de
$$\frac{dx}{dt} = y(e^x - 1), \qquad \frac{dy}{dt} = x + e^y$$
que empiezan en el semiplano derecho ($x > 0$) deben permanecer en él para todo tiempo.

3. Pruebe que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de
$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 + y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = xy + \tan y$$
que empiezan en el semiplano superior ($y > 0$) deben permanecer en él para todo tiempo.

4. Demuestre que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de
$$\frac{dx}{dt} = -1 - y + x^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x + xy$$
que empiezan en el interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ deben permanecer en él para todo tiempo. *Sugerencia:* Calcule $d(x^2 + y^2)/dt$.

5. Sea $x(t)$, $y(t)$ una solución de
$$\frac{dx}{dt} = y + x^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x + y^2$$
con $x(t_0) \neq y(t_0)$. Pruebe que $x(t)$ no puede ser nunca igual a $y(t)$.

6. ¿Puede una curva en forma de 8 ser una órbita de

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

donde f y g tienen derivadas parciales continuas con respecto a x y a y?

7. Demuestre que la curva $y^2 + x^2 + x^4/2 = 2c^2$ es cerrada. *Sugerencia:* Pruebe que existen dos puntos $y = 0$, $x = \pm\alpha$ que están en esta curva.

Demuestre que todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo orden son periódicas.

8. $\dfrac{d^2z}{dt^2}+z^3=0$

9. $\dfrac{d^2z}{dt^2}+z+z^5=0$

10. $\dfrac{d^2z}{dt^2}+e^{z^2}=1$

11. $\dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{z}{1+z^2}=0$

12. Demuestre que todas las soluciones $z(t)$ de

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z-2z^3=0$$

son periódicas si $\dot{z}^2(0) + z^2(0) - z^4(0) < 1/4$, y no acotadas si

$$\dot{z}^2(0)+z^2(0)-z^4(0)>\tfrac{1}{4}.$$

13. (a) Sea

$$L=n\times \max_{i,j=1,\ldots,n} |\partial f_i/\partial x_j|, \quad \text{for} \quad |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<b.$$

Pruebe que $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ si $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq b$ y $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leq b$.

(b) Sea $M = \text{máx}|\mathbf{f}(\mathbf{x})$ para $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq b$. Demuestre que las iteraciones de Picard

$$\mathbf{x}_{j+1}(t)=\mathbf{x}^0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}(\mathbf{x}_j(s))\,ds, \qquad \mathbf{x}_0(t)=\mathbf{x}^0$$

convergen a una solución $\mathbf{x}(t)$ del problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ en el intervalo $|t - t_0| \leq b/M$. *Sugerencia:* La demostración del Teorema 2 de la Sección 1.10 puede ser usada palabra por palabra en este caso.

14. Calcule las iteraciones de Picard $\mathbf{x}_j(t)$ del problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, y verifique que se aproximan a $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0$ cuando j tiende a infinito.

4.7 RETRATOS FASE DE SISTEMAS LINEALES

En esta sección se presenta una descripción completa de todas las órbitas de la ecuación diferencial lineal

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dicha descripción se conoce como un *retrato fase*, y depende casi por completo de los valores característicos de la matriz **A**. También cambia notablemente si los valores característicos de **A** cambian de signo o se vuelven imaginarios.

Al estudiar la ecuación 1, con frecuencia es de gran ayuda representar un vector

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

en R^2 como una *dirección*, o un *segmento dirigido*, en el plano. Sea

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

un vector en R^2 y trácese el segmento dirigido $\vec{x}$ del punto (0, 0) al punto (x_1, x_2) como se muestra en la Figura 1a. Este segmento dirigido es paralelo a la recta que pasa por (0, 0) y cuyos números directores son x_1, x_2, respectivamente. Si se representa al vector **x** como el segmento dirigido $\vec{x}$, entonces se ve que los vectores **x** y $c\mathbf{x}$ son paralelos si c es positiva, y antiparalelos si c es negativa. También es posible dar una elegante interpretación geométrica de la suma de dos vectores. Sean **x** y **y** dos vectores en R^2. Trácese el segmento dirigido $\vec{x}$ y adjúntese el vector $\vec{y}$ a la punta de $\vec{x}$. El vector $\vec{x}$ + $\vec{y}$ es entonces la composición de ambos segmentos dirigidos (Fig. 2). Esta construcción se conoce como la regla o ley del paralelogramo de la adición de dos vectores.

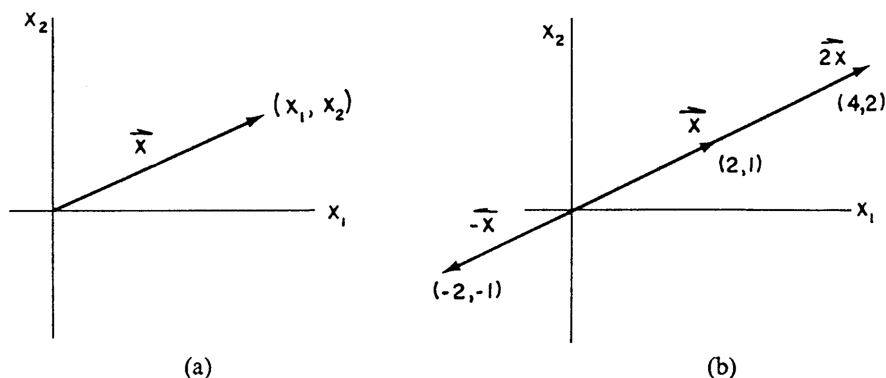


FIGURA 1.

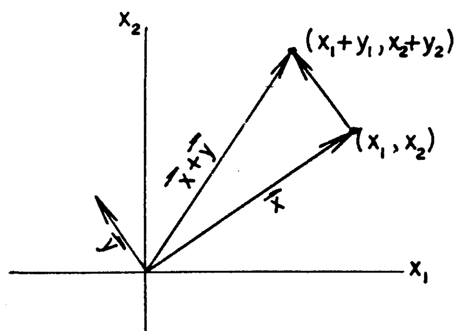


FIGURA 2.

Ahora es posible describir los retratos fase de (1). Denótense por λ_1 y λ_2 los dos valores característicos de **A**. Pueden distinguirse los siguientes casos:

1. $\lambda_1 < \lambda_1 < 0$. Sean $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$ los vectores característicos de **A** con valores característicos λ_1 y λ_2, respectivamente. Trácense en el plano x_1x_2 las cuatro semirrectas l_1, l'_1, l_2, l'_2 como se muestra en la Figura 3. Los rayos l_1 y l_2 son paralelos a $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$, mientras que los rayos l'_1 y l'_2 son paralelos a $-\mathbf{v}^1$ y $-\mathbf{v}^2$. Obsérvese primero que $\mathbf{x}(t) = ce^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$ es una solución de (1) para cualquier constante c. Esta solución es siempre proporcional a $\mathbf{v}^1$, y la constante de proporcionalidad, $ce^{\lambda_1 t}$, varía de $\pm\infty$ a cero, dependiendo de si c es positiva o negativa. Por lo tanto, la órbita de esta solución es la semirrecta l_1 para $c > 0$, y la semirrecta l'_1 para $c < 0$. Análogamente la órbita de la solución $\mathbf{x}(t) = ce^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$ es la semirrecta l_2 para $c > 0$, y la semirrecta l'_2 para $c < 0$. Las flechas sobre las cuatro líneas de la Figura 3 indican en qué dirección se mueve $\mathbf{x}(t)$ a lo largo de su órbita.

Recuérdese, además, que toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2 \tag{2}$$

para un par de constantes c_1 y c_2. Obviamente, toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) tiende a $\binom{0}{0}$ cuando t tiende a infinito. Por lo tanto, toda órbita de (1) tiende al origen $x_1 = x_2 = 0$ cuando t tiende a infinito. Es posible incluso hacer una afirmación más fuerte si se observa que $e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$ es muy pequeño comparado con $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$, cuando t es grande. Por lo tanto, para $c_1 \neq 0$, $\mathbf{x}(t)$ se aproxima cada vez más a $c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$ conforme t tiende a infinito. Esto implica que la tangente a la órbita de $\mathbf{x}(t)$ tiende a l_1 si c_1 es positiva; y a l'_1, si c_1 es negativa. De modo que el retrato fase de (1) tiene la forma descrita en la Figura 3. La característica distintiva de este retrato fase es que todas las órbitas, con excepción de una sola recta, tienden al origen en una dirección fija (si se consideran como equivalentes las direcciones $\mathbf{v}^1$ y $-\mathbf{v}^1$. En tal caso se dice que la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de (1) es un nodo estable.

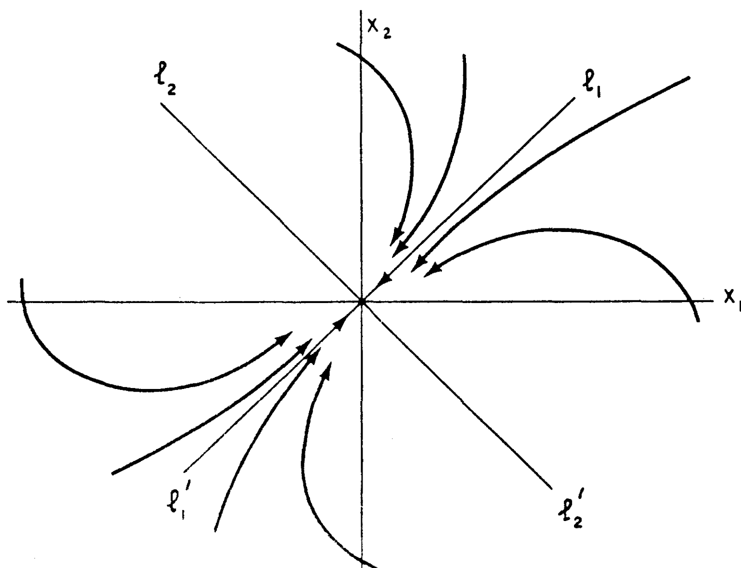


FIGURA 3. Retrato fase de un modelo inestable

OBSERVACIÓN. La órbita de toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) tiende al origen $x_1 = x_2 = 0$ cuando t tiende a infinito. Sin embargo, ese punto no pertenece a la órbita de ninguna solución no trivial $\mathbf{x}(t)$.

1'. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. En este caso, el retrato fase de (1) es exactamente el mismo que en la Figura 3, excepto que el sentido de las flechas es el opuesto. Por lo tanto, la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ de (1) es un nodo inestable, si ambos valores característicos de $\mathbf{A}$ son positivos.

2. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. En este caso, el retrato fase de (1) depende de si $\mathbf{A}$ tiene uno o dos vectores característicos linealmente independientes. (a) Supóngase que $\mathbf{A}$ tiene dos eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$ con valor característico $\lambda < 0$. En tal caso, toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) puede expresarse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{v}^1 + c_2 e^{\lambda t}\mathbf{v}^2 = e^{\lambda t}\left(c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2\right) \tag{2}$$

para alguna elección de constantes c_1 y c_2. Ahora bien, el vector $e^{\lambda t}(c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2)$ es paralelo a $c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2$ para toda t. Por lo tanto, la órbita de cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) es una semirrecta. Más aún, el conjunto de vectores $\{c_1\mathbf{v}^1 + c_2\mathbf{v}^2\}$, para todas las elecciones de c_1 y c_2, cubren cualquier dirección en el plano x_1x_2, ya que $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$ son linealmente independientes. Por lo tanto, el retrato fase tiene la forma descrita en la Figura 4a. (b) Supóngase que $\mathbf{A}$ tiene solamente un vector característico $\mathbf{v}$ linealmente independiente, con valor característico λ. En tal caso, $\mathbf{x}^1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es solución de (1). Para encontrar una segunda solución de (1) que sea linealmente independiente de $\mathbf{x}^1$, obsérvese que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{u}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} = e^{\lambda t}\left[\mathbf{u} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}\right] \tag{3}$$

es solución de (1), para cualquier elección de $\mathbf{u}$. La ecuación (3) puede simplificarse observando que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}$ debe ser un múltiplo k de $\mathbf{v}$. Esto se sigue inmediatamente de la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, y el hecho de que $\mathbf{A}$ tiene sólo un vector característico $\mathbf{v}$ linealmente independiente. Eligiendo $\mathbf{u}$ linealmente independiente de $\mathbf{v}$, se ve que cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t}(\mathbf{u} + kt\mathbf{v}) = e^{\lambda t}(c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{u} + c_2 kt\mathbf{v}), \tag{4}$$

para alguna elección de constantes c_1 y c_2. Obviamente, toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) tiende a $\binom{0}{0}$ cuando t tiende a infinito. Además, obsérvese que $c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{u}$ es muy pequeño comparado con $c_2kt\mathbf{v}$ si c_2 es diferente de cero y t es muy grande. Por lo tanto, la tangente a la órbita de $\mathbf{x}(t)$ tiende a $\pm\mathbf{v}$ (dependiendo del signo de c_2) cuando t tiende a infinito, y el retrato fase de (1) tiene la forma descrita en la Figura 4b.

2'. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Los retratos fase de (1) en los casos (2a)' y (2b)' son exactamente los mismos que en las Figuras 4a y 4b, excepto que la dirección de las flechas es la opuesta.

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Sean $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$ vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valor característico co λ_1 y λ_2, respectivamente. Se trazan en el plano x_1x_2 las cuatro semirrectas l_1, l_1' y l_2 l_2': las semirrectas l_1 y l_2 son paralelas a $\mathbf{v}^1$ y $\mathbf{v}^2$, mientras que las semirrectas l_1' y l_2'

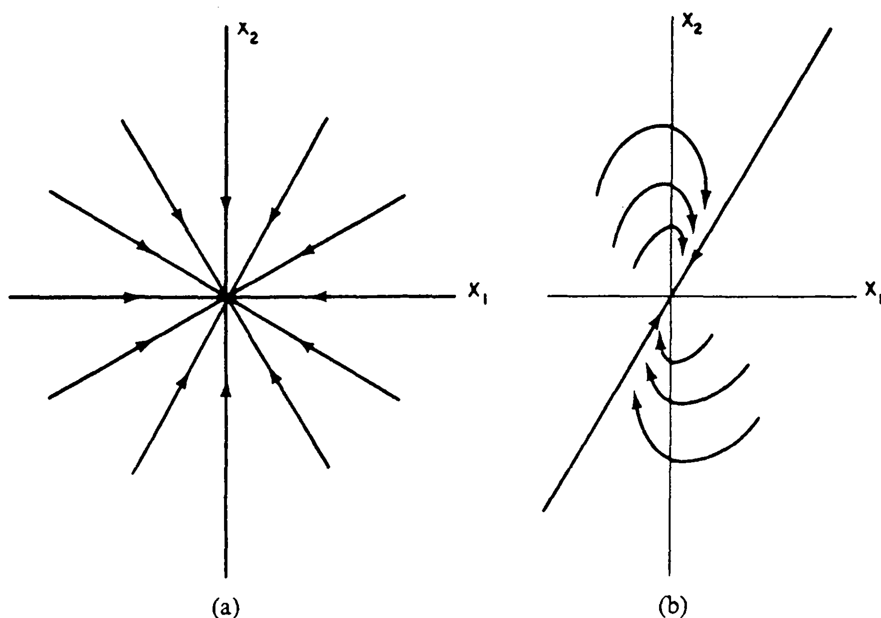


FIGURA 4.

deberán serlo a $-\mathbf{v}^1$ y $-\mathbf{v}^2$. Obsérvese primero que toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1), es de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2 \tag{5}$$

para alguna elección de constantes c_1 y c_2. La órbita de la solución $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$ es l_1 para $c_1 > 0$ y l_1' para $c_1 < 0$, mientras que la órbita de la solución $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$ es l_2 para $c_2 > 0$ y l_2' para $c_2 < 0$. Nótese también el sentido de las flechas sobre l_1,

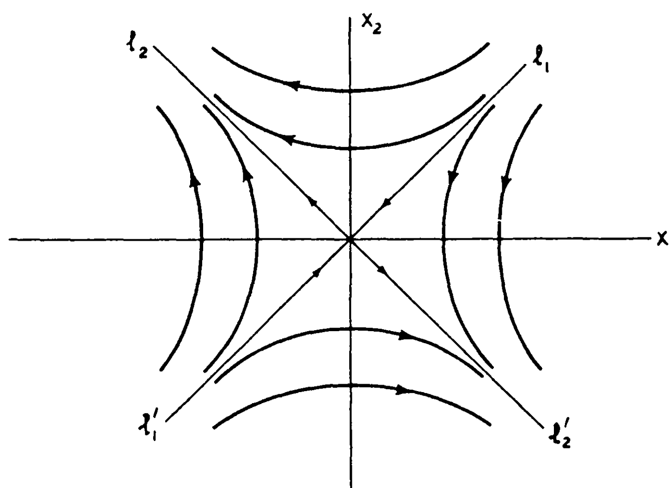


FIGURA 5. Retrato fase de un punto silla (de montar).

l_1', l_2 y l_2'; la solución $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$ tiende a $\binom{0}{0}$ cuando t tiende a infinito, mientras que la solución $\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$ es no acotada (para $c_2 \neq 0$) cuando t tiende a infinito. Obsérvese además que $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$ es muy pequeño, comparado con $e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$, cuando t crece mucho. Por lo tanto, toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) con $c_2 \neq 0$ es no acotada cuando t tiende a infinito y su órbita tiende a l_2 o bien a l_2'. Obsérvese por último que $e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2$ es muy pequeño comparado con $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1$, cuando t crece mucho con signo negativo. Por lo tanto, la órbita de cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (1), con $c_1 \neq 0$, tiende a l_1 o bien a l_1' cuando t tiende a menos infinito. Por consiguiente, el retrato fase de (1) posee la forma descrita en la Figura 5. Este retrato fase se asemeja a una "silla de montar" cerca de $x_1 = x_2 = 0$. Es por eso que se dice que la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ de (1) es un punto silla si los valores característicos de $\mathbf{A}$ tienen signos opuestos.

4. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta = 0$. El primer paso para deducir el plano fase de (1) es encontrar la solución general de (1). Sea $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor característico $\alpha + i\beta$. Entonces

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\beta t)(\mathbf{u}+i\mathbf{v})$$
$$= e^{\alpha t}[\mathbf{u}\cos\beta t - \mathbf{v}\,\mathrm{sen}\beta t] + ie^{\alpha t}[\mathbf{u}\,\mathrm{sen}\beta t + \mathbf{v}\cos\beta t]$$

es una solución con valores complejos de (1). Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{u}\cos\beta t - \mathbf{v}\,\mathrm{sen}\beta t]$$

y

$$\mathbf{x}^2(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{u}\,\mathrm{sen}\beta t + \mathbf{v}\cos\beta t]$$

son dos soluciones con valores reales de (1) linealmente independientes y toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) es de la forma $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^1(t) + c_2\mathbf{x}^2(t)$. Esta expresión puede escribirse en la forma (Ejercicio 15)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} R_1\cos(\beta t - \delta_1) \\ R_2\cos(\beta t - \delta_2) \end{pmatrix} \tag{6}$$

para alguna elección de constantes $R_1 \geq 0$, $R_2 \geq 0$, δ_1 y δ_2. Se distinguirán los siguientes casos:

(a) $\alpha = 0$: Obsérvese que

$$x_1(t) = R_1\cos(\beta t - \delta_1) \quad \text{y} \quad x_2(t) = R_2\cos(\beta t - \delta_2)$$

son funciones periódicas en el tiempo, con periodo $2\pi/\beta$. La función $x_1(t)$ varía entre $-R_1$ y $+R_1$, mientras que $x_2(t)$ varía entre $-R_2$ y $+R_2$. Por consiguiente, la órbita de cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ de (1) es una curva cerrada que rodea al origen $x_1 = x_2 = 0$, y el retrato fase de (1) tiene la forma descrita en la Figura 6a. Es por esa razón que se dice que la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ de (1) es un centro cuando los valores característicos de $\mathbf{A}$ son imaginarios puros.

La dirección de las flechas en la Figura 6a debe ser determinada a partir de la ecuación diferencial (1). La manera más sencilla de hacerlo es encontrando el signo de $\dot{x}_2$, cuando $x_2 = 0$. Si $\dot{x}_2$ es mayor que cero para $x_2 = 0$ y $x_1 > 0$, entonces todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de (1) se mueven en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si $\dot{x}_2$ es menor que cero para $x_2 = 0$ y $x_1 > 0$, entonces todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de (1) se mueven en el sentido de las manecillas del reloj.

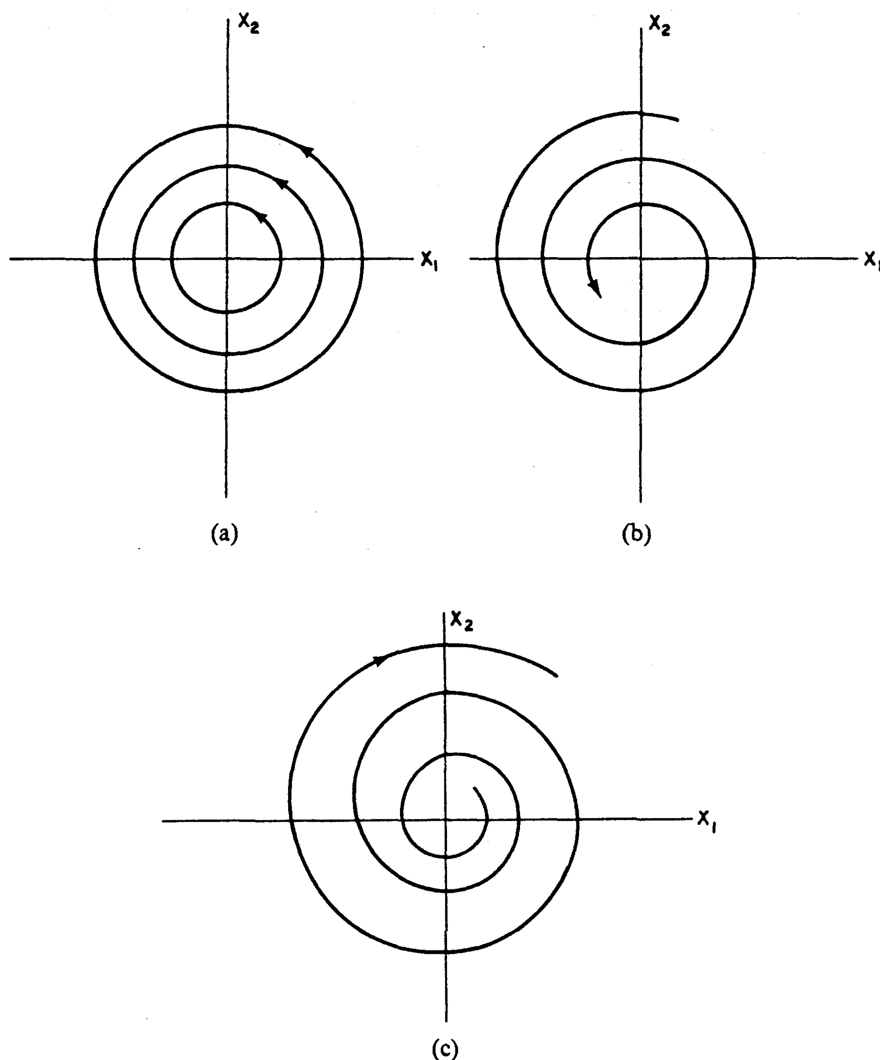


FIGURA 6. (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha < 0$; (c) $\alpha > 0$.

(b) $\alpha < 0$: En este caso, el efecto del factor $e^{\alpha t}$ sobre la ecuación (6) es el de cambiar las simples curvas cerradas de la Figura 6a en las espirales de la Figura 6b. Esto se debe a que el punto $\mathbf{x}(2\pi/\beta) = e^{2\pi\alpha/\beta}\mathbf{x}(0)$ está más cerca del origen que $\mathbf{x}(0)$. Una vez más, la dirección de las flechas debe determinarse a partir de la ecuación diferencial (1). En este caso, se dice que la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ de (1) es un foco estable.

(c) $\alpha > 0$: En este caso, todas las soluciones de (1) describen espirales que se alejan del origen cuando t tiende a infinito (Fig. 6c), y se dice que la solución de equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ de (1) es un foco inestable.

Por último, es importante mencionar que los retratos fase de los sistemas no lineales, en la vecindad de un punto de equilibrio son, con frecuencia, muy similares a los retratos fase de sistemas lineales. Dicho con más precisión, sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ una solución

de equilibrio de la ecuación no lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y hágase $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$. Entonces (Sección 4.3) puede escribirse la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ en la forma

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \tag{7}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante y $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ es muy pequeña comparada con $\mathbf{u}$. El siguiente teorema se enunciará sin demostración.

TEOREMA 4. *Supóngase que* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *es un nodo, un punto silla o bien un foco de la ecuación diferencial* $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. *Entonces, el retrato fase de la ecuación diferencial* $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *en una vecindad de* $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, *tiene una de las formas descritas en las Figuras* 3, 5 *y* 6 (b *y* c), *dependiendo de si* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *es un nodo, un punto silla o bien un foco.*

EJEMPLO 1 Trazar el retrato fase de la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{8}$$

SOLUCIÓN. Puede verificarse fácilmente que

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

son vectores característicos de $\mathbf{A}$ con valores característicos -3 y -6, respectivamente. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un nodo estable de (8), y el retrato fase de (8) tiene la forma descrita en la Figura 7. La semirrecta l_1 forma un ángulo de 45° con el eje x_1, en tanto que la semirrecta l_2 forma un ángulo de θ grados con el eje x_1, donde $\tan\theta = 4$.

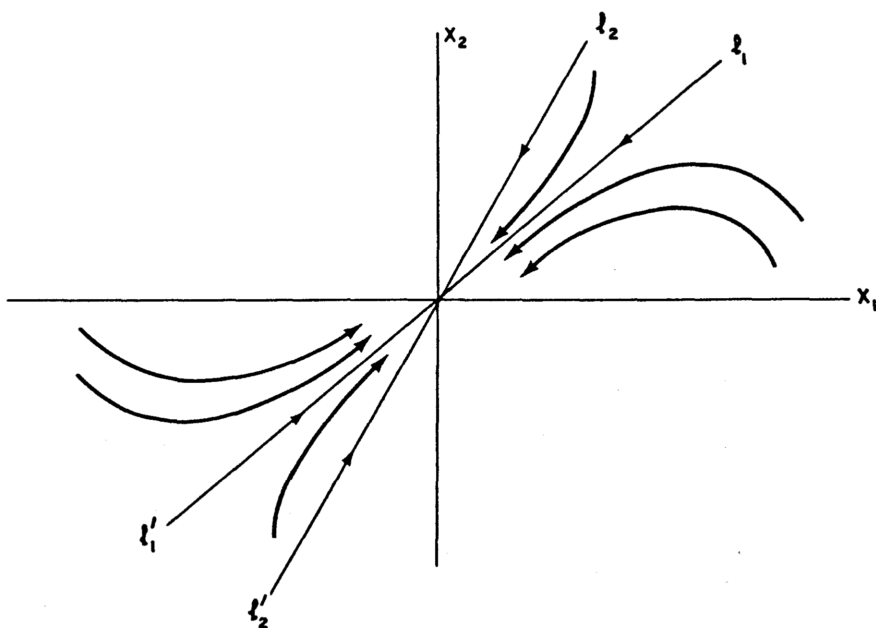


FIGURA 7. Retrato fase de (8)

EJEMPLO 2 Esquematizar el retrato fase de la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Es muy fácil verificar que

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores característicos de **A** con valores característicos -2 y 4, respectivamente. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto silla de (9) y su retrato fase tiene la forma descrita en la Figura 8. La semirrecta l_1 forma un ángulo de 45° con el eje x_1, y la semirrecta l_2 forma un ángulo recto con l_1.

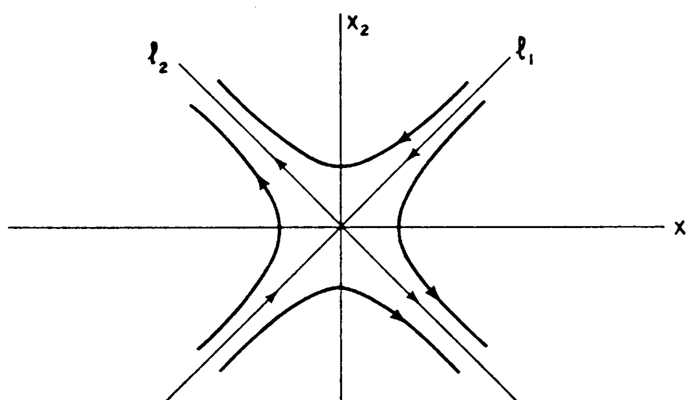


FIGURA 8. Retrato fase de (9)

EJEMPLO 3 Esquematizar el retrato fase de la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{10}$$

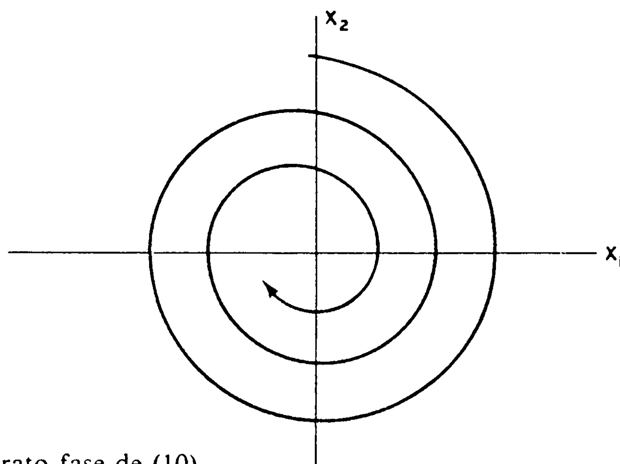


FIGURA 9. Retrato fase de (10)

SOLUCIÓN. Los valores característicos de **A** son $-1 \pm i$. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un foco estable de (10) y toda órbita no trivial de (10) describe una espiral acercándose al origen cuando t tiende a infinito. Para determinar el sentido de rotación de la espiral, obsérvese que $\dot{x}_2 = -x_1$ cuando $x_2 = 0$. Así pues, $\dot{x}_2$ es negativa para $x_1 > 0$ y $x_2 = 0$. Por consiguiente, todas las órbitas no triviales de (10) describen espirales hacia el origen y en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la Figura 9.

EJERCICIOS

Esquematice los retratos fase de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **2.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **3.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **5.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **6.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **8.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ **9.** $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. Demuestre que cualquier órbita de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

es una elipse.

11. La ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento (Sección 2.6) es $m\ddot{z} + cz + kz = 0$, donde m, c y k son números positivos. Transforme esta ecuación a un sistema de ecuaciones de primer orden para $x = z$, $y = \dot{z}$ y esquematice el retrato fase de dicho sistema. Identifique los casos sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado.

12. Suponga que una matriz **A** de 2×2 tiene dos vectores característicos linealmente independientes con valor característico λ. Demuestre que $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$.

13. Este problema ilustra el Teorema 4. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 2x^3. \qquad (*)$$

(a) Demuestre que la solución de equilibrio $x = 0$, $y = 0$ del sistema linealizado $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ es un punto silla y trace el retrato fase del sistema linealizado.

(b) Determine las órbitas de (*) y trace luego su retrato fase.

(c) Demuestre que hay exactamente dos órbitas de (*) (una para $x > 0$ y otra para $x < 0$) para las cuales $x \to 0$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$. De manera similar, hay exactamente dos órbitas de (*) para las cuales $x \to 0$, $y \to 0$ cuando $t \to -\infty$. Así pues, obsérvese que los retratos fase de (*) y del sistema linealizado son similares cerca del origen.

14. Verifique la ecuación (6). *Sugerencia:* La expresión $a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$ puede escribirse en la forma $R \cos(\omega t - \delta)$ para una elección adecuada de R y δ.

4.8 COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES PARA TIEMPOS GRANDES; TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Ahora se considerará el problema de determinar el comportamiento para valores grandes del tiempo de todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Este problema ya se resolvió completamente en el caso especial $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Según se vio en las Secciones 4. y 4.7, todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ exhiben alguno de los siguientes cuatro tipos de comportamientos: (i) $\mathbf{x}(t)$ es constante como función del tiempo; (ii) $\mathbf{x}(t)$ es una función periódica del tiempo; (iii) $\mathbf{x}(t)$ no está acotada cuando t tiende a infinito; (iv) $\mathbf{x}(t)$ tiende a un punto de equilibrio cuando t tiende a infinito.

Una solución parcial al problema, en el caso de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ no lineal, fue discutida en la Sección 4.3. En dicha sección se dan condiciones suficientes para que toda solución $\mathbf{x}(t)$ de (1), cuyo valor inicial $\mathbf{x}(0)$ está suficientemente cerca de un punto de equilibrio ξ, tienda a ξ cuando t tiende a infinito. En muchas aplicaciones con frecuencia es posible ir aún más lejos y demostrar que cualquier solución físicamente (biológicamente) realista tiende a un mismo punto de equilibrio conforme transcurre el tiempo. En ese contexto, los siguientes dos lemas desempeñan un papel extremadamente importante.

LEMA 1. *Sea $g(t)$ una función monótona creciente (decreciente) del tiempo para $t \geq t_0$,* con *$g(t) \leq c(\geq c)$ para alguna constante c. Entonces, $g(t)$ tiene un límite cuando t tiende a infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $g(t)$ es monótona creciente para $t \geq t_0$, y que $g(t)$ está acotada en la parte superior. Sea l la mínima cota superior de y, es decir, l es el menor de los números que no es excedido por los valores de $g(t)$, para $t \geq t_0$. Dicho número debe ser el límite de $g(t)$ cuando t tiende a infinito. Para demostrarlo, tómese $\varepsilon > 0$ y obsérvese que existe un tiempo $t_\varepsilon \geq t_0$, tal que $l - g(t_\varepsilon) < \varepsilon$. (Si no existe tal tiempo t_ε, entonces l no es la mínima cota superior de g.) Dado que $g(t)$ es monótona, se ve que $l - g(t) < \varepsilon$ para $t \geq t_\varepsilon$. Eso muestra que $l = \lim_{t\to\infty} g(t)$. □

LEMA 2. *Supóngase que una solución* $\mathbf{x}(t)$ *de* (1) *tiende a un vector ξ cuando t tiende a infinito. Entonces ξ es un punto de equilibrio de* (1).

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\mathbf{x}(t)$ tiende a ξ cuando t tiende a infinito. Entonces $x_j(t)$ tiende a ξ_j, donde ξ_j es la componente j de ξ. Esto implica que $|x_j(t_1) - x_j(t_2)|$ tiende a cero cuando t_1 y t_2 tienden a infinito, ya que

$$\begin{aligned} |x_j(t_1)-x_j(t_2)| &= |(x_j(t_1)-\xi_j)+(\xi_j-x_j(t_2))| \\ &\leqslant |x_j(t_1)-\xi_j|+|x_j(t_2)-\xi_j|. \end{aligned}$$

En particular, sea $t_1 = t$ y $t_2 = t_1 + h$ para algún número positivo fijo h. Entonces, $|x_j(t + h) - x_j(t)|$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Pero

$$x_j(t+h) - x_j(t) = h\frac{dx_j(\tau)}{dt} = hf_j(x_1(\tau),\dots,x_n(\tau)),$$

donde τ es algún número entre t y $t + h$. Obsérvese por último que $f_j(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$ debe tender a $f_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ cuando t tiende a infinito. Por lo tanto, $f_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, lo que termina la demostración del Lema 1.

EJEMPLO 1 Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2, \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2 \tag{2}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes positivas. Este sistema (Sección 4.10) describe el crecimiento poblacional de dos especies x y y, donde la especie y depende de la especie x para sobrevivir. Supóngase que $c/d > a/e$. Demostrar que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) con $x(0)$ y $y(0) > 0$ tiende a la solución de equilibrio $x = a/e$, $y = 0$ cuando t tiende a infinito.

SOLUCIÓN. El primer paso consiste en mostrar que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) que empieza en el primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$) en $t = 0$, debe permanecer en el primer cuadrante para todo tiempo futuro. (Si no fuera así, entonces el modelo podría no corresponder a la realidad.) Para ello, recuérdese de la Sección 1.5 que

$$x(t) = \frac{ax_0}{ex_0 + (a - ex_0)e^{-at}}, \qquad y(t) = 0$$

es una solución de (2) para cualquier elección de x_0. La órbita de esta solución es el punto (0, 0) para $x_0 = 0$; la recta $0 < x < a/e$ para $0 < x_0 < a/e$; el punto $(a/e, 0)$

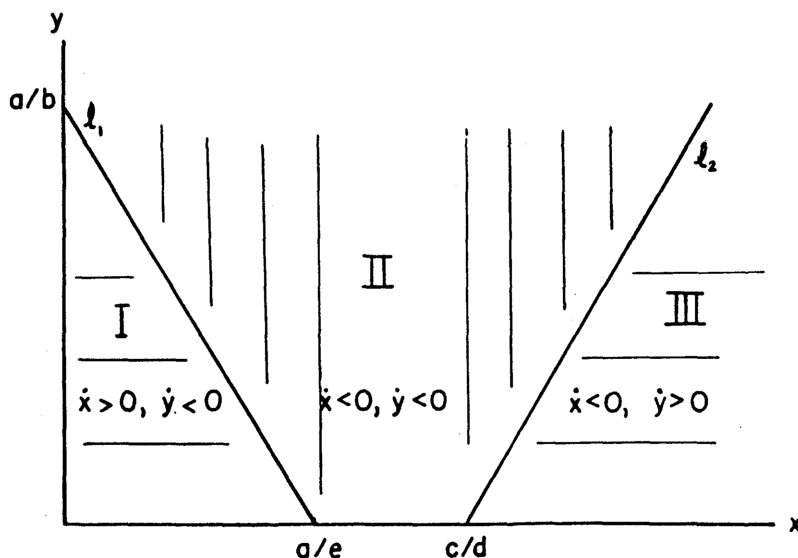


FIGURA 1.

para $x_0 = a/e$; y la recta $a/e < x <$ para $x_0 > a/e$. Así pues, el eje x, para $x \geq 0$, es la unión de cuatro órbitas disjuntas de (2). De manera similar (Ejercicio 14), el eje y en su parte positiva es una sola órbita de (2). De manera que si una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) abandona el primer cuadrante, entonces su órbita debe cruzar alguna otra, lo que no está permitido por la unicidad de las órbitas (Propiedad 1 de la Sección 4.6).

El siguiente paso consiste en dividir el primer cuadrante en regiones donde dx/dt y dy/dt tienen signos fijos. Eso se logra trazando las rectas l_1: $a - by - ex = 0$ y l_2: $-c + dx - fy = 0$, en el plano xy. Dichas rectas dividen el primer cuadrante en tres regiones I, II y III, como se muestra en la Figura 1. (Las rectas l_1 y l_2 no se cortan en el primer cuadrante si $c/d > a/e$.) Obsérvese, además, que $ex + by$ es menor que a en la región I, mientras que $ex + by$ es mayor que a en las regiones II y III. Por consiguiente, dx/dt es positiva en la región I y negativa en las regiones II y III. De la misma manera, dy/dt es negativa en las regiones I y II, y positiva en la región III.

A continuación se demostrarán cuatro lemas sencillos.

LEMA 3. *Toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) que empieza en la región I en el tiempo $t = t_0$ permanece en esa región para todo tiempo futuro $t \geq t_0$, y finalmente tiende a la solución de equilibrio $x = a/e$, $y = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) abandona la región I en el tiempo $t = t^*$. Entonces $\dot{x}(t^*) = 0$, ya que la única manera en la que una solución puede salir de la región I es cruzando la recta l_1. Derivando en ambos lados de la primera ecuación de (2) con respecto a t y tomando $t = t^*$ se obtiene

$$\frac{d^2x(t^*)}{dt^2} = -bx(t^*)\frac{dy(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es positiva. Por lo tanto, $x(t)$ tiene un mínimo en $t = t^*$. Pero esto es imposible, ya que $x(t)$ es siempre creciente si $x(t)$, $y(t)$ está en la región I. Así pues, cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) que empieza en la región I en el tiempo $t = t_0$ permanecerá en la región I para todo tiempo futuro $t \geq t_0$. Eso implica que $x(t)$ es una función monótona creciente del tiempo y que $y(t)$ es una función monótona decreciente del tiempo para $t \geq t_0$, con $x(t) < a/e$ y $y(t) > 0$. Por consiguiente, por el Lema 1, tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienen límites ξ y η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 implica que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (2). Puede verificarse fácilmente que los únicos puntos de equilibrio de (2) en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$ son $x = 0$, $y = 0$ y $x = a/e$, $y = 0$. Claramente ξ no puede ser igual a cero, ya que $x(t)$ es creciente en la región I. Por lo tanto, $\xi = a/e$ y $\eta = 0$. □

LEMA 4. *Cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) que empieza en la región III en el instante $t = t_0$ debe abandonar dicha región un tiempo más tarde.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) permanece en la región III para todo tiempo $t \geq t_0$. Entonces $x(t)$ es una función monótona decreciente del tiempo y $y(t)$ es una función monótona creciente del tiempo para $t \geq t_0$. Más aún, $x(t)$ es mayor que c/d y $y(t)$ es menor que $(dx(t_0) - c)/f$. Por consiguiente, tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 implica entonces que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (2). Pero (ξ, η) no puede ser igual a

(0, 0) o bien a $(a/e, 0)$ si $x(t)$, $y(t)$ permanece en la región III para $t \geq t_0$. Esta contradicción demuestra el Lema 4.

LEMA 5. *Cualquier solución* $x(t)$, $y(t)$ *de* (2) *que empieza en la región* II *en el instante* $t = t_0$ *y permanece en la región* II *para todo tiempo futuro* $t \geq t_0$, *debe tender a la solución de equilibrio* $x = a/e$, $y = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) permanece en la región II para todo tiempo $t \geq t_0$. Entonces tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones monótonas decrecientes del tiempo para $t \geq t_0$, con $x(t) > 0$ y $y(t) > 0$. De modo que por el Lema 1, tanto $x(t)$ como $x(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 implica entonces que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (2). Ahora bien, (ξ, η) no puede ser igual a (0, 0). Por lo tanto, $\xi = a/e$, $\eta = 0$.

LEMA 6. *Una solución cualquiera* $x(t)$, $y(t)$ *de* (2) *nunca puede entrar a la región* III *proveniente de la región* II.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) abandona la región II en el instante $t = t^*$ y entra en la región III. Entonces $y(t^*) = 0$. Al derivar con respecto a t en ambos lados de la segunda ecuación de (2) y haciendo $t = t^*$, se obtiene

$$\frac{d^2y(t^*)}{dt^2} = dy(t^*)\frac{dx(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es negativa. Por lo tanto, $y(t)$ tiene un máximo en $t = t^*$. Pero tal cosa es imposible, ya que $y(t)$ es decreciente si $x(t)$, $y(t)$ está en la región II.

Obsérvese, por último, que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) que empieza en l_1 debe entrar inmediatamente a la región I, y que una solución que empieza en l_2 debe entrar inmediatamente a la región II. Ahora se sigue inmediatamente de los lemas del 3 al 6 que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (2) con $x(0) > 0$ y $y(0) > 0$, tiende a la solución de equilibrio $x = a/e$, $y = 0$ cuando t tiende a infinito.

Hasta este momento, las soluciones y órbitas de las ecuaciones no lineales que se han estudiado se comportan de manera muy similar a las soluciones y órbitas de las ecuaciones lineales. Sin embargo, la situación es en realidad muy diferente. En general, las soluciones y órbitas de las ecuaciones no lineales muestran un comportamiento completamente diferente al de las soluciones y órbitas de las ecuaciones lineales. Un ejemplo usual es el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \tag{3}$$

Llama la atención que el término $x^2 + y^2$ está presente en ambas ecuaciones, es por ello que se sugiere introducir coordenadas polares r, θ, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, para reescribir (3) en términos de r y θ. Para tal fin se calcula

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r^2 = 2r\frac{dr}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\\ &= 2(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)^2 = 2r^2(1-r^2).\end{aligned}$$

De la misma manera

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}\frac{x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}}{1+(y/x)^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (3) es equivalente al sistema

$$\frac{dr}{dt}=r(1-r^2), \qquad \frac{d\theta}{dt}=1. \tag{4}$$

Se puede ver fácilmente que la solución general de (4) es

$$r(t)=\frac{r_0}{\left[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}}, \qquad \theta=t+\theta_0 \tag{5}$$

donde $r_0 = r(0)$ y $\theta_0 = \phi(0)$. Por lo tanto,

$$x(t)=\frac{r_0}{\left[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}}\cos(t+\theta_0),$$

$$y(t)=\frac{r_0}{\left[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}}\operatorname{sen}(t+\theta_0).$$

Obsérvese ahora que $x = 0$, $y = 0$ es la única solución de equilibrio de (3). Obsérvese además que

$$x(t)=\cos(t+\theta_0), \qquad y(t)=\operatorname{sen}(t+\theta_0)$$

cuando $r_0 = 1$. Esta solución es periódica con periodo 2π, y su órbita es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Obsérvese por último que de (5) se sigue que $r(t)$ tiende a 1 cuando t tiende a infinito, para $r_0 \neq 0$. Por consiguiente, todas las órbitas de (3), con excep-

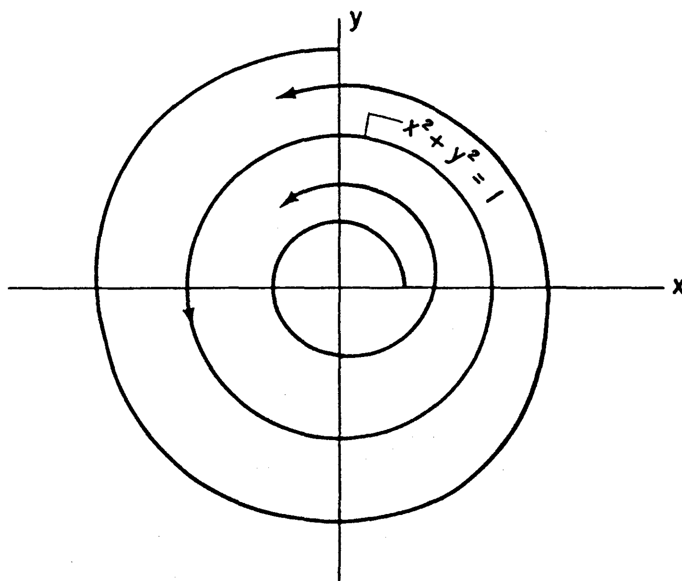


FIGURA 2. Retrato fase de (3)

ción del punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, describen una espiral que se aproxima a la circunferencia unitaria. En la Figura 2 se ilustra dicha situación.

El sistema de ecuaciones (3) muestra que las órbitas de un sistema no lineal de ecuaciones pueden describir espirales que se aproximan a una curva cerrada simple. Por supuesto que tal cosa no es posible para sistemas lineales. Más aún, con frecuencia puede demostrarse que las órbitas de un sistema no lineal describen espirales que se aproximan a una curva cerrada aun cuando no sea factible resolver explícitamente el sistema de ecuaciones o incluso determinar sus órbitas. Tal es el contenido del siguiente teorema famoso:

TEOREMA 5. (Poincaré-Bendixson). *Supóngase que una solución* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y) \tag{6}$$

permanece en una región acotada del plano que no contiene puntos de equilibrio de (6). *Entonces su órbita debe describir una espiral que se aproxima a una curva cerrada simple, la cual a su vez es la órbita de una solución periódica de* (6).

EJEMPLO 2 Demostrar que la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{z} + (z^2 + 2\dot{z}^2 - 1)\dot{z} + z = 0 \tag{7}$$

tiene una solución periódica no trivial.

SOLUCIÓN. Transformando primero la ecuación (7) a un sistema de dos ecuaciones de primer orden mediante la sustitución $x = z$ y $y = \dot{z}$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - 2y^2)y. \tag{8}$$

Ahora se buscará una región R, acotada en el plano xy, que no contenga puntos de equilibrio de (8) y con la propiedad de que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (8) que empieza en R en el instante $t = t_0$, permanece ahí para todo tiempo futuro $t \geq t_0$. Se puede mostrar fácilmente que una región simplemente conexa, como por ejemplo, un cuadrado o un disco, no tiene dicha propiedad. Es por ello que se toma R como un anillo alrededor del origen. Para tal efecto se calcula

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (1 - x^2 - 2y^2)y^2,$$

y se observa que $1 - x^2 - 2y^2$ es positivo para $x^2 + y^2 < ½$ y negativo para $x^2 + y^2 > 1$. Por lo tanto, $x^2(t) + y^2(t)$ es creciente a lo largo de cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (8) cuando $x^2 + y^2 < ½$ y decreciente cuando $x^2 + y^2 > 1$. Eso implica que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (8) que empieza en el anillo $½ < x^2 + y^2 > 1$ en el instante $t = t_0$, permanecerá en él para todo tiempo futuro $t \geq t_0$. Ahora bien, el anillo no contiene puntos de equilibrio de (8). Por lo tanto, por el teorema de Poincaré-Bendixson, existe al menos una solución periódica $x(t)$, $y(t)$, contenida completamente en el anillo. Entonces $z = x(t)$ es una solución periódica no trivial de (7).

EJERCICIOS

1. *Lo que realmente ocurrió en las conversaciones de paz en París* (Guerra de Vietnam).

A continuación se describe el plan original desarrollado por Henry Kissinger y Le Duc Tho para terminar con la guerra en Vietnam. Se acordó colocar un millón de hormigas de Vietnam del Sur (VS) frente a un millón de hormigas de Vietnam del Norte (VN) en el jardín posterior del palacio presidencial en París, y hacer que se disputaran el territorio luchando durante un lapso prolongado. Si las hormigas survietnamitas liquidaban casi por completo a las hormigas norvietnamitas, entonces VS retendría el control sobre la totalidad del terreno. Si las hormigas de VN salían victoriosas, entonces su bando ocuparía el territorio de VS. Si hubiera empate, entonces el territorio de VS se dividiría de acuerdo con la proporción de hormigas restantes. Ahora bien, las hormigas survietnamitas, denotadas por S, y las hormigas norvietnamitas, denotadas por N, combatirían de acuerdo con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{10}S - \frac{1}{20}S \times N\\ \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{100}N - \frac{1}{100}N^2 - \frac{1}{100}S \times N.\end{aligned} \qquad (*)$$

Nótese que estas ecuaciones corresponden a la realidad, ya que las hormigas de VS se multiplican mucho más rápidamente que las de VN, pero las hormigas norvietnamitas son mucho mejores combatientes.

La lucha se inició exactamente a las diez de la mañana del 19 de mayo de 1972, y fue supervisada por un representante de Polonia y otro de Canadá. A las 2:43 p.m. del 21 de mayo, el representante de Polonia, no satisfecho con el desarrollo de la batalla, introdujo al jardín una bolsa con hormigas de VN, aunque no sin ser detectado por el ojo avisor del representante de Canadá. Las survietnamitas reclamaron inmediatamente la violación a las reglas y desconocieron el acuerdo, marcando así la pauta para las largas y difíciles conversaciones que siguieron en París. El representante de Polonia fue llevado a juicio en esta ciudad para responder ante los cargos. El juez, después de hacer algunas observaciones sobre lo insulso del comportamiento de las survietnamitas dictó una sentencia muy benigna al representante de Polonia. Justifique matemáticamente la decisión del juez. *Sugerencia:*

(a) Demuestre que las rectas $N = 2$ y $N + S = 1$ dividen al primer cuadrante en tres regiones (Fig. 3) en las cuales dS/dt y dN/dt tiene signo fijo.

(b) Pruebe que cualquier solución $S(t)$, $N(t)$ de (*) que empiece en la región I o en la III, debe entrar en algún momento a la región II.

(c) Demuestre que cualquier solución $S(t)$, $N(t)$ de (*) que comience en la región II, debe permanecer en ella para todo tiempo futuro.

(d) Concluya, a partir de (c) que $S(t) \to \infty$ para todas las soluciones $S(t)$, $N(t)$ de (*), con $S(t_0)$ y $N(t_0)$ positivos. Concluya también que $N(t)$ tiene un límite finito (≤ 2) cuando $t \to \infty$.

(e) Para demostrar que $N(t) \to 0$, observe que existe t_0 tal que $dN/dt \leq -N$ para $t \geq t_0$. Concluya, a partir de esta desigualdad que $N(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

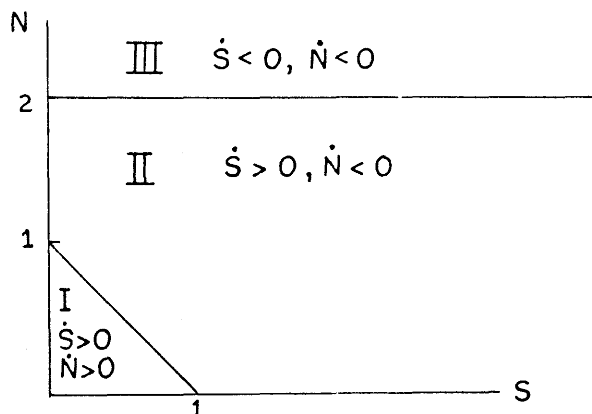


FIGURA 3.

2. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \qquad \frac{dy}{dt} = cy - dxy - ey^2 \qquad (*)$$

con $a/b > c/e$. Demuestre que $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (*) con $x(t_0)$ y $y(t_0)$ positivos. *Sugerencia:* Efectúe el mismo desarrollo que en el Ejercicio 1.

3. (a) Sin calcular los valores característicos de la matriz

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

demuestre que cualquier solución $x(t)$ de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

tiende a cero cuando t tiende a infinito. *Sugerencia:* (a) Demuestre que las rectas $x_2 = 3x_1$ y $x_1 = 3x_2$ dividen al plano xy en cuatro regiones (Fig. 4) en las cuales $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ tiene signo fijo o constante.

(b) Pruebe que cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ que empieza en la región I o en la II, debe permanecer en ellas para todo tiempo futuro y, finalmente, tender a la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) Demuestre que cualquie solución $\mathbf{x}(t)$ que permanece exclusivamente en las regiones III o IV debe tender finalmente a la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Se dice que una curva cerrada es un *ciclo límite* de

$$\dot{x} = f(x,y), \qquad \dot{y} = g(x,y) \qquad (*)$$

si existen órbitas que describen espirales que se acercan o alejan de ella. Se dice que es estable si todas las órbitas de (*) que pasan suficientemente cerca de la curva cerrada describen espirales que tienden finalmente hacia ella. En caso contrario, se dice que es inestable. Encuéntrense todos los ciclos límites de cada uno de los siguientes sistemas

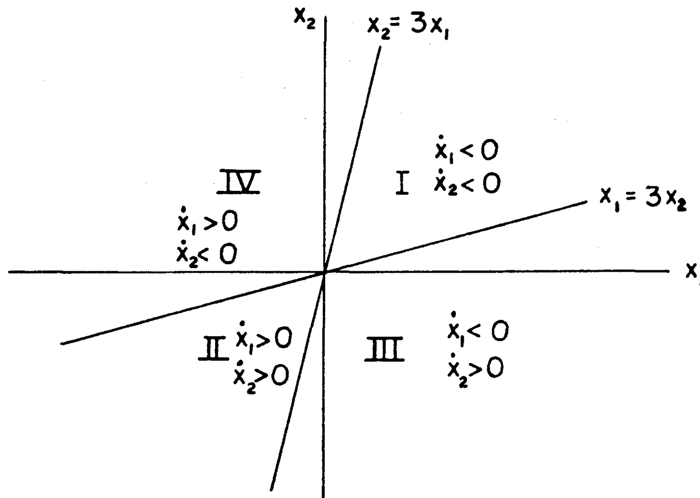


FIGURA 4.

de ecuaciones diferenciales. (*Sugerencia:* Determine $d(x^2 + y^2)/dt$. Observe además que C es la órbita de una solución periódica de (*) si no contiene puntos de equilibrio de (*).)

4. $\dot{x} = -y - \dfrac{x(x^2+y^2-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dot{y} = x - \dfrac{y(x^2+y^2-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5. $\dot{x} = x - x^3 - xy^2$

$\dot{y} = y - y^3 - yx^2$

6. $\dot{x} = y + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2)$

$\dot{y} = -x + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2)$

7. $\dot{x} = xy + x\cos(x^2+y^2)$

$\dot{y} = -x^2 + y\cos(x^2+y^2)$

8. (a) Demuestre que el sistema

$$\dot{x} = y + xf(r)/r, \qquad \dot{y} = -x + yf(r)/r \qquad (r^2 = x^2+y^2) \tag{*}$$

tiene ciclos límites correspondientes a los ceros de $f(r)$. ¿Cuál es el sentido de movimiento sobre tales curvas?

(b) Determine todos los ciclos límites de (*) y analice su estabilidad si $f(r) = (r-3)^2(r^2 - 5r + 4)$.

Use el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar la existencia de una solución periódica no trivial de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

9. $\ddot{z} + (z^2 + \dot{z}^4 - 2)z = 0$

10. $\ddot{z} + [\ln(z^2 + 4\dot{z}^2)]\dot{z} + z = 0$

11. (a) De acuerdo con el Teorema de Green en el plano, si C es una curva cerrada que es lo suficientemente "lisa", y si f y g son continuas y tienen primeras derivadas parciales también continuas, entonces

$$\oint_C [f(x,y)\,dy - g(x,y)\,dx] = \iint_R [f_x(x,y) + g_y(x,y)]\,dx\,dy$$

donde R es la región delimitada por C. Supóngase que $x(t)$, $y(t)$ es una solución periódica de $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, y sea C la órbita de dicha solución. Demuestre que la integral de línea a lo largo de C es cero.

(b) Suponga que $f_x + g_y$ tiene el mismo signo a lo largo de una región simplemente conexa D en el plano xy. Demuestre que el sistema de ecuaciones $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ no puede tener soluciones periódicas contenidas completamente en D.

12. Pruebe que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = x + y^2 + x^3, \qquad \dot{y} = -x + y + yx^2$$

no tiene solución periódica no trivial.

13. Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución periódica

$$\dot{x} = x - xy^2 + y^3, \qquad \dot{y} = 3y - yx^2 + x^3$$

no trivial que esté en la parte interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

14. (a) Demuestre que $x = 0$, $y = \psi(t)$ es una solución de (2) para cualquier función $\psi(t)$ que satisface $\dot{\psi} = -c\psi - f\psi^2$.

(b) Elija $\psi(t_0) > 0$. Demuestre que la órbita de $x = 0$, $y = \psi(t)$ (para toda t para la cual ψ existe) es la parte positiva del eje y.

4.9 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE BIFURCACIONES

Considérese el sistema de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

y ε es un escalar. Intuitivamente hablando, un punto de bifurcación de (1) es un valor de ε para el cual las soluciones de (1) cambian su comportamiento. Dicho con más precisión, $\varepsilon = \varepsilon_0$ es un punto de bifurcación de (1) si los retratos fase de (1) para $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $\varepsilon > \varepsilon_0$ son diferentes.

OBSERVACIÓN. En los ejemplos que siguen se apelará a la intuición para decidir si los dos retratos fase son iguales o distintos. En cursos más avanzados se definen dos retratos fase como iguales o topológicamente equivalentes si existe una transformación continua del plano en sí mismo que asocia a un retrato fase, el otro.

EJEMPLO 1 Encontrar los puntos de bifurcación del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{2}$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz **A** es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \varepsilon \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) - \varepsilon \\ &= \lambda^2 - (1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Las raíces de $p(\lambda)$ son $\pm\sqrt{1+\varepsilon}$ para $\varepsilon > -1$ y $\pm\sqrt{-\varepsilon - 1}\,i$ para $\varepsilon < -1$. Eso implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto silla para $\in\, > -1$, y un centro para $\varepsilon < -1$. Se concluye, por tanto, que $\varepsilon = -1$ es un punto de bifurcación de (2). También es claro que la ecuación (2) no tiene otros puntos de bifurcación.

Es ilustrativo ver cómo cambian las soluciones de (2) cuando $\in$ pasa por el valor de bifurcación -1. Para $\varepsilon > -1$ los valores característicos de **A** son

$$\lambda_1 = \sqrt{1+\varepsilon}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{1+\varepsilon}.$$

Puede verificarse fácilmente (Ejercicio 10) que

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector característico de **A** con valor característico $\sqrt{1+\varepsilon}$, mientras que

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un eigenvector con eigenvalor $-\sqrt{1+\varepsilon}$. Por lo tanto, el retrato fase de (2) tiene la forma que se muestra en la Figura 1. Cuando $\varepsilon \to -1$ por la izquierda, las rectas l_1

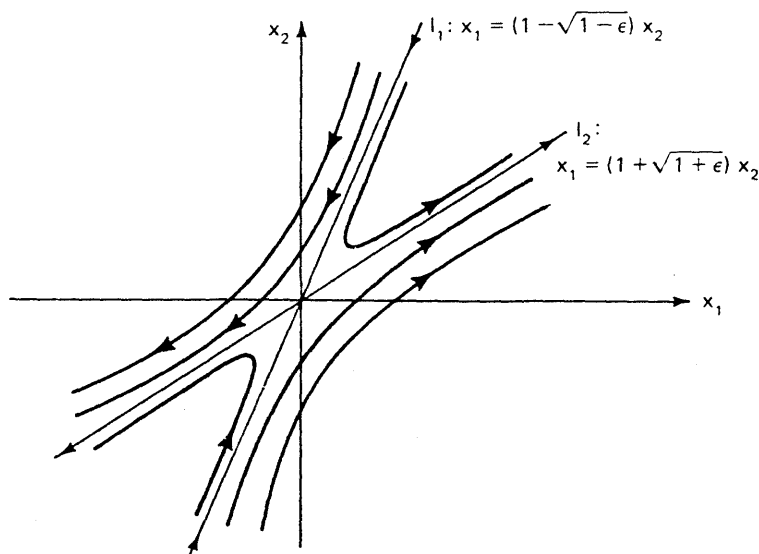


FIGURA 1. Retrato fase de (2) para $\in\, > -1$.

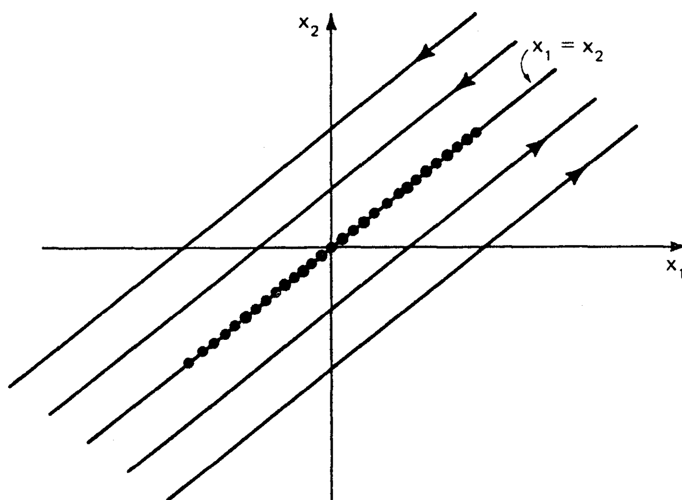


FIGURA 2. Retrato fase de (2) para $\varepsilon = -1$.

y l_2 tienden hacia la recta $x_1 = x_2$. Esta última está formada por puntos de equilibrio de (2) cuando $\varepsilon = -1$, mientras que cada una de las rectas $x_1 - x_2 = c$ ($c \neq 0$) es una órbita de (2) para $\varepsilon = -1$. En la Figura 2 se muestra el retrato fase de (2) para $\varepsilon = -1$.

EJEMPLO 2 Encontrar los puntos de bifurcación del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varepsilon & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz **A** es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ \varepsilon & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(1+\lambda) + \varepsilon \\ &= \lambda^2 + \lambda + \varepsilon \end{aligned}$$

y las raíces de $p(\lambda)$ son

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2}.$$

Obsérvese que λ_1 es positiva y λ_2 es negativa para $\varepsilon < 0$. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto silla para $\varepsilon < 0$. Para $0 < \varepsilon < 1/4$, tanto λ_1 como λ_2 son negativas. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un nodo estable para $0 < \varepsilon < 1/4$. Para $\varepsilon > 1/4$, tanto λ_1 como λ_2 son complejas con parte real negativa. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un foco estable para $\varepsilon > 1/4$. Nótese que el retrato fase de (3) cambia cuando ε pasa por 0 y por $1/4$. Se concluye, por lo tanto, que $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 1$, son puntos de bifurcación de (3).

EJEMPLO 3 Encontrar los puntos de bifurcación del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_1^2-x_2-\varepsilon.\end{aligned}\tag{4}$$

SOLUCIÓN. (i) Primero se encuentran los puntos de equilibrio de (4). Haciendo $dx_1/dt = 0$, se obtiene $x_2 = 0$, y haciendo $dx_2/dt = 0$ se obtiene $x_1^2 - \varepsilon = 0$, de modo que $x_1 = \pm\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $(\sqrt{\varepsilon}, 0)$ y $(-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ son dos puntos de equilibrio de (4) para $\varepsilon > 0$. El sistema (4) no tiene punto de equilibrio si $\varepsilon < 0$. Se concluye, por lo tanto, que $\varepsilon = 0$ es un punto de bifurcación de (4). (ii) Ahora se estudiará el comportamiento de las soluciones de (4) cerca de los puntos de equilibrio $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$ para determinar si el sistema tiene otros puntos de bifurcación. Haciendo

$$u=x_1\mp\sqrt{\varepsilon},\quad v=x_2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=v\\ \frac{dv}{dt}&=\left(u\pm\sqrt{\varepsilon}\right)^2-v-\varepsilon=\pm2\sqrt{\varepsilon}\,u-v+u^2.\end{aligned}\tag{5}$$

El sistema (5) puede ser escrito en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \pm2\sqrt{\varepsilon} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ u^2\end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 4, el retrato fase de (4) cerca de la solución de equilibrio

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{\varepsilon}\\ 0\end{pmatrix}$$

queda determinado por el retrato fase del sistema linealizado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \pm2\sqrt{\varepsilon} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

Para encontrar los valores característicos de **A** se calcula

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\\ &=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ \pm2\sqrt{\varepsilon} & -1-\lambda\end{pmatrix}\\ &=\lambda^2+\lambda\mp2\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores característicos de **A** cuando $u = x_1 - \sqrt{\varepsilon}$ son

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{1+8\sqrt{\varepsilon}}}{2},\quad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{1+8\sqrt{\varepsilon}}}{2}\tag{6}$$

mientras que los valores característicos de **A** cuando $u = x_1 + \sqrt{\varepsilon}$ son

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1-8\sqrt{\varepsilon}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1-8\sqrt{\varepsilon}}}{2}. \tag{7}$$

Obsérvese de (6) que $\lambda_1 > 0$, mientras que $\lambda_2 < 0$. Así pues, el sistema (4) se comporta como un punto silla cerca de los puntos de equilibrio $\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}$. Por otra parte, se ve de (7) que tanto λ_1 como λ_2 son negativas para $0 < \varepsilon < 1/64$, y complejas para $\varepsilon > 1/64$. Por consiguiente, el sistema (4) se comporta como un nodo estable cerca de la solución de equilibrio $\begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}$ para $0 < \varepsilon < 1/64$, y como un foco estable para $\varepsilon > 1/64$. Puede mostrarse que los retratos fase de un nodo estable y un foco estable son equivalentes. Por consiguiente, $\varepsilon = 1/64$ *no* es un punto de bifurcación de (4).

Otra situación que se incluye en el contexto de la teoría de bifurcaciones, que tiene gran interés en la investigación actual, es cuando el sistema (1) tiene un cierto número de soluciones de equilibrio o periódicos para $\varepsilon = \varepsilon_0$, y un número diferente de ellas para $\varepsilon \neq \varepsilon_0$. Supóngase, por ejemplo, que $\mathbf{x}(t)$ es una solución de equilibrio (o periódica) de (1) para $\varepsilon = 0$, y $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^k(t)$ son soluciones de equilibrio (o periódicas) de (1) para $\varepsilon \neq 0$, las cuales tienden a $\mathbf{x}(t)$ cuando $\varepsilon \to 0$. En tal caso, se dice que las soluciones $\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^k(t)$ *bifurcan* a partir de $\mathbf{x}(t)$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Encontrar todas las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3\varepsilon x_1 - 3\varepsilon x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ \frac{dx}{dt} &= \varepsilon x_1 - x_1 x_2 = x_1(\varepsilon - x_2). \end{aligned} \tag{8}$$

SOLUCIÓN. Sea $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ una solución de equilibrio del sistema (8). La segunda ecuación en (8) implica que $x_1 = 0$, o bien $x_2 = \varepsilon$.

$x_1 = 0$. En este caso, la primera ecuación de (8) entraña que

$$0 = 3\varepsilon x_2 + x_2^2 = x_2(3\varepsilon + x_2)$$

de modo que $x_2 = 0$, o bien $x_2 = -3\varepsilon$. Así pues, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}$ son dos puntos de equilibrio de (8).

$x_2 = \varepsilon$. En este caso, la primera ecuación de (8) implica que

$$3\varepsilon x_1 - 3\varepsilon^2 - x_1^2 - \varepsilon^2 = 0$$

o bien

$$x_1^2 - 3\varepsilon x_1 + 4\varepsilon^2 = 0. \tag{9}$$

Las soluciones

$$x_1 = \frac{3\varepsilon \pm \sqrt{9\varepsilon^2 - 16\varepsilon^2}}{2}$$

de (9) son complejas. Así pues,

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}$$

son dos puntos de equilibrio de (8), para $\varepsilon \neq 0$, las cuales bifurcan a partir del punto de equilibrio $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $\varepsilon = 0$.

EJERCICIOS

Encuentre los puntos de bifurcación de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \varepsilon \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

En cada una de los Problemas del 6 al 8, demuestre que más de una de las soluciones de equilibrio bifurca a partir de la solución de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cuando $\varepsilon = 0$.

6. $\dot{x}_1 = \varepsilon x_1 - \varepsilon x_2 - x_1^2 + x_2^2$
$\dot{x}_2 = \varepsilon x_2 + x_1 x_2$

7. $\dot{x}_1 = \varepsilon x_1 - x_1^2 - x_1 x_2$
$\dot{x}_2 = -2\varepsilon x_1 + 2\varepsilon x_2 + x_1 x_2 - x_2^2$

8. $\dot{x}_1 = \varepsilon x_2 + x_1 x_2$
$\dot{x}_2 = -\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + x_1^2 + x_2^2$

9. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3\varepsilon x_1 - 5\varepsilon x_2 - x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2\varepsilon x_1 - \varepsilon x_2. \end{aligned} \qquad (*)$$

(a) Demuestre que cada uno de los puntos de las rectas $x_2 = x_1$ y $x_2 = -x_1$ son puntos de equilibrio de (*) para $\varepsilon = 0$.

(b) Pruebe que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tfrac{7}{3}\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

son los únicos puntos de equilibrio de (*) para $\varepsilon \neq 0$.

10. Demuestre que

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores característicos de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con valores característicos $\sqrt{1 + \in}$ y $-\sqrt{1 + \in}$, respectivamente.

4.10 PROBLEMAS PRESA-DEPREDADOR, O POR QUÉ AUMENTÓ NOTABLEMENTE EL NÚMERO DE TIBURONES CAPTURADOS EN EL MEDITERRÁNEO DURANTE LA PRIMERA GUERRA MUNDIAL

A mediados de la década de los veinte en este siglo, el biólogo italiano Umberto D'Ancona se encontraba estudiando las variaciones poblacionales de varias especies de peces que interactúan. En el curso de su investigación se encontró con información acerca de los porcentajes de captura de diferentes especies en diversos puertos del Mediterráneo durante los años de la Primera Guerra Mundial. En particular, la información incluía los porcentajes de captura de selacios (tiburones, mantarrayas, etc.) los cuales no son deseables como pescado comestible. A continuación, se reproduce la información del puerto de Fiume, Italia, durante los años de 1914 a 1923.

1914	1915	1916	1917	1918
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%
1919	1920	1921	1922	1923
27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

D'Ancona quedó intrigado por el gran aumento en el porcentaje de selacios durante el periodo de la guerra. Argumentó que el incremento en tal porcentaje se debía a la gran reducción en los niveles de pesca durante el mismo período. La pregunta era ¿cómo afecta la intensidad de la pesca a la población de peces? La respuesta a tal pregunta fue una gran preocupación de D'Ancona en su investigación acerca de la lucha por la existencia entre especies en competición. También era de mucho interés para la industria pesquera, ya que tenía implicaciones obvias sobre la manera en la que se debía pescar.

Ahora bien, lo que distingue a los selacios de los peces comestibles es que los primeros son depredadores, mientras que los segundos son sus presas; los selacios dependen de los peces comestibles para su supervivencia. Inicialmente D'Ancona pensó que esa era la razón del incremento de los selacios durante la Primera Guerra Mundial. Como se había reducido fuertemente el nivel de captura en dicho periodo, había entonces más presas disponibles para los selacios, los cuales, por lo tanto, se reprodujeron más rápidamente y con éxito. Sin embargo, la explicación tenía una falla, ya que también había más peces comestibles en ese lapso. La teoría de D'Ancona muestra solamente que hay más selacios si la pesca se realiza a niveles más bajos; no explica por qué un bajo nivel de pesca es *más* benéfico para el depredador que para la presa.

Después de haber agotado todas las posibles explicaciones biológicas del fenómeno, D'Ancona se dirigió a su colega, el famoso matemático italiano Vito Volterra. La esperanza era que Volterra pudiera formular un modelo matemático del crecimiento de los selacios y sus presas, y de los peces comestibles, y que dicho modelo diera una respuesta a la interrogante de D'Ancona. Volterra inició su análisis separando a los animales en dos poblacioes: las presas $x(t)$ y los depredadores $y(t)$. Su razonamiento fue entonces que los peces comestibles no compiten muy intensamente entre sí por su alimento, ya que éste es muy abundante y la población de peces no es muy densa. Por

ello, en ausencia de los selacios, los peces comestibles crecerían de acuerdo con la ley malthusiana de crecimiento de poblaciones $x = a\dot{x}$, para una constante positiva a. Además —razonaba Volterra— el número de contactos por unidad de tiempo entre depredadores y presas es bxy, para una constante positiva b. Por lo tanto, $\dot{x} = ax - bxy$. De la misma manera, Volterra concluyó que los depredadores tenían una tasa natural de decrecimiento $-cy$, proporcional a su número, y que su incremento tenía una tasa dxy proporcional también a su número en ese momento y y al suministro de alimento x. De modo que

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy. \tag{1}$$

El sistema de ecuaciones (1) describe la interacción entre los selacios y los peces comestibles en el caso de no haber pesca alguna. A continuación se estudiará este sistema y se obtendrán algunas propiedades importantes de sus soluciones. Después, se incluirá en el modelo el efecto de la pesca y se mostrará que un bajo nivel de la captura es más benéfico para los selacios que para las especies comestibles. De hecho, se llegará al sorprendente resultado de que un bajo nivel de pesca, en realidad, es dañino para los peces comestibles.

Obsérvese primero que (1) tiene dos soluciones de equilibrio $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ y $x(t) = c/d$, $y(t) = a/b$. Por supuesto, que la primera solución de equilibrio no interesa. El sistema tiene también la familia de soluciones $x(t) = x_0e^{at}$, $y(t) = 0$, y $x(t) = 0$, $y(t) = y_0e^{-ct}$. Así que tanto el eje x como el eje y son órbitas de (1). Eso implica que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1), que empieza en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$ en el instante $t = t_0$, permanecerá ahí para todo tiempo futuro $t \geq t_0$.

Las órbitas de (1) para $x, y \neq 0$ son las curvas soluciones de la ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}. \tag{2}$$

Esta ecuación es separable, ya que puede ser expresada en la forma

$$\frac{a - by}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-c + dx}{x}.$$

Por consiguiente, $a \ln y - by + c \ln x - dx = k_1$, para una constante k_1. Tomando exponenciales en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\frac{y^a}{e^{by}}\frac{x^c}{e^{dx}} = K \tag{3}$$

para una constante K. Así pues, las órbitas de (1) son la familia de curvas definidas por (3) y, como se verá a continuación, dichas curvas son *cerradas*.

LEMA 1. *La ecuación* (3) *define una familia de curvas cerradas para* $x, y > 0$.

DEMOSTRACIÓN. El primer paso consiste en determinar el comportamiento de las funciones $f(y) = y^a/e^{by}$ y $g(x) = x^c/e^{dx}$ para x y y positivas. Para tal finalidad, obsérvese que $f(0) = 0$, $f(\infty) = 0$, y además, $f(y)$ es positiva para $y > 0$. Calculando

$$f'(y) = \frac{ay^{a-1} - by^a}{e^{by}} = \frac{y^{a-1}(a - by)}{e^{by}},$$

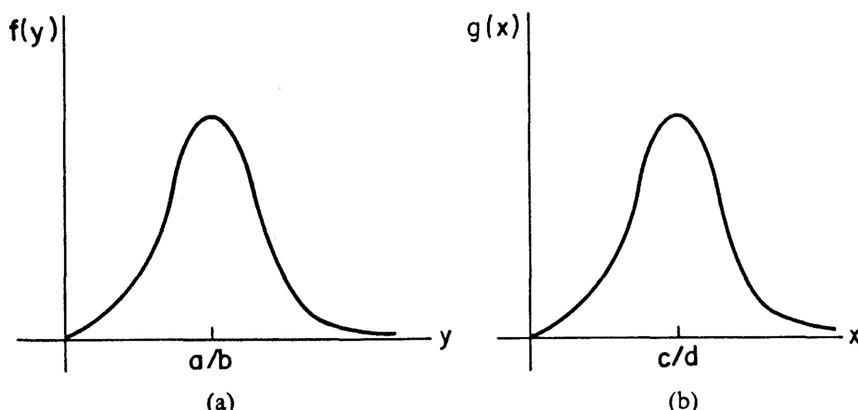


FIGURA 1. (a) Gráfica de $f(y) = y^a e^{-by}$; (b) gráfica de $g(x) = x^c e^{-dx}$

se ve que $f(y)$ tiene un solo punto crítico en $y = a/b$. Por consiguiente, $f(y)$ alcanza su valor máximo $M_y = (a/b)^a/e^a$ en $y = a/b$ y la gráfica de $f(y)$ tiene la forma que se describe en la Figura 1a. Análogamente, $g(x)$ alcanza su valor máximo $M_x = (c/d)^c/e^c$ en $x = c/d$, y la gráfica de $g(x)$ tiene la forma que se ilustra en la Figura 1b.

A partir del análisis anterior, se concluye que la ecuación (3) no tiene soluciones $x, y > 0$ para $K > M_x M_y$, y que para $K = M_x M_y$ tiene la solución $x = c/d$, $y = a/b$. De modo que solamente es necesario considerar el caso $K = \lambda M_y$, donde λ es un número positivo menor que M_x. Obsérvese primero que la ecuación $x^c/e^{dx} = \lambda$ tiene una solución $x = x_m < c/d$ y otra solución $x = x_M > c/d$. Por lo tanto, la ecuación

$$f(y) = y^a e^{-by} = \left(\frac{\lambda}{x^c e^{-dx}}\right) M_y$$

no tiene solución y si x es menor que x_m, o bien mayor que x_M. Si $x = x_m$ o x_M, entonces tiene solamente la solución $y = a/b$, mientras que para cada x entre x_m y x_M tiene dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$. La solución menor $y_1(x)$ es siempre menor que a/b y la solución mayor $y_2(x)$ es siempre mayor que a/b. Cuando x tiende a x_m o a x_M,

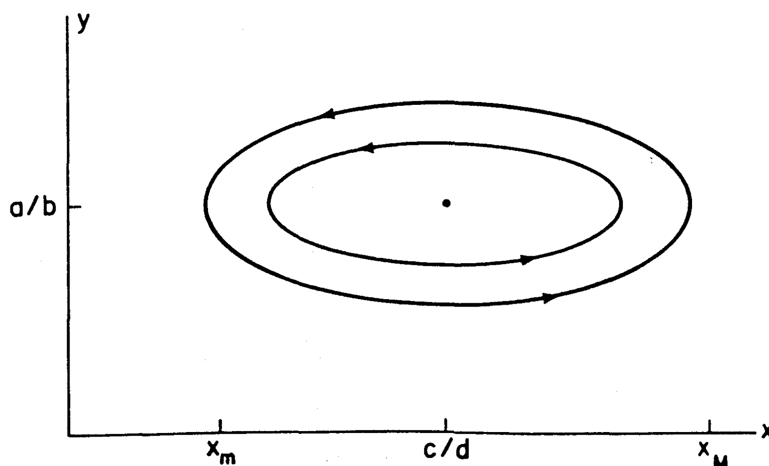


FIGURA 2. Órbitas de (1) para x, y positivas.

tanto $y_1(x)$ como $y_2(x)$ tienden a a/b. Por consiguiente, las curvas definidas por (3) son cerradas para x y y positivas, y tienen la forma que se muestra en la Figura 2. Más aún, (con excepción de $x = c/d$, $y = a/b$) ninguna de dichas curvas cerradas contiene puntos de equilibrio de (1). Por lo tanto, todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de (1), con $x(0)$ y $y(0)$ positivas son funciones *periódicas* del tiempo. Es decir, toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1), con $x(0)$, $y(0)$ positivas, tiene la propiedad de que $x(t + T) = x(t)$, y $y(t + T) = y(t)$ para alguna T positiva. □

Ahora bien, los datos de D'Ancona son en realidad un *promedio* de la proporción de depredadores en cada uno de los periodos de un año. Así pues, para comparar los datos con las predicciones de (1), es preciso calcular los "valores promedio" de $x(t)$ y $y(t)$, para cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (1). Es sorprendente que sea posible calcular dichos valores aun a pesar de que no se conocen $x(t)$ y $y(t)$ exactamente. Ese es el contenido del Lema 2.

LEMA 2. *Sea $x(t)$, $y(t)$ una solución periódica de* (1), *con periodo $T > 0$. Defínanse los valores promedio de x y y como*

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt.$$

Entonces $x = c/d$ y $y = a/b$. Dicho de otro modo, los valores promedio de $x(t)$ y de $y(t)$ son los valores de equilibrio.

DEMOSTRACIÓN. Dividiendo entre x ambos lados de la primera ecuación de (1), se obtiene $\dot{x}/x = a - by$, de manera que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[a - by(t)\right]dt.$$

Ahora bien, $\int_0^T \dot{x}(t)/x(t)dt = \ln x(T) - \ln x(0)$, lo cual es, a su vez, igual a cero, ya que $x(T) = x(0)$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{T}\int_0^T by(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T a\,dt = a,$$

de modo que $\bar{y} = a/b$. Análogamente, dividiendo entre $Ty(t)$ ambos lados de la segunda ecuación de (1), e integrando de 0 a T, se obtiene que $\bar{x} = c/d$. □

Ahora es posible incluir los efectos de la pesca en el modelo. Obsérvese que la pesca reduce la población de los peces comestibles en una tasa $\varepsilon x(t)$, y la de los selacios, en una tasa $\varepsilon y(t)$. La constante ε refleja la intensidad de la pesca, es decir, el número de barcos pesqueros en operación y el número de redes en el agua. Así pues, la situación completa queda descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales modificado

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy - \varepsilon x = (a-\varepsilon)x - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - \varepsilon y = -(c+\varepsilon)y + dxy.\end{aligned} \tag{4}$$

Este sistema es idéntico al sistema (1) (para $a - \varepsilon > 0$), con a reemplazada por $a - \varepsilon$, y c sustituida por $c + \varepsilon$. Por lo tanto, los valores promedio de $x(t)$ y $y(t)$ serán ahora

$$\bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{d}, \qquad \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}. \tag{5}$$

Por consiguiente, un nivel moderado de pesca ($\varepsilon < a$) en realidad incrementa la cantidad de peces comestibles, en promedio, al igual que disminuye la cantidad de selacios. Recíprocamente, un nivel bajo de pesca incrementa el número de selacios, en promedio, y disminuye el número de peces comestibles. Este sorprendente resultado, conocido como *principio de Volterra*, explica los datos de D'Ancona y resuelve por completo el problema.

El principio de Volterra tiene aplicaciones interesantes para los tratamientos con insecticidas que destruyen tanto al insecto depredador como a su presa. Implica que la aplicación de insecticidas en realidad incrementará la población de aquellos insectos que son mantenidos bajo control por otros insectos depredadores. Una confirmación sorprendente de tal principio se encuentra en el caso del pulgón de los cítricos (*Icerya purchasi*), el cual, al ser introducido en 1868 accidentalmente proveniente de Australia, amenazaba con destruir la industria citrícola de Estados Unidos. Posteriormente se introdujo a su depredador natural en Australia, la mariquita (*Novius Cardinalis*), la cual redujo el número de pulgones a un nivel bajo. Cuando se descubrió que el DDT mataba a los pulgones, se les aplicó éste por parte de los fruticultores con la esperanza de reducir aún más su nivel. Sin embargo, y de acuerdo con el principio de Volterra, ¡el resultado fue un incremento en el número de tales insectos!

Curiosamente, muchos ecologistas y biólogos se negaron a aceptar como exacto el modelo de Volterra. Subrayaban el hecho de que en la mayoría de los sistemas presa-depredador que se observaban, no ocurría el comportamiento oscilatorio predicho por el modelo de Volterra. Más bien, conforme el tiempo transcurre, la mayoría de los sistemas presa-depredador tienden a estados de equilibrio. La respuesta a tales argumentos es que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) no debe ser interpretado como un modelo general de las interacciones presa-depredador. Esto se debe a que tanto los peces comestibles como los selacios no compiten intensamente entre sí por los recursos disponibles. Un modelo más general para interacciones presa-depredador es el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = ax - bxy - ex^2, \qquad \dot{y} = -cy + dxy - fy^2. \tag{6}$$

Aquí el término ex^2 refleja la competición interna de las presas x por los recursos externos limitados. El término fy^2 refleja la competición entre los depredadores por el número limitado de presas. Las soluciones de (6) no son periódicas en general. De hecho, en el Ejemplo 1 de la Sección 4.8 ya se mostró que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de (6), con $x(0)$ y $y(0)$ positivas, tienden finalmente a la solución de equilibrio $x = a/e$, $y = 0$ si c/d es mayor que a/e. En tal caso, todos los depredadores mueren, ya que el alimento de que disponen resulta inadecuado para sus necesidades.

Sorprendentemente, algunos ecologistas y biólogos rechazan incluso el modelo más general (6) como inexacto. Como contraejemplo citan los experimentos del biólogo matemático G.F. Gause. En dichos experimentos la población estaba integrada por dos especies de protozoarios, uno de los cuales, *Didinium nasatum*, se alimenta de otro, *Paramecium caudatum*. En todos los experimentos realizados por Gause, los Didinium aniquilaron rápidamente a los Paramecium para morir después de inanición. Esta situa-

ción no puede ser modelada por el sistema de ecuaciones (6), ya que ninguna solución de (6) con $x(0)y(0) \neq 0$ puede llegar a valer cero en x o en y, en un tiempo finito.

La respuesta a esta argumentación es que el Didinium es un tipo especial y nada representativo del depredador. Además son feroces atacantes y requieren una tremenda cantidad de alimento; un Didinium necesita un Paramecium fresco cada tres horas. Por otro lado el Didinium no perece a causa de un suministro insuficiente de Paramecium, sino que continúa multiplicándose, aunque produciendo descendencia de menor tamaño. Así que el sistema de ecuaciones (6) no modela con exactitud la interacción entre el Paramecium y el Didinium. Un mejor modelo para este caso es el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = ax - b\sqrt{x}\, y, \qquad \frac{dy}{dt} = \begin{cases} d\sqrt{x}\, y, & x \neq 0 \\ -cy, & x = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Es posible mostrar (Ejercicio 6) que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (7) con $x(0)$ y $y(0)$ positivas toma el valor de cero para x, en un tiempo finito. Eso no contradice el teorema de existencia y unicidad, ya que la función

$$g(x,y) = \begin{cases} d\sqrt{x}\, y, & x \neq 0 \\ -cy, & x = 0 \end{cases}$$

no tiene derivada parcial con respecto a x o a y, en $x = 0$.

Por último, es preciso mencionar que hay algunas interacciones presa-depredador en la naturaleza que no pueden ser modeladas por ningún sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tales casos ocurren cuando la presa dispone de un refugio que no es accesible a los depredadores. En tales situaciones es imposible afirmar definitivamente acerca del número futuro de presas y depredadores, ya que no puede predecirse cuántas presas cometerán la tontería de abandonar su refugio. Dicho de otro modo, tal proceso es *aleatorio*, más que *determinista*, y por lo tanto no puede ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Lo anterior se verificó directamente en un famoso experimento de Gause. Colocó éste cinco Paramecium y tres Didinium en cada uno de treinta tubos de ensayo idénticos, y proporcionó un refugio para los Paramecium. Dos días despues encontró que en cuatro tubos los depredadores habían muerto, mientras que en los restantes veintiséis tubos se encontraba poblaciones de Paramecium que oscilaban entre dos y treinta y ocho individuos.

BIBLIOGRAFÍA

Volterra, V.: "Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie". París, 1931.

EJERCICIOS

1. Encuentre todos los puntos de equilibrio de (6) que son realistas y determine su estabilidad.

2. En la Sección 4.8 se mostró que $y(t)$ finalmente tiende a cero para toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (6), si $c/d > a/e$. Demuestre que existen soluciones $x(t)$, $y(t)$ de (6)

para las cuales $y(t)$ crece primero hasta un valor máximo, para decrecer después hacia cero. (Para un observador que ve solamente a los depredadores sin tener noticias de las presas sería muy difícil de explicar el caso de una población que pasa por un máximo para llegar después a la extinción.)

3. En muchos casos, son los iembros adultos de la presa los que son atacados principalmente por los depredadores, mientras que los miembros jóvenes se encuentran mejor protegidos, ya sea por su menor tamaño o por vivir en sitios diferentes. Sea x_1 el número de presas en estado adulto, x_2 el número de presas jóvenes y, por último, y el número de depredadores. Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 + a_2x_2 - bx_1y \\ \dot{x}_2 &= nx_1 - (a_1 + a_2)x_2 \\ \dot{y} &= -cy + dx_1y \end{aligned}$$

donde a_2x_2 representa el número de jóvenes (por unidad de tiempo) que pasan al estado adulto, y n, la tasa de natalidad proporcional al número de adultos. Obtenga todas las soluciones de equilibrio de este sistema.

4. Existen diversos casos en la naturaleza en los que la especie 1 se alimenta de la especie 2, y ésta se alimenta a su vez de la especie 3. Un ejemplo de dicha situación se da en la isla de Komodo en Malaya, la cual está poblada por enormes reptiles carnívoros y por mamíferos —su alimento— los cuales se alimentan a su vez de la rica vegetación de la isla. Suponga que los reptiles no tienen influencia directa sobre la vegetación y que solamente las plantas compiten entre sí por los recursos disponibles. Un sistema de ecuaciones diferenciales que describe dicha interacción es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 \\ \dot{x}_3 &= a_3x_3 - a_4x_3^2 - c_{31}x_1x_3 \end{aligned}$$

Halle todas las soluciones de equilibrio de este sistema.

5. Considere un sistema presa-depredador en el cual el depredador tiene otras alternativas de alimentación. Un sistema así puede ser modelado por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1x_1(\beta_1 - x_1) + \gamma_1x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2x_2(\beta_2 - x_2) - \gamma_2x_1x_2 \end{aligned}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las poblaciones de depredador y presa, en el tiempo t, respectivamente.

(a) Demuestre que el cambio de coordenadas $\beta_i y_i(t) = x_i(t/\alpha_i\beta_i)$ reduce el sistema a las ecuaciones

$$\dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) + a_1y_1y_2, \qquad \dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) - a_2y_1y_2$$

donde $a_1 = \gamma_1\beta_2/\alpha_1\beta_1$ y $a_2 = \gamma_2\beta_1/\alpha_2\beta_2$.

(b) ¿Cuáles son las poblaciones de equilibrio estables cuando (i) $0 < a_2 < 1$, (ii) $a_2 > 1$?

(c) Se ha observado que $a_1 = 3a_2$ (donde a_2 es la medida de la agresividad del depredador). ¿Cuál es el valor de a_2 si el instinto del depredador es maximizar su población de equilibrio estable?

6. (a) Sea $x(t)$ una solución de $\dot{x} = ax - M\sqrt{x}$, con $M > a\sqrt{x(t_0)}$. Demuestre que

$$a\sqrt{x} = M - \left(M - a\sqrt{x(t_0)}\right)e^{a(t-t_0)/2}.$$

(b) Deduzca de (a) que $x(t)$ tiende a cero en un tiempo finito.

(c) Sea $x(t)$, $y(t)$ una solución de (7), con $by(t_0) > a\sqrt{x(t_0)}$. Demuestre que $x(t)$ toma el valor de cero en un tiempo finito. *Sugerencia:* Observe que $y(t)$ es creciente para $t \geq t_0$.

(d) Es posible mostrar que en algún momento $by(t)$ sobrepasa el valor de $a\sqrt{x(t_0)}$, para cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (7) con $x(t_0)$ y $y(t_0)$ positivas. Concluya, por lo tanto, que todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de (7) alcanzan el valor de cero en un tiempo finito.

4.11 PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN COMPETITIVA EN BIOLOGÍA DE POBLACIONES

Se observa con frecuencia en la naturaleza que la lucha por la existencia entre dos especies similares que compiten por un mismo alimento y un mismo espacio vital, ambos limitados, termina casi siempre con la completa extinción de una de las especies. Este fenómeno se conoce como el "principio de exclusión competitiva". Darwin lo enunció por primera vez, aunque en una forma un poco diferente, en 1859. En su artículo "El origen de las especies por la selección natural" expresa: "Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque no en forma invariable, mucho mayor similitud en habitat, constitución y siempre en estructura, la lucha entre ellos será, por lo general, más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos".

Hay una explicación biológica muy interesante del principio de exclusión competitiva. La piedra angular de la teoría es la idea del nicho. Un *nicho* indica la ubicación característica de una especie dada en una comunidad; es decir, cuáles son sus hábitos, alimentación y modo de vida. Se ha observado que como resultado de la competición, dos especies similares rara vez ocupan el mismo nicho. Más bien, cada una de las especies adopta aqel tipo de alimentación y modo de vida con los cuales tiene ventaja sobre su competidor. Si las dos especies tienden a ocupar el mismo nicho, entonces la lucha por la sobrevivencia entre ellas será muy intensa y el resultado será la extinción de la especie más débil.

Un ejemplo excelente de esta teoría es la colonia de golondrinas de mar que habitan la isla de Jorilgatch, en el Mar Negro. Dicha colonia está formada por cuatro especies de golondrinas de mar: la llamada "sandwich", la común, la de pico negro y la pequeña. Las cuatro especies se unen para ahuyentar de la colonia a los depredadores. Sin embargo, hay una diferencia clara entre ellas en lo que respecta a su forma de conseguir comida. La especie "sandwich" vuela hacia el mar abierto para atrapar ciertas especies, mientras que la de pico negro se alimenta exclusivamente de lo que encuentra en tierra. Por otro lado, la golondrina de mar común y la golondrina pequeña capturan peces que se encuentran cerca de la costa. Ambas descubren a los peces durante el vuelo

y se sumergen en el agua para capturarlos. La pequeña golondrina de mar atrapa a sus presas en aguas pantanosas y poco profundas, mientras que la golondrina de mar común caza en lugares más alejados de la orilla. De esta manera, estas cuatro especies similares de la golondrina de mar, que viven muy cerca unas de otras en una pequeña isla, difieren notablemente tanto en su manera de alimentarse como en su manera de conseguir el alimento. Cada una ocupa un nicho en el cual posee ventajas sobre sus competidores.

En esta sección se presenta una rigurosa demostración matemática de la ley de exclusión competitiva. Tal cosa se logrará deduciendo un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la interacción entre dos especies similares, y mostrando después que todas las soluciones del sistema tienden a un estado de equilibrio en el cual una de las especies queda extinta.

Para elaborar un modelo matemático de la lucha por la sobrevivencia entre dos especies competidoras, es intructivo analizar nuevamente la ley logística para el crecimiento de poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2. \qquad (1)$$

Esta ecuación gobierna el crecimiento de la población $N(t)$ de una sola especie cuyos miembros compiten entre sí por alimento y espacio vital limitados. Recuérdese que $N(t)$ tiende a la población límite $K = a/b$, cuando t tiende a infinito. Dicha población límite puede ser identificada como la máxima de la especie que el microcosmos puede albergar. En términos de K, se puede escribir la ley logística (1) en la forma

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{b}{a}N\right) = aN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = aN\left(\frac{K-N}{K}\right). \qquad (2)$$

La ecuación (2) tiene la siguiente interpretación interesante. Si la población N es muy pequeña, entonces crece de acuerdo con la ley malthusiana $dN/dt = aN$. El término aN se conoce como "potencial biótico" de la especie. Se trata de la tasa potencial de crecimiento de la especie en condiciones ideales, y se desarrollará si no hay restricciones de alimento o de espacio vital y si los individuos de la especie no excretan algún producto residual tóxico. Sin embargo, conforme la población crece, el potencial biótico se reduce según el factor $(K - N)/K$, el cual es el número relativo de sitios que aún están vacantes en el microcosmos. Los ecólogos llaman a este factor *resistencia ambiental al crecimiento.*

Ahora bien, sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ las poblaciones en el tiempo t de las especies 1 y 2, respectivamente. Y sean además, K_1 y K_2 las poblaciones máximas de las especies 1 y 2 que puede albergar el microcosmos; así mismo, sean a_1N_1 y a_2N_2 los potenciales bióticos de las especies 1 y 2. Entonces $N_1(t)$ y $N_2(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1N_1\left(\frac{K_1 - N_1 - m_2}{K_1}\right), \qquad \frac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\frac{K_2 - N_2 - m_1}{K_2}\right), \qquad (3)$$

donde m_2 es el número total de sitios de la primera especie que son ocupados por miembros de la segunda, y m_1 es el número total de sitios de la segunda especie que son ocupados por miembros de la primera. A primera vista parecería que $m_2 = N_2$ y $m_1 = N_1$. Sin embargo, en general no es ese el caso, ya que es muy improbable que dos especies ocupen el entorno o ambiente en forma idéntica. Un número de individuos de la especie 1 no consume en promedio igual cantidad de alimento ni requiere el mismo espacio

vital ni excreta igual cantidad de productos residuales de la misma composición química, que un número igual de elementos de la especie 2. En general, se debe tomar $m_2 = \alpha N_2$ y $m_1 = \beta N_1$ para las constantes α y β. Dichas constantes indican el grado de influencia de una especie sobre la otra. Si no coinciden los intereses de las dos especies y ocupan nichos separados, entonces tanto α como β son iguales a cero. Si las dos especies reclaman el mismo nicho y son muy similares, entonces α y β serán muy cercanas a la unidad. Por otro lado, si una de las especies —por ejemplo la especie 2— utiliza el medio ambiente de manera ineficiente; es decir, si consume grandes cantidades de alimento y excreta productos residuales altamente nocivos, entonces un individuo de la especie 2 ocupará el lugar de muchos individuos de la especie 1. En tal situación, el coeficiente α será muy grande.

La restricción que se presenta a continuación será en el caso de que las dos especies sean muy parecidas y reclamen el mismo nicho. Entonces $\alpha = \beta = 1$, y $N_1(t)$ y $N_2(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1\left(\frac{K_1 - N_1 - N_2}{K_1}\right), \qquad \frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2\left(\frac{K_2 - N_1 - N_2}{K_2}\right). \tag{4}$$

Aquí será de esperar una lucha muy intensa por la sobrevivencia entre las especies 1 y 2, que tendrá como resultado la extinción de una de las especies. A continuación, se muestra que efectivamente eso sucede.

TEOREMA 6. (Principio de exclusión competitiva). *Supóngase que K_1 es mayor que K_2. Entonces, toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) tiende a la solución de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$ cuando t tiende a infinito. Dicho de otro modo, si las especies 1 y 2 son casi idénticas y el microcosmos puede albergar más miembros de la especie 1 que de la especie 2, entonces esta última terminará por extinguirse.*

El primer paso para demostrar el Teorema 6 es señalar que $N_1(t)$ y $N_2(t)$ no pueden tomar valores negativos. Para ello, recuérdese de la Sección 1.5 que

$$N_1(t) = \frac{K_1 N_1(0)}{N_1(0) + (K_1 - N_1(0))e^{-a_1 t}}, \qquad N_2(t) = 0$$

es una solución de (4) para cualquier elección de $N_1(0)$. La órbita de esta solución en el plano $N_1 - N_2$ es el punto (0, 0), para $N_1(0) = 0$; la recta $0 < N_1 < K_1$, $N_2 = 0$, para $0 < N_1(0) < K_1$; el punto $(K_1, 0)$, para $N_1(0) = K_1$; y la recta $K_1 < N_1 < \infty$, $N_2 = 0$, para $N_1(0) > K_1$. Así pues, el eje N_1, para $N_1 \geq 0$, es la unión de cuatro órbitas distintas. De manera similar, el eje N_2, para $N_2 \geq 0$, es la unión de cuatro órbitas distintas de (4). Esto implica que todas las soluciones $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empiezan en el primer cuadrante ($N_1 > 0$, $N_2 > 0$) del plano N_1N_2, deben permanecer ahí para todo tiempo futuro.

El segundo paso en la demostración del Teorema 6 es dividir el primer cuadrante en regiones, en las que tanto dN_1/dt como dN_2/dt tengan signos fijos. Esto se logra de la siguiente manera. Sean l_1 y l_2 las rectas $K_1 - N_1 - N_2 = 0$ y $K_2 - N_1 - N = 0$, respectivamente. Obsérvese que dN_1/dt es negativa si (N_1, N_2) está por arriba de l_1, y positiva si (N_1, N_2) está por abajo de l_1. De manera similar, dN_2/dt es negativa si

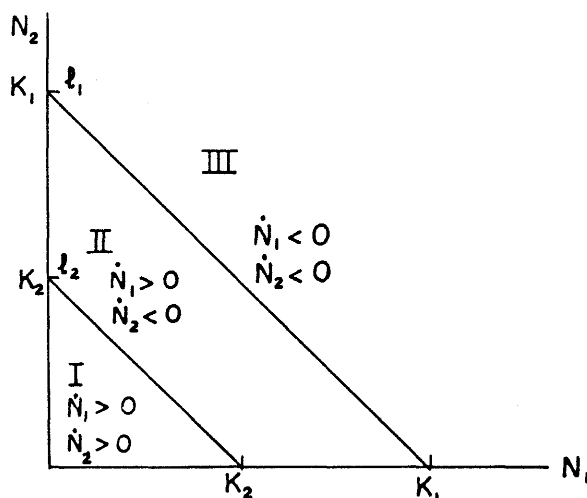


FIGURA 1.

(N_1, N_2) está por encima de l_2, y positiva si (N_1, N_2) está por debajo de l_2. Así pues, las dos rectas paralelas l_1 y l_2 dividen el primer cuadrante del plano N_1N_2 en tres regiones (Fig. 1), en las cuales tanto dN_1/dt como dN_2/dt tienen signos fijos. En la región I, tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ crecen con el tiempo (a lo largo de cualquier solución de (4)); en la región II, $N_1(t)$ crece y $N_2(t)$ decrece con el tiempo; y en la región III, tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ decrecen con el tiempo.

LEMA 1. *Toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de* (4) *que empieza en la región* I *en $t = t_0$, debe salir de dicha región en algún tiempo futuro.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) permanece en la región I para todo tiempo $t \geq t_0$. Eso implica que tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ son funciones monótonas crecientes del tiempo para $t \geq t_0$, con $N_1(t)$ y $N_2(t)$ menores que K_2. Por consiguiente, por el Lema 1 de la Sección 4.8, tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 de la Sección 4.8 implica que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (4). Ahora bien, los únicos puntos de equilibrio de (4) son (0, 0), $(K_1, 0)$ y $(0, K_2)$, y (ξ, η) obviamente no puede ser igual a ninguno de estos tres puntos. Se concluye, por lo tanto, que cualquier solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empieza en la región I, saldrá de ella en algún tiempo futuro. □

LEMA 2. *Toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de* (4) *que empieza en la región* II *en el tiempo $t = t_0$, permanecerá en dicha región para todo tiempo futuro $t \geq t_0$, y tenderá finalmente a la solución de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) sale de la región II en el tiempo $t = t^*$. Entonces, $\dot{N}_1(t^*)$ es igual a cero o bien $\dot{N}_2(t^*)$ lo es, ya que la única manera en la que una solución de (4) puede salir de la región II es atravesando

las rectas l_1 o l_2. Supóngase que $\dot{N}_1(t^*) = 0$. Al derivar con respecto a t en ambos lados de la primera ecuación de (4), y sustituir $t = t^*$, se obtiene

$$\frac{d^2N_1(t^*)}{dt^2} = \frac{-a_1N_1(t^*)}{K_1}\frac{dN_2(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es positiva. Por lo tanto, $N_1(t)$ tiene un mínimo en $t = t^*$. Pero tal cosa es imposible, ya que $N_1(t)$ es creciente siempre que una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) se encuentra en la región II. De manera similar, si $\dot{N}_2(t^*) = 0$, entonces

$$\frac{d^2N_2(t^*)}{dt^2} = \frac{-a_2N_2(t^*)}{K_2}\frac{dN_1(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es negativa, implicando así que $N_2(t)$ tiene un máximo en $t = t^*$. Pero tal cosa es imposible, ya que $N_2(t)$ es decreciente siempre que una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) esté en la región II.

Los anteriores razonamientos señalan que cualquier solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empiece en la región II en el tiempo $t = t_0$, permanecerá en la II para todo tiempo futuro $t \geq t_0$. Eso implica que $N_1(t)$ es monótona creciente y $N_2(t)$ es monótona decreciente, para $t \geq t_0$, con $N_1(t) < K_1$ y $N_2(t) > K_2$. Por lo tanto, por el Lema 1 de la Sección 4.8, tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 de la Sección 4.8 implica que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (4). Ahora bien, (ξ, η) obviamente no puede ser igual a $(0, 0)$ o bien a $(0, K_2)$. Por consiguiente, $(\xi, \eta) = (K_1, 0)$, lo que demuestra el Lema 2. □

LEMA 3. *Toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empieza en la región III en el tiempo $t = t_0$ y permanece en ella para todo tiempo futuro, tiende a la solución de equilibrio $N_1(t) = K_1$, $N_2(t) = 0$, cuando t tiende a infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Si una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) permanece en la región III para $t \geq t_0$, entonces tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ son funciones monótonas decrecientes del tiempo para $t \geq t_0$, con $N_1(t) > 0$ y $N_2(t) > 0$. Por tanto, por el Lema 1 de la Sección 4.8, tanto $N_1(t)$ como $N_2(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 de la Sección 4.8 implica que ξ, η es un punto de equilibrio de (4). Ahora bien, (ξ, η) obviamente no puede ser igual a $(0, 0)$ ni a $(0, K_2)$. Por lo tanto, $(\xi, \eta) = K_1, 0)$. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Los Lemas 1 y 2 establecen que cualquier solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empieza en las regiones I o II en el tiempo $t = t_0$, tienden a la solución de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$ cuando t tiende a infinito. De manera similar, el Lema 3 muestra que cualquier solución$N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empieza en la región III en el tiempo $t = t_0$ y permanece en ella para todo tiempo futuro, también tiende a la solución de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$. Obsérvese, además, que cualquier solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) que empieza en l_1 o l_2, entra inmediatamente a la región II. Por último, si una solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) sale de la región III, debe entonces cruzar la recta l_1 y entrar inmediatamente después a la región II. El Lema 2 implica entonces que dicha solución tiende a la solución de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$. □

El Teorema 6 trata el caso de especies idénticas, es decir, $\alpha = \beta = 1$. Mediante un análisis similar (Ejercicios del 4 al 6) se puede predecir el resultado de la lucha por la sobrevivencia para cualesquiera valores de α y β.

BIBLIOGRAFÍA

Gause, G.F., *The Struggle for Existence*, Dover Publications, New York, 1964.

EJERCICIOS

1. Exprese el sistema de ecuaciones (4) en la forma

$$\frac{K_1}{a_1N_1}\frac{dN_1}{dt} = K_1 - N_1 - N_2, \qquad \frac{K_2}{a_2N_2}\frac{dN_2}{dt} = K_2 - N_1 - N_2.$$

Reste después las dos ecuaciones e integre para obtener directamente que $N_2(t)$ tiende a cero para todas las soluciones $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (4) con $N_1(t_0) > 0$.

2. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1[-a_1 + c_1(1 - b_1N_1 - b_2N_2)]\\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2[-a_2 + c_2(1 - b_1N_1 - b_2N_2)]\end{aligned} \qquad (*)$$

es un modelo para dos especies que compiten por el mismo recurso limitado. Suponga que $c_1 > a_1$ y $c_2 > a_2$. Deduzca del Teorema 6 que $N_1(t)$ finalmente tiende a cero si $a_1c_2 > a_2c_1$, mientras que $N_2(t)$ último tiende a cero si $a_1c_2 > a_2c_1$.

3. En 1926, Volterra presentó el siguiente modelo para dos especies que compiten por el mismo alimento que está limitado:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= [b_1 - \lambda_1(h_1N_1 + h_2N_2)]N_1\\ \frac{dN_2}{dt} &= [b_2 - \lambda_2(h_1N_1 + h_2N_2)]N_2.\end{aligned}$$

Suponga que $b_1/\lambda_1 > b_2/\lambda_2$. (El coeficiente b_i/λ_i se conoce como la susceptibilidad de la especie i a la escasez de alimento.) Demuestre que la especie 2 terminará por extinguirse si $N_1(t_0) > 0$.

Los Problemas del 4 al 6 se refieren al sistema de ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{a_1N_1}{K_1}(K_1 - N_1 - \alpha N_2), \qquad \frac{dN_2}{dt} = \frac{a_2N_2}{K_2}(K_2 - N_2 - \beta N_1). \qquad (*)$$

4. (a) Suponga que $K_1/\alpha > K_2$ y $K_2/\beta < K_1$. Demuestre que $N_2(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, para toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (*) con $N_1(t_0) > 0$.
   (b) Suponga que $K_1/\alpha > K_2$ y $K_2/\beta > K_1$. Pruebe que $N_1(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito para toda solución $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (*) con $N_1N_2(t_0) >$

0. *Sugerencia:* Trace las rectas $l_1: N_1 + \alpha N_2 = K_1$ y $l_2: N_2 + \beta N_1 = K_2$, y siga la demostración del Teorema 6.

5. Suponga que $K_1/\alpha > K_2$ y $K_2/\beta > K_1$. Demuestre que todas las soluciones $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (*), con $N_1(t_0)$ y $N_2(t_0)$ positivas, tienden finalmente a la solución de equilibrio

$$N_1 = N_1^0 = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1-\alpha\beta}, \qquad N_2 = N_2^0 = \frac{K_2 - \beta K_1}{1-\alpha\beta}.$$

Sugerencia: (a) Trace las rectas $l_1: N_1 + \alpha N_2 = K_1$ y $l_2: N_2 + \beta N_1 = K_2$. Estas dos líneas dividen al primer cuadrante en cuatro regiones (Fig. 2) en las cuales tanto $\dot{N}_1$ como $\dot{N}_2$ tienen signos fijos.

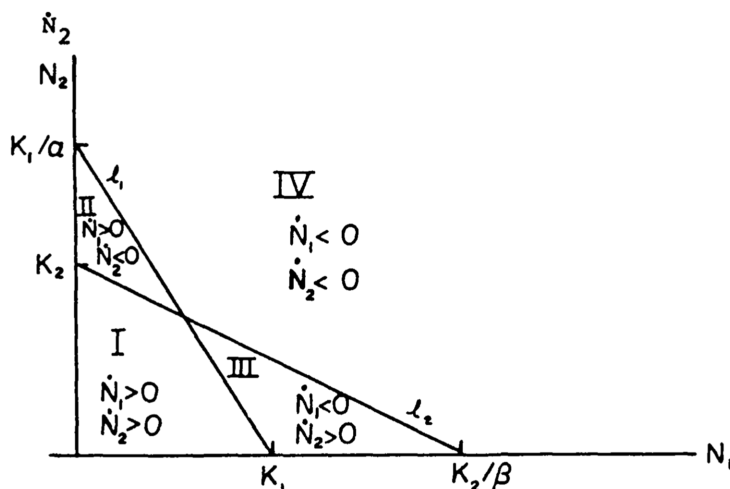


FIGURA 2.

(b) Demuestre que todas las soluciones $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (*) que empiezan en la región II o bien en la región III, permanecen en dichas regiones y tienden finalmente a la solución de equilibrio $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$.

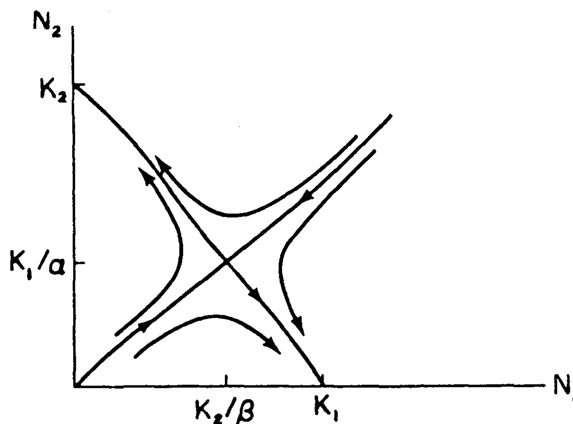


FIGURA 3.

(c) Pruebe que todas las soluciones $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (*) que permanecen exclusivamente en la región I o bien en la región IV para todo tiempo $t \geq t_0$, tienden por último a la solución de equilibrio $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$.

6. Suponga que $K_1/\alpha < K_2$ y $K_2/\beta < K_1$.
(a) Demuestre que la solución de equilibrio $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ de (*) es inestable.
(b) Demuestre que las soluciones de equilibrio $N_1 = K_1$, $N_2 = 0$ y $N_1 = 0$, $N_2 = K_2$ de (*) son asintóticamente estables.
(c) Pruebe que la solución de equilibrio $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$ (Ejercicio 5) de (*) es un punto silla. (Los cálculos son muy laboriosos.)
(d) No es difícil ver que el retrato fase de (*) debe tener la forma descrita en la Figura 3.

4.12 TEOREMA DEL UMBRAL EN EPIDEMIOLOGÍA

Considérese la siguiente situación: un pequeño grupo de personas que tiene una enfermedad infecciosa es introducido a una población más grande, la cual está en condiciones de adquirir el padecimiento. ¿Qué ocurre cuando transcurre el tiempo?. ¿Desaparecerá rápidamente la enfermedad o se presentará una epidemia?. ¿Cuántas personas enfermarán finalmente? Con el fin de contestar a estas preguntas se deducirá un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la propagación o diseminación de una enfermedad infecciosa dentro de una población, y se analizará el comportamiento de sus soluciones. Este enfoque conducirá al famoso Teorema del Umbral en Epidemiología, el cual establece que se desatará una epidemia si el número de personas susceptibles a la enfermedad sobrepasa un cierto valor de umbral.

Se iniciará con el supuesto de que la enfermedad que se está considerando confiere inmunidad permanente a cualquier individuo que se haya recuperado completamente de ella, y que su periodo de incubación es muy breve. Esta última suposición implica que un individuo que contrae la enfermedad se convierte inmediatamente en agente de contagio. En tal caso es posible dividir la población en tres clases de individuos: la clase infectiva (I), la clase susceptible (S) y la clase retirada (R). La clase infectiva la constituyen aquellos individuos que están en condiciones de transmitir la enfermedad a otros. La clase susceptible está formada por los individuos que no son agentes de infección pero que están en condiciones de adquirir la enfermedad y volverse infecciosos. A la clase retirada la forman los individuos que adquirieron la enfermedad y murieron, los que se han recuperado y son inmunes permanentemente, y los que fueron aislados hasta su recuperación y adquisición de inmunidad permanente.

Se supone que la diseminación de una enfermedad se rige por las siguientes reglas:

Regla 1: En el intervalo de tiempo considerado la población permanece en un nivel fijo N. Ello significa, por supuesto, que se hace caso omiso de nacimientos, muertes por causas ajenas a la enfermedad considerada, inmigración y emigración.

Regla 2: La rapidez de variación de la población susceptible es proporcional al producto del número de miembros de (S) y de (I).

Regla 3: Los individuos que se retiran de la clase infectiva (I) lo hacen según una tasa proporcional al tamaño de (I).

Denótese por $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ al número de individuos en las clases (S), (I) y (R), respectivamente, en el tiempo t. De las Reglas 1 a 3 se sigue inmediatamente que $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -rSI$$
$$\frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \qquad (1)$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

para algún par de constantes positivas r y γ. La constante de proporcionalidad r se conoce como *tasa de infección* y la constante de proporcionalidad γ se denomina *tasa de retiro*.

Las primeras dos ecuaciones de (1) no dependen de R. De modo que se considera solamente el sistema de ecuaciones

$$\frac{dS}{dt} = -rSI, \qquad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \qquad (2)$$

para las dos funciones desconocidas $S(t)$ *e* $I(t)$. Una vez que se conocen los valores de $S(t)$ e $I(t)$, es posible resolver para $R(t)$ en la tercera ecuación de (1). Otra manera de verlo es observando que $d(S + I + R)/dt = 0$. De modo que

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{constante} = N$$

así que $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

Las órbitas de (2) son las curvas soluciones de la ecuación de primer orden

$$\frac{dI}{dS} = \frac{rSI - \gamma I}{-rSI} = -1 + \frac{\gamma}{rS}. \qquad (3)$$

Al integrar esta ecuación diferencial se obtiene

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln \frac{S}{S_0}, \qquad (4)$$

donde S_0 e I_0 son el número de susceptibles y de infecciosos en el instante inicial $t = t_0$; y $\rho = \gamma/r$. Para analizar el comportamiento de las curvas (4), se calcula $I'(S) = -1 + \rho/S$. La cantidad $-1 + \rho/S$ es negativa para $S > \rho$, y positiva para $S < \rho$. Por lo tanto, $I(S)$ es una función creciente de S para $S < \rho$, y una función decreciente de S para $S > \rho$.

Obsérvese además que $I(0) = -\infty$ e $I(S_0) = I_0 > 0$. Por consiguiente, existe un único punto S_∞, con $0 < S_\infty < S_0$, tal que $I(S_\infty) = 0$ e $I(S) > 0$ para $S_\infty < S \leq S_0$. El punto $(S_\infty, 0)$ es un punto de equilibrio de (2), ya que tanto dS/dt como dI/dt se anulan cuando $I = 0$. Así que las órbitas de (2) para $t_0 \leq t < \infty$ tiene la forma que se indica en la Figura 1.

Ahora se analizarán las implicaciones de estos resultados sobre la diseminación de una enfermedad en una población. Conforme t corre de t_0 a ∞, el punto $(S(t), I(t))$ se mueve a lo largo de la curva (4) y lo hace en la dirección en la que S es decreciente, ya que $S(t)$ decrece monótonamente en el tiempo. Por consiguiente, si S_0 es menor que ρ, entonces $I(t)$ decrece monótonamente a cero y $S(t)$ decrece monótonamente a S_∞. Así pues, si se incluye un pequeño grupo de infecciosos I_0 en un grupo de susceptibles S_0, con $S_0 < \rho$, entonces la enfermedad desaparecerá rápidamente. Por otro lado, si

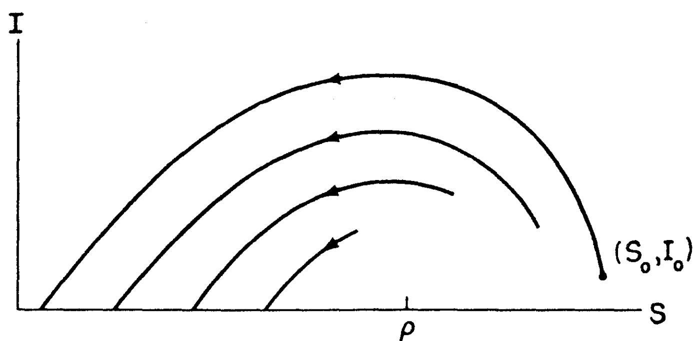


FIGURA 1. Las órbitas de (2)

S_0 es mayor que ρ, entonces $I(t)$ crece mientras $S(t)$ decrece hasta el valor de ρ, momento en el que $I(t)$ alcanza su valor máximo cuando $S = \rho$. $I(t)$ empieza a decrecer solamente cuando el número de susceptibles se encuentra por abajo del valor de umbral ρ. De estos resultados se pueden sacar las siguientes conclusiones:

Conclusión 1. Se presentará una epidemia sólo si el número de susceptibles en la población excede el valor de umbral $\rho = \gamma/r$.

Conclusión 2. La propagación de la enfermedad no se detiene por falta de una población susceptible; para solamente por falta de infecciosos. En particular, siempre escaparán de contraer la enfermedad algunos individuos.

La Conclusión 1 corresponde a la observación general de que las epidemias tienden a desarrollarse más rápidamente si la densidad de los susceptibles es alta, debido, por ejemplo, a la sobrepoblación, y si la tasa de retiro es baja, debido por ejemplo a la ignorancia, aislamiento inadecuado o tratamiento médico insuficiente. Por otro lado, si las buenas condiciones sociales permiten una densidad más baja de los susceptibles, entonces los brotes tienden a ser de alcance limitado. Lo mismo ocurre si las tasas de retiro son altas debido a un buen control y buena vigilancia de la salud pública.

Si el número S_0 de susceptibles es inicialmente mayor que el valor de umbral ρ, aunque cercano a él, entonces es posible estimar el número de individuos que contraerán finalmente la enfermedad. En concreto, si $S_0 - \rho$ es pequeño comparado con ρ, entonces el número de individuos que por fin contraerán la enfermedad es aproximadamente $2(S_0 - \rho)$. Este es el Teorema del Umbral en Epidemiología, el cual fue demostrado por primera vez en 1927 por los biólogos matemáticos Kermack y McKendrick.

TEOREMA 7. (Teorema del Umbral en Epidemiología.) *Sea $S_0 = \rho + \nu$, y supóngase que ν/ρ es muy pequeño comparado con uno. Supóngase además que el número inicial de infecciosos I_0 es muy pequeño. Entonces, el número de individuos que finalmente contraen la enfermedad es 2ν. Dicho de otro modo, el nivel de susceptibles se reduce a un nivel que dista (por abajo) del valor de umbral en la misma proporción que éste distaba del número inicial de susceptibles.*

DEMOSTRACIÓN. Al dejar tender t a infinito en (4), se obtiene

$$0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0}.$$

Si I_0 es muy pequeño comparado con S_0, entonces se puede ignorar y escribir

$$\begin{aligned} 0 &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0} \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[\frac{S_0 - (S_0 - S_\infty)}{S_0} \right] \\ &= S_0 - S_\infty + \rho \ln \left[1 - \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $S_0 - \varrho$ es pequeño comparado con ϱ, entonces $S_0 - S_\infty$ será muy pequeño comparado con S_0. Por consiguiente, es posible truncar la serie de Taylor

$$\ln \left[1 - \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) \right] = -\left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 + \ldots$$

después del segundo término. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= S_0 - S_\infty - \rho \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 \\ &= (S_0 - S_\infty) \left[1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2}(S_0 - S_\infty) \right]. \end{aligned}$$

Despejando $S_0 - S_\infty$, se ve que

$$\begin{aligned} S_0 - S_\infty &= 2S_0 \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) = 2(\rho + \nu) \left[\frac{\rho + \nu}{\rho} - 1 \right] \\ &= 2(\rho + \nu) \frac{\nu}{\rho} = 2\rho \left(1 + \frac{\nu}{\rho} \right) \frac{\nu}{\rho} \approxeq 2\nu. \end{aligned}$$ □

Durante el curso de una epidemia es imposible decir con exactitud el número de nuevos infecciosos por día o semana, ya que solamente aquellos infecciosos que buscan ayuda médica son los que pueden ser reconocidos y retirados de la circulación. Así pues, las estadísticas de salud pública registran sólo el número de nuevos retirados por día o semana, no el número de infecciosos. Por lo tanto, para comparar los resultados predichos por el modelo con los valores de la epidemia real, es necesario encontrar la cantidad dR/dt como función del tiempo. Eso se logra de la siguiente manera. Obsérvese primero que

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma(N - R - S).$$

Obsérvese además que

$$\frac{dS}{dR} = \frac{dS/dt}{dR/dt} = \frac{-rSI}{\gamma I} = \frac{-S}{\rho}.$$

Por lo tanto, $S(R) = S_0 e^{-R/\rho}$ y

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - R - S_0 e^{-R/\rho}\right). \tag{5}$$

La ecuación (5) es separable, pero no puede resolverse explícitamente. Sin embargo, si la epidemia no es muy grande, entonces R/ϱ es pequeño y es posible truncar la serie de Taylor

$$e^{-R/\rho} = 1 - \frac{R}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 + \ldots$$

después del tercer término. Con dicha aproximación se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left[N - R - S_0\left[1 - R/\rho + \frac{1}{2}(R/\rho)^2\right]\right]$$

$$= \gamma\left[N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)R - \frac{S_0}{2}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2\right]$$

La solución de esta ecuación es

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0}\left[\frac{S_0}{\rho} - 1 + \alpha \tanh\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma t - \phi\right)\right] \tag{6}$$

donde

$$\alpha = \left[\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}\right]^{1/2}, \qquad \phi = \tanh^{-1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)$$

y la función tangente hiperbólica $\tanh z$ se define como

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma\alpha^2\rho^2}{2S_0}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma t - \phi\right). \tag{7}$$

La ecuación (7) define una curva simétrica con forma de campana en el plano $t - dR/dt$ (Fig. 2). Dicha gráfica se conoce como *curva epidémica* de la enfermedad, e ilustra muy bien la observación común de que en muchas epidemias reales, el número de nuevos casos reportados cada día aumenta hasta alcanzar un valor máximo, para disminuir después nuevamente.

Kermack y McKendrick compararon los valores predichos por (7) para dR/dt con los valores reales de una epidemia en Bombay, la cual se extendió durante la segunda mitad de 1905 y la primera mitad de 1906. Establecieron

$$\frac{dR}{dt} = 890\operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4)$$

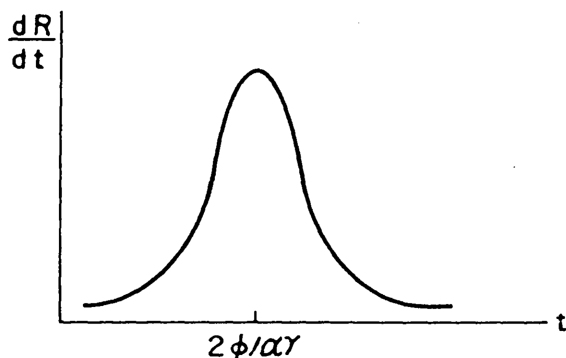


FIGURA 2.

con t medido en semanas, y compararon estos valores con el número de muertes por semana debidas a la epidemia. Esta cantidad es una aproximación muy buena de dR/dt, ya que casi todos los casos terminaron mortalmente. Como puede verse en la Figura 3, hay una coincidencia excelente entre los valores reales de dR/dt, denotados por •, y los valores predichos por (7). Esto indica, por supuesto, que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) es un modelo preciso y confiable para la diseminación de una enfermedad infecciosa en una población de tamaño fijo.

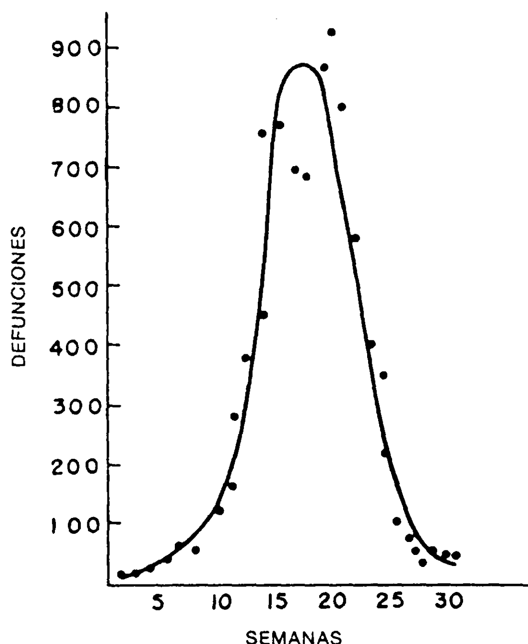


FIGURA 3.

BIBLIOGRAFÍA

Bailey, N.T.J., *The mathematical theory of epidemics*, 1957, Nueva York.

Kermack, W.O. y McKendrick, A.G., "Contributions to the mathematical theory of epidemics", *Proceedings Roy. Stat. Soc., A, 115*, 700-721, 1927.

Waltman, P. *Deterministic threshold models in the theory of epidemics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.

EJERCICIOS

1. Deduzca la ecuación (6).

2. Suponga que los miembros de (S) son vacunados contra una enfermedad, con una tasa λ, proporcional a su número. Entonces,

$$\frac{dS}{dt} = -rSI - \lambda S, \qquad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I. \qquad (*)$$

   (a) Encuentre las órbitas de (*).
   (b) Concluya de (a) que $S(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, para toda solución $S(t)$, $I(t)$ de (*).

3. Suponga que los miembros de (S) son vacunados contra una enfermedad según una tasa λ proporcional al producto de su número y del cuadrado de los miembros de (I). Entonces,

$$\frac{dS}{dt} = -rSI - \lambda SI^2, \qquad \frac{dI}{dt} = I(rS - \gamma). \qquad (*)$$

   (a) Determine las órbitas de (*).
   (b) ¿Habrá aún individuos susceptibles al desaparecer la enfermedad?

4. La *intensidad* i de una epidemia es la proporción del número total de susceptibles que finalmente contraen el padecimiento. Demuestre que

$$i = \frac{I_0 + S_0 - S_\infty}{S_0}$$

   donde S_∞ es una raiz de la ecuación

$$S = S_0 e^{(S - S_0 - I_0)/\rho}.$$

5. Calcule la intensidad de la epidemia si $\varrho = 1000$, $I_0 = 10$ y (a) $S_0 = 1100$, (b) $S_0 = 1200$, (c) $S_0 = 1300$, (d) $S_0 = 1500$, (e) $S_0 = 1800$, (f) $S_0 = 1900$. (Esto no puede hacerse analíticamente.)

6. Denote por R_∞ al número total de individuos que contraen la enfermedad.
   (a) Demuestre que $R_\infty = I_0 + S_0 - S_\infty$.
   (b) Denote por R_1 a los miembros de (R) que son retirados de la población antes de que la epidemia alcance su intensidad máxima. Calcule R_1/R_∞ para cada uno de los valores de S_0 en los incisos del 5a al 5f. Note que la mayoría de los retiros ocurren después del punto máximo. Este tipo de asimetría se encuentra con frecuencia en las notificaciones de enfermedades infecciosas reales.

7. A principios del presente siglo se observó en Londres que los brotes epidémicos fuertes de sarampión se presentaban cada dos años. El biólogo matemático H.E. Soper trató de explicar dicho fenómeno suponiendo que la reserva de susceptibles

es reemplazada constantemente mediante la llegada de nuevos individuos a la población. Así pues, supuso que

$$\frac{dS}{dt} = -rSI + \mu, \qquad \frac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \qquad (*)$$

para algunas constantes positivas r, γ y μ.

(a) Demuestre que $S = \gamma/r$, $I = \mu/\gamma$ es la única solución de equilibrio de (*).

(b) Demuestre que toda solución $S(t)$, $I(t)$ de (*) que empieza lo bastante cerca de dicho punto de equilibrio, tiende finalmente a él cuando t tiende a infinito.

(c) Es posible mostrar que toda solución $S(t)$, $I(t)$ de (*) tiende a la solución de equilibrio $S = \gamma/r$, $I = \mu/\gamma$, cuando t tiende a infinito. Concluya, por lo tanto, que el sistema (*) no predice brotes epidémicos recurrentes de sarampión. Más bien, predice que la enfermedad tenderá finalmente a un estado estacionario.

4.13 MODELO PARA LA PROPAGACIÓN DE LA GONORREA

Hoy en día este padecimiento ocupa el primer lugar entre las enfermedades transmisibles de reporte obligatorio, en Estados Unidos. Se informan más casos de gonorrea anualmente que el número total combinado de casos de sífilis, sarampión, paperas y hepatitis infecciosa. Funcionarios de salud pública estiman que cada año contraen gonorrea más de 2 500 000 personas en Estados Unidos. Esta enfermedad tan dolorosa y peligrosa es causada por un germen gonocócico y se transmite de persona a persona por contacto sexual. Unos pocos días después del contagio se percibe una sensación de comezón y ardor en el área genital, en especial en el momento de la micción. Simultáneamente se inicia una supuración, la cual será notada por los varones pero no siempre por las mujeres. Las personas de sexo femenino con la infección pueden no presentar síntomas fácilmente identificables, aun cuando la enfermedad provoca daños internos graves. La gonorrea puede ser curada solamente mediante el uso de antibióticos (usualmente penicilina). Sin embargo, para prevenir daños serios en el organismo es necesario aplicar el tratamiento en las etapas tempranas del padecimiento. Si no es tratada, la gonorrea puede provocar ceguera, esterilidad, artritis, insuficiencia cardiaca y, por último, la muerte.

En esta sección se construye un modelo matemático para la diseminación de la gonorrea. El trabajo se simplifica fuertemente por el hecho de que el periodo de incubación es muy corto (de 3 a 7 días) comparado con el periodo de infectividad activa, el cual con frecuencia es largo. Así pues, se supondrá en el modelo que los individuos se convierten en infecciosos inmediatamente después de contraer la enfermedad. Además, la gonorrea no confiere siquiera inmunidad parcial a aquellos individuos que se han recuperado. Inmediatamente después de su recuperación, un individuo vuelve a ser susceptible. Así pues, la acción de la población sexualmente activa y promiscua puede ser dividida en dos grupos: los susceptibles y los infecciosos. Sea $c_1(t)$ el número total de promiscuos del sexo masculino, $c_2(t)$ el número total de promiscuos del sexo femenino, $x(t)$, el número total de infecciosos del sexo masculino y, por último $y(t)$ el número total de infecciosos del sexo femenino, en el tiempo t. Entonces, el número total de susceptibles del sexo masculino y el de susceptibles del sexo femenino es $c_1(t) - x(t)$

y $c_2(t) - y(t)$, respectivamente. Se parte del hecho que la diseminación de la gonorrea se rige por las siguientes reglas:

1. Los infecciosos del sexo masculino se curan según una tasa a_1, proporcional a su número total, mientras que los infecciosos del sexo femenino se curan según una tasa a_2, proporcional a su número total. La constante a_1 es mayor que a_2, ya que los infecciosos del sexo masculino desarrollan rápidamente síntomas dolorosos y buscan, por consiguiente, una pronta ayuda médica. Los infecciosos del sexo femenino, por el contrario, son usualmente asintomáticos y permanecen, por lo tanto, más tiempo en la etapa de infectividad.

2. Los nuevos infecciosos se agregan a la población masculina según una tasa b_1, proporcional al número total de susceptibles del sexo masculino e infecciosos del sexo femenino. De la misma manera, los nuevos infecciosos se agregan a la población femenina según una tasa b_2, proporcional al número total de susceptibles del sexo femenino e infecciosos del sexo masculino.

3. Los números totales de promiscuos de cada uno de los dos sexos permanecen constantes en niveles c_1 y c_2, respectivamente.

De las reglas 1 a 3 se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a_1x + b_1(c_1 - x)y \\ \frac{dy}{dt} &= -a_2y + b_2(c_2 - y)x. \end{aligned} \tag{1}$$

OBSERVACIÓN. El sistema de ecuaciones (1) describe sólo aquellos casos de gonorrea que se transmiten por contactos heterosexuales; en los Ejercicios 5 y 6 se analiza el caso de contactos homosexuales (suponiendo que no hay interacción entre heterosexuales y homosexuales). El número de casos de gonorrea transmitidos en encuentros homosexuales constituye un pequeño porcentaje del número total de casos de gonorrea. Es interesante destacar que en el caso de la sífilis, la situación es completamente distinta. De hecho, más del 90% de todos los casos de sífilis reportados en el estado de Rhode Island durante el año 1973, resultaron de encuentros homosexuales. (Esta estadística no es tan sorprendente como podría parecer a primera vista. Entre los diez y noventa días después de haber sido infectada con sífilis, la persona desarrolla usualmente un chancro en el sitio donde el germen entró al organismo. Un homosexual que contrae sífilis como resultado de un coito anal con un infeccioso desarrollará un chancro en el recto. Naturalmente dicha persona dudará en buscar atención médica, ya que tendrá que revelar entonces su identidad como homosexual. Además, no sentirá urgencia, ya que usualmente el chancro no produce dolor y desaparece en el lapso de unos días. Con la gonorrea, por lo contrario, los síntomas son tan dolorosos e inconfundibles que el homosexual buscará pronta atención médica. Además no necesita revelar su identidad de homosexual, ya que los síntomas de la gonorrea aparecen en el área genital.)

El primer paso en el análisis del sistema de ecuaciones diferenciales (1) es mostrar que es real. Concretamente, es necesario hacer ver que $x(t)$ y $y(t)$ no pueden tomar valores negativos ni sobrepasar los valores c_1 y c_2, respectivamente. Tal es el contenido de los Lemas 1 y 2.

LEMA 1. *Si $x(t_0)$ y $y(t_0)$ son positivos, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son positivos para toda $t \geq t_0$.*

LEMA 2. *Si $x(t_0)$ es menor que c_1 y $y(t_0)$ es menor que c_2, entonces $x(t)$ es menor que c_1, y $y(t)$ es menor que c_2 para toda $t \geq t_0$.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Supóngase que el Lema 1 es falso. Sea $t^* > t_0$ el primer instante en el que alguna de las variables x o y toma el valor de cero. Supóngase que x es la primera en tomar el valor de cero. Entonces, al evaluar la primera ecuación de (1) en $t = t^*$, se obtiene $\dot{x}(t^*) = b_1 c_1 y(t^*)$. Esta cantidad es positiva. (Nótese que $y(t^*)$ no puede ser igual a cero, ya que $x = 0$, $y = 0$ es una solución de equilibrio de (1).) Por lo tanto, $x(t)$ es menor que cero para t cercana a t^* y menor que ella. Esto contradice la suposición de que t^* es el primer instante para el cual $x(t)$ es igual a cero. Si $y(t^*) = 0$ se obtiene la misma contradicción. Así pues, tanto $x(t)$ como $y(t)$ son positivas para $t \geq t_0$. □

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Supóngase que el Lema 2 es falso. Sea $t^* > t_0$ el primer instante para el cual, o bien $x = c_1$ o $y = c_2$. Supóngase que $x(t^*) = c_1$. Al evaluar la primera ecuación de (1) en $t = t^*$ se obtiene $\dot{x}(t^*) = -a_1 c_1$. Esta cantidad es negativa. Por lo tanto, $x(t)$ es mayor que c_1 para t cercana a t^* y menor que ella. Esto contradice la suposición de que t^* es el primer instante para el cual $x(t)$ es igual a c_1. Si $y(t^*) = c_2$ se llega a la misma contradicción. Así pues, $x(t)$ es menor que c_1, e $y(t)$ es menor que c_2 para $t \geq t_0$. □

Habiendo mostrado que el sistema de ecuaciones (1) es un modelo real de la gonorrea, se analizará ahora qué predicciones hace acerca del desarrollo futuro de la enfermedad. ¿Continuará propagándose la gonorrea rápidamente y de manera incontrolada como parecen sugerir los datos de la Figura 1, o alcanzará finalmente un nivel estacionario? El siguiente teorema de epidemiología es muy importante y proporciona la respuesta a esta pregunta.

TEOREMA 8.

(a) *Supóngase que $a_1 a_2$ es menor que $b_1 b_2 c_1 c_2$. Entonces toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) con $0 < x(t_0) < c_1$ y $0 < y(t_0) < c_2$ tiende a la solución de equilibrio*

$$x = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_1 b_2 + b_1 b_2 c_2}, \qquad y = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_2 b_1 + b_1 b_2 c_1}$$

cuando t tiende a infinito. Dicho de otro modo, el número total de infecciosos del sexo masculino y del sexo femenino tienden finalmente a estabilizarse.

(b) *Supóngase que $a_1 a_2$ es mayor que $b_1 b_2 c_1 c_2$. Entonces toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) con $0 < x(t_0) < c_1$ y $0 < y(t_0) < c_2$, tiende a cero cuando t tiende a infinito. Dicho de otra manera, la gonorrea terminará por desaparecer.*

El primer paso para demostrar la parte (a) del Teorema 8 es partir el rectángulo $0 < x < c_1$, $0 < y < c_2$ en regiones en las cuales tanto dx/dt como dy/dt tengan sig-

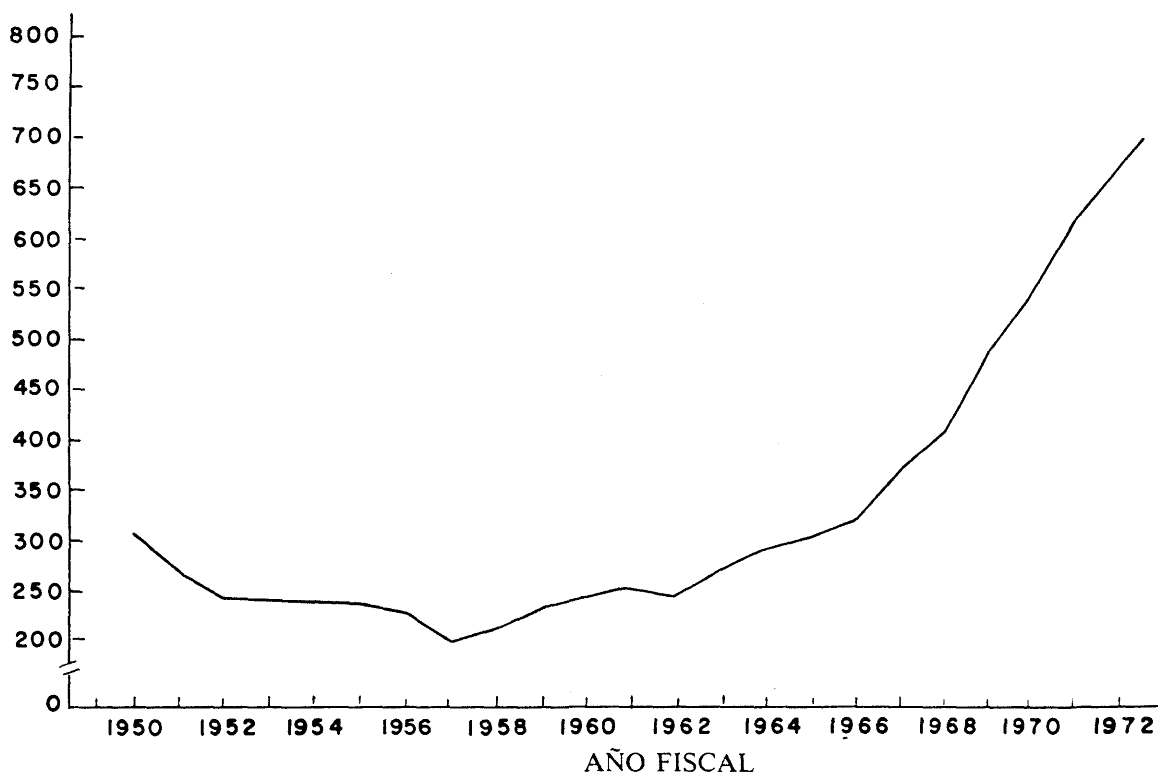


FIGURA 1. Casos reportados de gonorrea durante el periodo 1950-1973 (en miles).

nos fijos. Eso se logra de la siguiente manera. Haciendo $dx/dt = 0$ en (1) y resolviendo para y como función de x, se obtiene

$$y = \frac{a_1 x}{b_1(c_1 - x)} \equiv \phi_1(x).$$

De manera similar, haciendo $dy/dt = 0$ en (1), se obtiene

$$x = \frac{a_2 y}{b_2(c_2 - y)}, \quad \text{o bien} \quad y = \frac{b_2 c_2 x}{a_2 + b_2 x} \equiv \phi_2(x).$$

Obsérvese primero que $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son funciones monótonas crecientes de x; $\phi_1(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a c_1, y $\phi_2(x)$ tiende a c_2 cuando x tiende a infinito. Obsérvese además que las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se cortan en (0, 0) y en (x_0, y_0), donde

$$x_0 = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_1 b_2 + b_1 b_2 c_2}, \qquad y_0 = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_2 b_1 + b_1 b_2 c_1}$$

Obsérvese también que $\phi_2(x)$ crece más rápidamente que $\phi_1(x)$ en $x = 0$, ya que

$$\phi_2'(0) = \frac{b_2 c_2}{a_2} > \frac{a_1}{b_1 c_1} = \phi_1'(0).$$

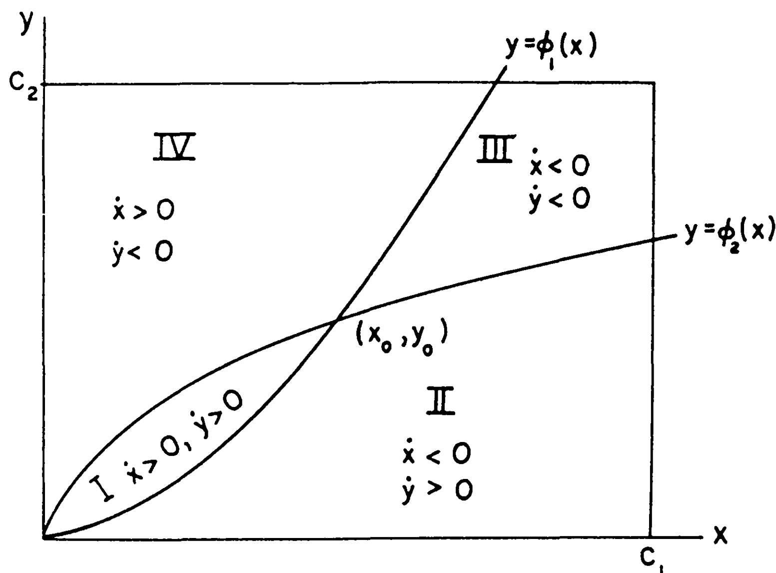


FIGURA 2.

Por lo tanto, $\phi_2(x)$ está por arriba de $\phi_1(x)$ para $0 < x < x_0$, y $\phi_2(x)$ está por abajo de $\phi_1(x)$ para $x_0 < x < c_1$, tal como se muestra en la Figura 2. El punto (x_0, y_0) es un punto de equilibrio de (1), ya que tanto dx/dt como dy/dt son iguales a cero cuando $x = x_0$ y $y = y_0$.

Obsérvese por último que dx/dt es positiva en cualquier punto (x, y) por arriba de la curva $y = \phi_1(x)$, y negativa en cualquier punto (x, y) por abajo de la misma curva. De la misma manera, dy/dt es positiva en cualquier punto (x, y) por debajo de la curva $y = \phi_2(x)$, y negativa en cualquier punto (x, y) por encima de la misma curva. Así pues, las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ dividen el rectángulo $0 < x < c_1$, $0 < y < c_2$ en cuatro regiones, en las cuales dx/dt y dy/dt tienen signos fijos (Figura 2).

Como siguiente paso se demuestran los siguientes cuatro sencillos lemas.

LEMA 3. *Toda solución $x(t)$, $y(t)$ de* (1) *que empieza en la región* I *en el instante $t = t_0$, permanecerá en dicha región para todo tiempo futuro $t \geq t_0$, y tenderá a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$ cuando t tienda a infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) sale de la región I en el instante $t = t^*$. Entonces, o bien $\dot{x}(t^*)$ es igual a cero, o $\dot{y}(t^*)$ lo es, ya que la única manera en que una solución de (1) puede salir de la región I es cruzando la curva $y = \phi_1(x)$ o la curva $y = \phi_2(x)$. Supóngase que $\dot{x}(t^*) = 0$. Al derivar ambos lados de la primera ecuación de (1) con respecto a t y hacer $t = t^*$, se obtiene

$$\frac{d^2x(t^*)}{dt^2} = b_1(c_1 - x(t^*))\frac{dy(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es positiva, ya que $x(t^*)$ es menor que c_1, y dy/dt es positiva sobre la curva $y = \phi_1(x)$, $0 < x < x_0$. Por lo tanto, $x(t)$ tiene un mínimo en $t = t^*$. Pero tal

cosa es imposible, ya que $x(t)$ es creciente siempre que la solución $x(t)$, $y(t)$ esté en la región I. De manera similar, si $\dot{y}(t^*) = 0$, entonces

$$\frac{d^2y(t^*)}{dt^2} = b_2(c_2 - y(t^*))\frac{dx(t^*)}{dt}.$$

Esta cantidad es positiva, ya que $y(t^*)$ es menor que c_2, y dx/dt es positiva sobre la curva $y = \phi_2(x)$, $0 < x < x_0$. Por lo tanto, $y(t)$ tiene un mínimo en $t = t^*$. Pero tal cosa es imposible, ya que $y(t)$ es creciente siempre que la solución $x(t)$, $y(t)$ esté en la región I.

El razonamiento anterior muestra que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región I en el instante $t = t_0$, permanecerá en la región I para todo tiempo futuro $t \geq t_0$. Eso implica que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones monótonas crecientes del tiempo para $t \geq t_0$, con $x(t) < x_0$ y $y(t) < y_0$. Por consiguiente, por el Lema 1 de la Sección 4.8, tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 de la Sección 4.8 implica que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (1). Ahora bien, de la Figura 2 es fácil ver que los únicos puntos de equilibrio de (1) son (0, 0) y (x_0, y_0). Pero (ξ, η) no puede ser igual al (0, 0), ya que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones crecientes del tiempo. Por lo tanto, $(\xi, \eta) = (x_0, y_0)$, lo que demuestra el Lema 3. □

LEMA 4. *Toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región III en el instante $t = t_0$, permanecerá en dicha región para todo tiempo futuro y tenderá finalmente a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Exactamente igual a la demostración del Lema 3 (Ejercicio 1). □

LEMA 5. *Toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región II en el instante $t = t_0$ y permanece en dicha región para todo tiempo futuro, tiende a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$ cuando t tiende a infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Si una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) permanece en la región II para $t \geq t_0$, entonces $x(t)$ es monótona decreciente y $y(t)$ es monótona creciente para $t \geq t_0$. Más aún, $x(t)$ es positiva y $y(t)$ es menor que c_2, para $t \geq t_0$. Por consiguiente, por el Lema 1 de la Sección 4.8, tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienen límite ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. El Lema 2 de la Sección 4.8 implica que (ξ, η) es un punto de equilibrio de (1). Ahora bien, (ξ, η) no puede ser igual al (0, 0), ya que $y(t)$ es creciente para $t \geq t_0$. Por lo tanto, $(\xi, \eta) = (x_0, y_0)$, lo cual termina la demostración del Lema 5. □

LEMA 6. *Toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región IV en el instante $t = t_0$ y permanece en dicha región para todo tiempo futuro, tiende a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$ cuando t tiende a infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Exactamente igual a la demostración del Lema 5 (Ejercicio 2). □

Ahora es posible demostrar el Teorema 8.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8. (a) Los Lemas 3 y 4 establecen que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región I o en la región III en el instante $t = t_0$, tiende a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$ cuando t tiende a infinito. De manera similar, los Lemas 5 y 6 establecen que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región II o en la IV y permanece en tal región para todo tiempo futuro, tiende también a la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$. Ahora bien, obsérvese que si una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) sale de la región II o IV, entonces debe cruzar la curva $y = \phi_1(x)$ o la curva $y = \phi_2(x)$ para pasar inmediatamente después a la región I o a la región III. Por consiguiente, todas las soluciones $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empiezan en las regiones II y IV o sobre las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$, tienden también a la solución de equilibrio $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$. □

(b) **DEMOSTRACIÓN** #1. Si a_1a_2 es mayor que $b_1b_2c_1c_2$, entonces las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ tienen la forma que se describe en la Figura 3. En la región I, dx/dt es positiva y dy/dt es negativa; en la región II, tanto dx/dt como dy/dt son negativas; y en la región III, dx/dt es negativa y dy/dt es positiva. Es fácil mostrar (Ejercicio 3) que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región II en el instante $t = t_0$ permanece en dicha región para todo tiempo futuro y tiende a la solución de equilibrio $x = 0$, $y = 0$ cuando t tiende a infinito. También es fácil mostrar que cualquier solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región I o en la región III en el instante $t = t_0$, debe cruzar la curva $y = \phi_1(x)$ o bien la curva $y = \phi_2(x)$, para entrar inmediatamente después a la región II (Ejercicio 4). Por consiguiente, toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1), con $0 < x(t_0) < c_1$ y $0 < y(t_0) < c_2$, tiende a la solución de equilibrio $x = 0$, $y = 0$ cuando t tiende a infinito. □

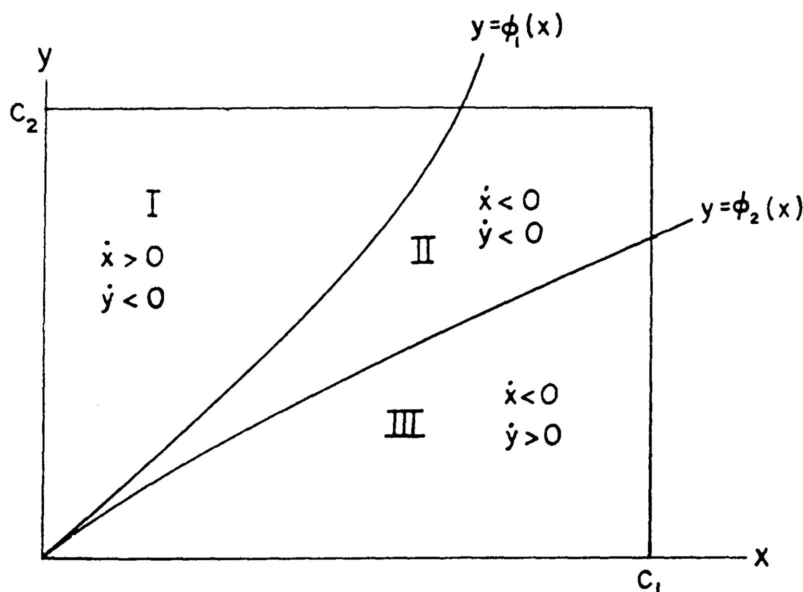


FIGURA 3.

DEMOSTRACIÓN #2 Ahora se ilustrará cómo puede ser usado el teorema de *Poincaré-*Bendixson para dar una demostración detallada de la parte (b) del Teorema 8. Obsérve-

se que el sistema de ecuaciones diferenciales (1) puede ser escrito en la forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1c_1 \\ b_2c_2 & -a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1xy \\ b_2xy \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Así pues, por el Teorema 2 de la Sección 4.3, la estabilidad de la solución $x = 0, y = 0$ de (2) queda determinada por la estabilidad de la solución de equilibrio $x = 0, y = 0$ del sistema linealizado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1c_1 \\ b_2c_2 & -a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz **A** es

$$\lambda^2 + (a_1 + a_2)\lambda + a_1a_2 - b_1b_2c_1c_2$$

y sus raíces son

$$\lambda = \frac{-(a_1+a_2) \pm \left[(a_1+a_2)^2 - 4(a_1a_2 - b_1b_2c_1c_2)\right]^{1/2}}{2}.$$

Se verifica fácilmente que ambas raíces son reales y negativas. Por lo tanto, la solución de equilibrio $x = 0, y = 0$ de (2) es asintóticamente estable. Eso implica que cualquier solución $x(t), y(t)$ de (1) que empieza suficientemente cerca del origen $x = y = 0$ tiende al origen cuando t tiende a infinito. Ahora bien, supóngase que una solución $x(t), y(t)$ de (1), con $0 < x(t_0) < c_1$ y $0 < y(t_0) < c_2$, no tiende al origen cuando t tiende a infinito. Por la observación anterior, dicha solución debe permanecer siempre a una cierta distancia mínima del origen. Por consiguiente, su órbita para $t \geq t_0$ se encuentra en una región acotada del plano $x - y$, la cual no contiene puntos de equilibrio de (1). Por el teorema de Poincaré-Bendixson, se tiene entonces que su órbita debe describir una espiral que tiende a la órbita de una solución periódica de (1). Pero el sistema de ecuaciones diferenciales (1) no tiene soluciones periódicas en el primer cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$. Eso se sigue de inmediato del Ejercicio 11 de la Sección 4.8, y del hecho de que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-a_1x + b_1(c_1 - x)y\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-a_2y + b_2(c_2 - y)x\right] = -(a_1 + a_2 + b_1y + b_2x)$$

es estrictamente negativa si tanto x como y son no negativas. Por lo tanto, toda solución $x(t), y(t)$ de (1), con $0 < x(t_0) < c_1$ y $0 < y(t_0) < c_2$ tiende a la solución de equilibrio $x = 0, y = 0$, cuando t tiende a infinito. □

Ahora bien, los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son difíciles de calcular. De hecho, es incluso imposible obtener un valor aproximado de a_2 el cual se interpreta como el número promedio de unidades de tiempo que una persona del sexo femenino permanece infecciosa. (Análogamente, a_1 se interpreta como el número promedio de unidades de tiempo que una persona del sexo masculino permanece infecciosa.) Tal cosa se debe a que las personas del sexo femenino no presentan síntomas. De modo que una persona del sexo femenino puede ser infecciosa durante un periodo que varía desde un día hasta más de un año. Sin embargo, como se verá a continuación, es posible, a partir de informaciones de salud pública, afirmar que a_1a_2 es menor que $b_1b_2c_1c_2$. Obsérvese que la condición $a_1a_2 < b_1b_2c_1c_2$ es equivalente a

$$1 < \left(\frac{b_1c_1}{a_2}\right)\left(\frac{b_2c_2}{a_1}\right).$$

La cantidad b_1c_1/a_2 puede ser interpretada como el número promedio de personas del sexo masculino al que una persona del sexo femenino contagia durante un periodo de infección, en caso de que todas las personas del sexo masculino sean susceptibles. Análogamente, la cantidad b_2c_2/a_1 puede interpretarse como el número promedio de personas del sexo femenino al que una persona del sexo masculino contagia durante un periodo de infección, en caso de que todas las personas del sexo femenino sean susceptibles. Las cantidades b_1c_1/a_2 y b_2c_2/a_1 se conocen como las tasas máximas de contacto femenina y masculina, respectivamente. Con todo esto, puede interpretarse el Teorema 8 de la siguiente manera:

(a) Si el producto de las tasas máximas de contacto masculina y femenina es mayor que uno, entonces la gonorrea tenderá a un estado de equilibrio no trivial.
(b) Si el producto de las tasas máximas de contacto masculina y femenina es menor que uno, entonces la gonorrea terminará por desaparecer.

En 1973, el número promedio de contactos con personas del sexo femenino que un infeccioso del sexo masculino reportaba durante su periodo infectivo era de 0.98, mientras que el número promedio de contactos con personas del sexo masculino que un infeccioso del sexo femenino mencionaba durante su periodo infectivo era de 1.15. Estos números son muy buenas aproximaciones de las tasas máximas de contacto masculina y femenina, respectivamente. Su producto no es mayor que el producto de las tasas máximas de contacto masculina y femenina. (El número de contactos de un infeccioso del sexo masculino o femenino durante este periodo infeccioso es ligeramente menor que la tasa máximas de contacto masculina o femenina.) Sin embargo, el número *real* de contactos es, con frecuencia, mayor que el número de contactos que reporta el infeccioso. El producto de 1.15 y 0.98 es 1.0682. De modo que la gonorrea tenderá a un estado de equilibrio no trivial.

OBSERVACIÓN. El modelo presentado para la gonorrea es más bien burdo, pues junta a todos los promiscuos del sexo masculino y femenino en grupos, sin importar su edad. Es posible obtener un modelo más preciso separando las poblaciones masculina y femenina en diferentes grupos de edades y calculando las rapideces de variación de los infecciosos en cada uno de los grupos. Recientemente se realizó tal estudio, aunque el análisis es demasiado difícil para ser presentado aquí. Cabe mencionar sólo que se obtuvo un resultado completamente análogo al Teorema 8: desaparece la gonorrea en cada uno de los grupos, o tiende a un nivel constante y positivo en cada uno de ellos.

EJERCICIOS

En los Problemas 1 y 2 se supone que $a_1a_2 < b_1b_2c_1c_2$.

1. (a) Suponga que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) sale de la región III de la Figura 2 en el instante $t = t^*$ cruzando la curva $y = \phi_1(x)$ o bien $y = \phi_2(x)$. Concluya que $x(t)$ o bien $y(t)$ tiene un máximo en $t = t^*$. Demuestre después que tal cosa es imposible. Concluya, por lo tanto, que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región III en el instante $t = t_0$, permanece en dicha región para todo tiempo futuro $t > t_0$.

(b) Concluya de (a) que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región III tiene un límite ξ, η, cuando t tiende a infinito. Demuestre entonces, que (ξ, η) debe ser igual a (x_0, y_0).

2. Suponga que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) permanece en la región IV de la Figura 2 para todo tiempo $t \geq t_0$. Demuestre que $x(t)$ y $y(t)$ tienen límites ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito. Concluya entonces que (ξ, η) debe ser igual a (x_0, y_0).

En los Problemas 3 y 4 se considera que $a_1 a_2 > b_1 b_2 c_1 c_2$.

3. Suponga que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) sale de la región II de la Figura 3 en el instante $t = t^*$ cruzando la curva $y = \phi_1(x)$ o la curva $y = \phi_2(x)$. Demuestre que $x(t)$ o $y(t)$ tiene un máximo en $t = t^*$. Demuestre después que tal cosa es imposible. Concluya, por lo tanto, que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza en la región II en el instante $t = t_0$, permanece en dicha región para todo tiempo futuro $t \geq t_0$.

4. (a) Suponga que una solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) permanece en la región I o bien en la región III de la Figura 3 para todo tiempo $t \geq t_0$. Demuestre que $x(t)$ y $y(t)$ tienen límite ξ, η, respectivamente, cuando t tiende a infinito.
   (b) Concluya por el Lema 1 de la Sección 4.8 que $(\xi, \eta) = (0, 0)$.
   (c) Pruebe que (ξ, η) no puede ser igual al $(0, 0)$ si $x(t)$, $y(t)$ permanece en la región I o en la región III para todo tiempo $t \geq t_0$.
   (d) Demuestre que toda solución $x(t)$, $y(t)$ de (1) que empieza sobre la curva $y = \phi_1(x)$ o sobre la curva $y = \phi_2(x)$ entrará inmediatamente después a la región II.

5. Suponga que $a_1 a_2 < b_1 b_2 c_1 c_2$. Demuestre directamente, usando el Teorema 2 de la Sección 4.3, que la solución de equilibrio $x = x_0$, $y = y_0$ de (1) es asintóticamente estable. *Advertencia:* Los cálculos son extremadamente laboriosos.

6. Suponga que el número de homosexuales permanece constante en el tiempo. Llame c a dicha constante. Además, suponga qu el número de homosexuales que tiene gonorrea en el tiempo t es $x(t)$, que los homosexuales sanan de gonorrea según una tasa α_1 y que los nuevos infecciosos se incorporan según una tasa $\beta_1(c - x)x$.
   (a) Demuestre que $x = -\alpha_1 + \beta_1 x(c - x)$.
   (b) ¿Qué le ocurre a $x(t)$ cuando t tiende a infinito?

7. Suponga que el número de homosexuales $c(t)$ crece de acuerdo con la ley logística $\dot{c} = c(a - bc)$, para las constantes positivas a y b. Denote por $x(t)$ al número de homosexuales que padecen gonorrea en el instante t, y suponga (véase el Problema 6) que $\dot{x} = \alpha_1 x + \beta_1 x(c - x)$. ¿Qué le ocurre a $x(t)$ cuando t tiende a infinito?

5 Separación de variables y series de Fourier

5.1 PROBLEMAS DE VALORES A LA FRONTERA EN DOS PUNTOS

En las aplicaciones que se estudiarán en este capítulo, habrá que enfrentarse al siguiente problema:

Problema: ¿Para qué valores de λ es posible encontrar funciones $y(x)$ no triviales que satisfagan

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0; \qquad ay(0)+by'(0)=0, \quad cy(l)+dy'(l)=0? \tag{1}$$

La ecuación (1) corresponde a un problema de valores a la frontera, ya que se pide a la solución $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ que cumplan ciertas condiciones en dos puntos distintos, $x = 0$ y $x = l$.

Por otra parte, en un problema de valor inicial se exige que y y su derivada tomen un valor prefijado en un sólo punto $x = x_0$.

La idea intuitiva hasta este momento es que el problema de valores a la frontera (1) tiene soluciones $y(x)$ no triviales sólo para ciertos valores excepcionales λ. De hecho, $y(x) = 0$ es ciertamente una solución de (1), y el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales de segundo orden parecería implicar que una solución $y(x)$ de $y'' + \lambda y = 0$ queda determinada de manera única cuando se fijan dos partes de información. La intuición puede ser puesta a prueba en el siguiente ejemplo que aunque sencillo, es muy importante.

EJEMPLO 1 Para qué valores de λ tiene soluciones no triviales el siguiente problema de valores a la frontera:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0; \qquad y(0)=0, \quad y(l)=0 \tag{2}$$

SOLUCIÓN.

(i) $\lambda = 0$. Toda solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = 0$ es de la forma $y(x) = c_1x + c_2$ con c_1 y c_2 constantes. La condición $y(0) = 0$ implica que $c_2 = 0$, y la condición $y(l) = 0$ implica entonces que $c_1 = 0$. Así pues, $y(x) = 0$ es la única solución del problema de valores a la frontera (2) para $\lambda = 0$.

(ii) $\lambda < 0$. En este caso, cualquier solución $y(x)$ de $y'' + \lambda y = 0$ es de la forma $y(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, para constantes c_1 y c_2. Las condiciones a la frontera $y(0) = y(l) = 0$ implican que

$$c_1+c_2=0, \qquad e^{\sqrt{-\lambda}\,l}c_1+e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}c_2=0. \tag{3}$$

El sistema de ecuaciones (3) tiene una solución c_1, c_2 no trivial sí y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\,l} & e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}\end{pmatrix}=e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}-e^{\sqrt{-\lambda}\,l}=0.$$

Esto implica que $e^{\sqrt{-\lambda}l} = e^{-\sqrt{-\lambda}l}$ o bien $e^{2\sqrt{-\lambda}l} = 1$, lo cual es imposible, pues e^z es mayor que uno para $z > 0$. De aquí que $c_1 = c_2 = 0$, y el problema de valores a la frontera (2) carece de soluciones no triviales $y(x)$ cuando λ es negativa.

(iii) $\lambda > 0$: En este caso, cualquier solución $y(x)$ de $y'' + \lambda y = 0$ es de la forma $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$ para las constantes c_1 y c_2. La condición $y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, y la condición $y(l) = 0$ implica entonces que $c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Esta ecuación se satisface para cualquier valor de c_2 si $\sqrt{\lambda}\,l = n\pi$, es decir si $\lambda = n^2\pi^2/l$ para un entero positivo n. De aquí que el problema de valores a la frontera (2) tiene soluciones no triviales $y(x) = c \operatorname{sen} n\pi x/l$ para $\lambda = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

OBSERVACIÓN. Los cálculos para el caso $\lambda < 0$ se pueden simplificar escribiendo las soluciones $y(x)$ en la forma $y = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}x$, donde

$$\cosh\sqrt{-\lambda}\,x=\frac{e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}}{2}$$

y

$$\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}\,x=\frac{e^{\sqrt{-\lambda}\,x}-e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}}{2}$$

La condición $y(0) = 0$ conlleva que $c_1 = 0$, y la condición $y(l) = 0$ implica entonces que $c_2 \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}\,l = 0$. Pero $\operatorname{senh} z$ es positivo para $z > 0$. De aquí que $c_2 = 0$ y $y(x) = 0$.

El Ejemplo 1 es representativo del problema de valores en la frontera (1). De hecho, se tiene el siguiente teorema notable, el cual será enunciado sin demostración.

TEOREMA 1. *El problema de valores a la frontera* (1) *tiene soluciones no triviales* $y(x)$ *solamente para un conjunto numerable de valores* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ *donde* $\lambda_1 \leq \lambda_2, \ldots,$ *y* λ_n *tiende a infinito cuando* n *tiende a infinito*
Estos valores especiales de λ *se conocen como valores característicos (o eigenvalores) de* (1), *y las soluciones no triviales de* $y(x)$ *se denominan funciones características (o eigenfunciones) de* (1). *En esta terminología, los valores característicos de* (2) *son* $\pi^2/l^2, 4\pi^2/l^2, 9\pi^2/l^2, \ldots,$ *y las funciones características de* (2) *son todos los múltiplos de* $\operatorname{sen} \pi x/l, \operatorname{sen} 2\pi x/l, \ldots.$

Existe una explicación natural de por qué se usa el calificativo de "característico" en este contexto. Sea **V** el conjunto de funciones $y(x)$ que tienen segunda derivada continua y que satisfacen $ay(0) + by'(0) = 0$, $cy(l) + dy'(l) = 0$. Claramente **V** es un espacio vectorial de dimensión infinita. Considérese ahora el operador lineal, o transformación, L, definido por la ecuación

$$[Ly](x) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x). \tag{4}$$

Las soluciones $y(x)$ de (1) son aquellas funciones y en **V** para las cuales $Ly = \lambda y$. Es decir, las soluciones $y(x)$ de (1) son exactamente aquellas funciones y en **V** que son transformadas por L en múltiplos λ de ellas mismas.

EJEMPLO 2 Obtener los eigenvalores y las eigenfunciones del problema de valores a la frontera

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0; \qquad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{5}$$

SOLUCIÓN.

(i) $\lambda = 0$. Toda solución $y(x)$ de $y'' = 0$ es de la forma $y(x) = c_1 x + c_2$ para un par de constantes c_1 y c_2. Ambas condiciones $y(0) + y'(0) = 0$ y $y(1) = 0$ implican que $c_2 = -c_1$. De aquí que $y(x) = c(x-1)$, $c \neq 0$ es una solución no trivial de (5) para $\lambda = 0$; es decir, $y(x) = c(x-1)$, $c \neq 0$ es una función característica de (5) con valor característico igual a cero.

(ii) $\lambda < 0$. En este caso, toda solución $y(x)$ de $y'' + \lambda y = 0$ es de la forma $y(x) = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}\, x + c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}\, x$, para dos constantes c_1 y c_2. Las condiciones a la frontera $y(0) + y'(0) = 0$ y $y(1) = 0$ implican que

$$c_1 + \sqrt{-\lambda}\, c_2 = 0, \qquad \cosh\sqrt{-\lambda}\, c_1 + \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda}\, c_2 = 0. \tag{6}$$

[Obsérvese que $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$.) El sistema de ecuaciones (6) tiene una solución no trivial c_1, c_2 si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-\lambda} \\ \cosh\sqrt{-\lambda} & \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} \end{pmatrix} = \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Esto implica que

$$\operatorname{senh}\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}\,. \tag{7}$$

Pero la ecuación (7) no tiene solución $\lambda < 0$. Para ver claro esto hágase $z = \sqrt{-\lambda}$ y considérese la función $h(z) = z\cosh z - \operatorname{senh} z$. Esta función se anula cuando $z = 0$ y es positiva para $z > 0$, ya que su derivada

$$h'(z) = \cosh z + z\operatorname{senh} z - \cosh z = z\operatorname{senh} z$$

es estrictamente positiva para $z > 0$. Por lo tanto, ningún número negativo λ puede satisfacer (7).

(iii) $\lambda > 0$. En este caso, toda solución $y(x)$ de $y'' + \lambda y = 0$ es de la forma $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x$ para un par de constantes c_1 y c_2. Las condiciones a la frontera implican que

$$c_1 + \sqrt{\lambda}\,c_2 = 0, \qquad \cos\sqrt{\lambda}\,c_1 + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,c_2 = 0. \tag{8}$$

El sistema de ecuaciones (8) tiene una solución no trivial c_1, c_2 si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda} & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0.$$

Lo anterior implica que

$$\tan\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}\,. \tag{9}$$

Para encontrar los valores de λ que satisfacen (9), hágase $\xi = \sqrt{\lambda}$ y trácense las gráficas de las funciones $\eta = \xi$ y $\eta = \tan\xi$ en el plano $\xi\eta$ (Fig. 1); la coordenada ξ de cada punto de intersección de estas curvas es entonces una raíz de la ecuación $\xi = \tan\xi$. Es claro que dichas curvas se intersecan una vez en el intervalo $\pi/2 < \xi < 3\pi/2$ y que tal cosa ocurre en un punto $\xi_1 > \pi$. De manera similar, las dos curvas se intersecan una vez en el intervalo $3\pi/2 < \xi < 5\pi/2$, y ello ocurre en un punto $\xi_2 > 2\pi$. Más generalmente, las curvas $\eta = \xi$ y $\eta = \tan\xi$ se intersecan exactamente una vez en el intervalo

$$\frac{(2n-1)\pi}{2} < \xi < \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

y tal cosa ocurre en un punto $\xi_n > n\pi$.

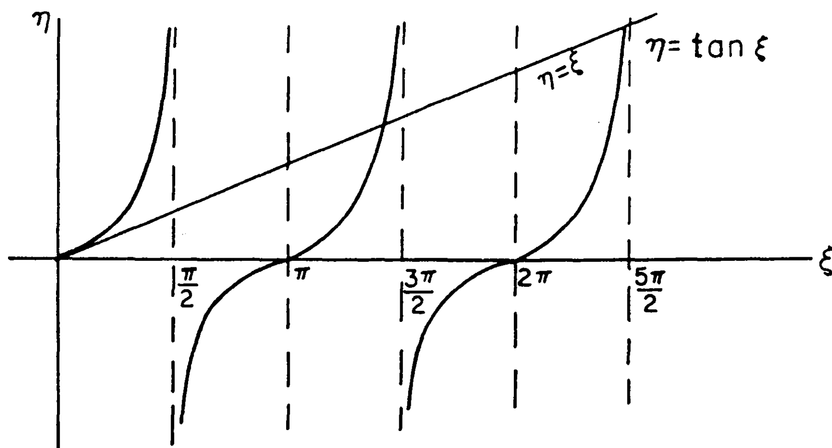


FIGURA 1. Gráficas de $\eta = \xi$ y $\eta = \tan\xi$.

Por último, las curvas $\eta = \xi$ y $\eta = \tan\xi$ no se intersecan en el intervalo $0 < \xi < \pi/2$. Para demostrarlo, hágase $h(\xi) = \tan\xi - \xi$ y calcúlese

$$h'(\xi) = \sec^2\xi - 1 = \tan^2\xi.$$

Esta cantidad es positiva para $0 < \xi < t\pi/2$. Por consiguiente, los valores característicos de (5) son $\lambda_1 = \xi_1^2$, $\lambda_2 = \xi_2^2$, ..., y las funciones características de (5) son múltiplos de las funciones $-\sqrt{\lambda_1}\cos\sqrt{\lambda_1}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_1}x$, $-\sqrt{\lambda_2}\cos\sqrt{\lambda_2}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_2}x$, ... No es posible calcular λ_n con precisión. Sin embargo, se sabe que

$$n^2\pi^2 < \lambda_n < (2n+1)^2\pi^2/4.$$

Además es claro que λ_n tiende a $(2n + 1)^2\pi^2/4$ cuando n tiende a infinito.

EJERCICIOS

Obtenga los valores y las funciones característicos de cada uno de los siguientes problemas de valores a la frontera.

1. $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) = 0,\ \ y'(l) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0;\quad y'(0) = 0,\ \ y'(l) = 0$
3. $y'' - \lambda y = 0;\quad y'(0) = 0,\ \ y'(l) = 0$
4. $y'' + \lambda y = 0;\quad y'(0) = 0,\ \ y(l) = 0$
5. $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) = 0,\ \ y(\pi) - y'(\pi) = 0$
6. $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) - y'(0) = 0,\ \ y(1) = 0$
7. $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) - y'(0) = 0,\ \ y(\pi) - y'(\pi) = 0$

8. ¿Para qué valores de λ el siguiente problema de valores a la frontera tiene una solución no trivial?

$$y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \qquad y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$$

9. ¿Para qué valores de λ el siguiente problema de valores a la frontera tiene una solución no trivial?

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = y(2\pi),\ \ y'(0) = y'(2\pi)$$

10. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = f(t); \qquad y(0) = 0,\ \ y(1) = 0 \qquad (*)$$

(a) Demuestre que (*) tiene solución única $y(t)$ si λ no es un valor característico del problema homogéneo.
(b) Pruebe que (*) no tiene solución $y(t)$ si λ es un valor característico del problema homogéneo.
(c) Sea λ un valor característico del problema homogéneo. Determine las condiciones en f para que (*) tenga una solución $y(t)$. ¿Es única esta solución?

5.2 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO ORDINARIAS*

Todas las ecuaciones diferenciales que han sido estudiadas hasta este momento son relaciones que incluyen una o más funciones de una sola variable y sus derivadas (totales). En este sentido, estas ecuaciones diferenciales se consideran ecuaciones diferenciales *ordinarias*. Por otra parte, muchos problemas importantes de las matemáticas aplicadas dan origen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Una ecuación diferencial en *derivadas parciales* o *no ordinaria* es una relación que contiene una o más funciones de *varias* variables y sus derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es una ecuación diferencial no ordinaria para la función $u(x, t)$, y las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$. El *orden* de una ecuación diferencial en derivadas parciales es el mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, el orden de la ecuación no ordinaria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}+u$$

es 2, ya que el mayor de los órdenes presentes en esta ecuación es 2.

Hay tres ecuaciones clásicas en derivadas parciales, de orden 2, que aparecen con frecuencia en las aplicaciones y que dominan en la teoría de las ecuaciones diferenciales no ordinarias. Tales ecuaciones son

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

La ecuación (1) se conoce como la *ecuación de calor*, y aparece en el estudio de la transferencia de calor y en procesos de difusión. Por ejemplo, considérese una barra metálica delgada de longitud l y cuya superficie está aislada térmicamente. Denótese por $u(x, t)$ la temperatura de la bárra en el punto x en el instante t. Esta función satisfa-

* **(N. del R.)** Por contraposición al calificativo de *ordinarias* para las ecuaciones en derivadas totales, a las ecuaciones en derivadas parciales se les puede llamar *no ordinarias*. Un nombre impropio usual para estas ecuaciones es el de ecuaciones diferenciales "parciales".

ce la ecuación diferencial en derivadas parciales (1) para $0 < x < l$. La constante α^2 se denomina difusividad térmica o conductividad termométrica de la barra, y depende únicamente del material de la barra.

La ecuación (2) se conoce como la *ecuación de onda*, y aparece en el estudio de las ondas sonoras, acuáticas y electromagnéticas. En cualquier análisis matemático de fenómenos en los que interviene la propagación de ondas en un medio continuo, aparece, casi invariablemente, alguna forma de esta ecuación o de alguna de sus generalizaciones. (En la Sección 5.7 se verá más claramente el porqué de este hecho.) La ecuación de onda aparece también en el estudio de vibraciones mecánicas. Supóngase por ejemplo, que se pone en movimiento oscilatorio una cuerda flexible de longitud l, como por ejemplo, una cuerda de violín o un cable de retención, de modo que vibre en un plano vertical. Denótese por $u(x, t)$ al desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t (Fig. 1). Si efectos de amortiguamiento, como la resistencia del aire, son despreciables, y si la amplitud del movimiento no es demasiado grande, entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación en derivadas parciales (2) en el intervalo $0 \leq x \leq l$. En este caso, la constante c^2 es H/ρ, donde H es la componente horizontal de la tensión en la cuerda, y ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud.

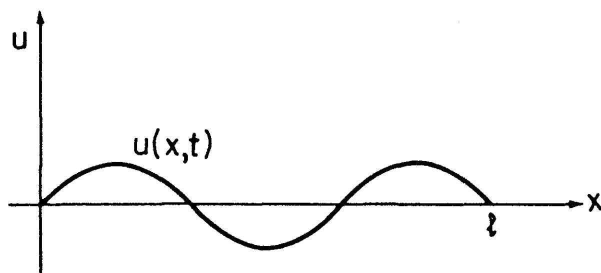


FIGURA 1.

La ecuación (3) se denomina *ecuación de Laplace* y es la más famosa de las ecuaciones diferenciales no ordinarias. Dicha ecuación surge en el estudio de fenómenos tan diversas como el flujo de calor régimen permanente, vibración de membranas y potenciales eléctricos y gravitacionales. Esa es la razón por la que se conoce también como la *ecuación de potencial*.

Además de las ecuaciones diferenciales (1), (2) o (3), se exige también, con frecuencia, que la función u satisfaga condiciones iniciales y a la frontera. Tales condiciones están determinadas por los mismos problemas físicos o biológicos, se les elige de modo que garanticen la existencia de una solución única de la ecuación.

Como modelo para la ecuación de calor (1), considérese una delgada barra de metal de longitud l y cuyos extremos están aislados. Denótese por $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t. Para determinar la temperatura de la barra para todo tiempo t es necesario conocer (i) la distribución inicial de la temperatura en la barra, y (ii) lo que ocurre en los extremos de ésta. ¿Se les mantiene a temperatura constante, por ejemplo, a 0°C, o se encuentran aislados, de modo que no permitan el paso de calor? (Esta última condición implica que $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.) Así pues, un problema bien planteado para procesos de difusión es la ecuación de calor (1) junto con la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < l$ y las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$, o bien $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Como modelo para la ecuación de onda, considérese una cuerda flexible de longitud l, cuyos extremos se hallan fijos, y la cual es puesta en movimiento en un plano vertical. Para determinar la posición $u(x, t)$ de la cuerda para todo tiempo t es necesario conocer (i) la posición inicial de la cuerda, y (ii) la velocidad inicial de la cuerda. Se sobreentiende también que $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Así pues, un problema bien planteado para la propagación de ondas es la ecuación (2) junto con las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, y las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

La ecuación en derivadas parciales (3) no incluye el tiempo t, de modo que no se espera tener "condiciones iniciales" en este caso. En los problemas que surgen en las aplicaciones se tienen los valores de u, o bien los de su derivada normal, en la frontera de una región dada R, y se busca determinar $u(x, y)$ en el interior de R. El problema de encontrar una solución de la ecuación de Laplace, que toma valores prefijados en la frontera, se conoce como *problema de Dirichlet*, mientras que el problema de hallar una solución de la ecuación de Laplace, cuya derivada normal toma valores prefijados a la frontera, se denomina *problema de Neumann*.

En la Sección 5.3 se desarrollará un método muy eficaz, conocido como "método de separación de variables", para resolver el problema de valores a la frontera (estrictamente hablando se debería decir "problema de valores iniciales a la frontera").

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l; \quad u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Después de desarrollar la teoría de las series de Fourier en las Secciones 5.4 y 5.5, se demostrará que el método de separación de variables puede usarse también para resolver problemas más generales de conducción de calor y algunos problemas importantes de propagación de ondas y teoría del potencial.

5.3 LA ECUACIÓN DE CALOR; SEPARACIÓN DE VARIABLES

Considérese el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l; \quad u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{1}$$

El objetivo es encontrar la solución $u(x, t)$ de (1). Para ello, es útil recordar cómo se resolvió el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0; \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \tag{2}$$

Primero se señaló que la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \tag{3}$$

es lineal, es decir, que cualquier combinación lineal de soluciones de (3) es también una solución de (3). Después se encontró la solución $y(t)$ de (2) tomando una combinación lineal apropiada $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ de dos soluciones linealmente independientes $y_1(t)$

y $y_2(t)$ de (3). Ahora bien, se puede verificar fácilmente que cualquier combinación lineal $c_1u_1(x, t) + \ldots + c_nu_n(x, t)$ de soluciones $u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

es también una solución de (4). Además, si $u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)$ satisfacen las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$, entonces la combinación lineal $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ satisface también las condiciones a la frontera. Esto sugiere la siguiente "estrategia" para resolver el problema de valores a la frontera (1):

(a) Encontrar tantas soluciones $u_1(x, t), u_2(x, t), \ldots$ como sea posible al problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{5}$$

(b) Hallar la solución $u(x, t)$ de (1) tomando una combinación lineal apropiada de las funciones $u_n(x, t)$, $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Dado que, hasta el momento, no se sabe cómo resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, es necesario reducir el problema de resolver (5) al de resolver una o más ecuaciones diferenciales ordinarias. Lo anterior se logra tomando $u(x, t) = X(x)T(t)$ (de aquí el nombre de *separación de variables*). Calculando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

se ve que $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de la ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ ($u_t = \partial u/\partial t$ y $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$) si

$$XT' = \alpha^2 X''T. \tag{6}$$

Al dividir entre $\alpha^2 XT$ ambos lados de (6), se obtiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \tag{7}$$

Ahora bien, obsérvese que el primer miembro de (7) es una función sólo de x, mientras que el segundo miembro es una función de t únicamente. Eso implica que

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \text{y} \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda \tag{8}$$

para alguna constante λ. (La única manera de que una función de x sea igual a una de t es que ambas sean iguales a una constante. Para convencerse de ello, hágase $f(x) = g(t)$ y fíjese t_0. Entonces $f(x) = g(t_0)$ para toda x, de modo que $f(x) =$ constante $= c_1$, lo cual implica de inmediato que $g(t)$ también es igual a c_1.) Además, las condiciones a la frontera

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t),$$

y

$$0 = u(l,t) = X(l)T(t)$$

implican que $X(0) = 0$ y $X(l) = 0$ (de otro modo, u sería igual a cero). Así pues, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de (5) si

$$X''+\lambda X=0; \qquad X(0)=0, \quad X(l)=0 \tag{9}$$

y

$$T'+\lambda\alpha^2 T=0. \tag{10}$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, del Ejemplo 1 de la Sección 5.1 se sabe que el problema de valores en la frontera (9) tiene una solución no trivial $X(x)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$; y en tal caso

$$X(x)=X_n(x)=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

La ecuación (10) implica a su vez que

$$T(t)=T_n(t)=e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2}.$$

(En realidad, se deberían multiplicar tanto $X_n(x)$ y $T_n(t)$ por constantes; sin embargo, dichas constantes se omiten aquí debido a que un poco más adelante se tomarán combinaciones lineales de las funciones $X_n(x)T_n(t)$.) Por lo tanto,

$$u_n(x,t)=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2}$$

es una solución no trivial de (5) para todo entero positivo n.

(b) Supóngase que $f(x)$ es una combinación lineal finita de funciones $\operatorname{sen} n\pi x/l$, es decir,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Entonces,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2}$$

es la solución buscada de (1), ya que es una combinación lineal de soluciones de (5) y satisface la condición inicial

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}=f(x), \qquad 0<x<l.$$

Sin embargo, la mayoría de las funciones $f(x)$ no se pueden expresar como una combinación lineal finita de funciones $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots$, en el intervalo $0 < x < l$. Esto lleva a plantearse la siguiente pregunta.

Pregunta: ¿Es posible escribir una función cualquiera $f(x)$ como una combinación lineal *infinita* de funciones $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots$, en el intervalo $0 < x < l$? Dicho de otro modo, dada una función arbitraria f, ¿pueden encontrarse constantes $c_1, c_2, \ldots$, tales que

$$f(x)=c_1\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}+c_2\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{l}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}; \qquad 0<x<l?$$

Sorprendentemente, la respuesta a esta pregunta es que sí, como se verá en la Sección 5.5.

EJEMPLO 1 En el instante $t = 0$, la temperatura $u(x, 0)$ de una barra delgada de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de longitud unitaria es $2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x$, $0 \le x \le 1$. Los extremos de dicha barra están en contacto con hielo para que conserven una temperatura de 0°C. Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de la barra para todo tiempo $t > 0$.

SOLUCIÓN. La temperatura $u(x, t)$ satisface el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1.14\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \begin{cases} u(x,0) = 2\operatorname{sen}3\pi x + 5\operatorname{sen}8\pi x, & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

lo cual implica que

$$u(x,t) = 2\operatorname{sen}3\pi x\, e^{-9(1.14)\pi^2 t} + 5\operatorname{sen}8\pi x\, e^{-64(1.14)\pi^2 t}.$$

EJERCICIOS

Encuentre una solución $u(x, t)$ a los siguientes problemas.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 1.71\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \begin{cases} u(x,0) = \operatorname{sen}\pi x/2 + 3\operatorname{sen}5\pi x/2, & 0 < x < 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 1.14\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \begin{cases} u(x,0) = \operatorname{sen}\pi x/2 - 3\operatorname{sen}2\pi x, & 0 < x < 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$

3. Aplique el método de separación de variables para resolver el problema de valores a la frontera.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u; \qquad \begin{cases} u(x,0) = 3\operatorname{sen}2\pi x - 7\operatorname{sen}4\pi x, & 0 < x < 10 \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \end{cases}$$

Utilice el método de separación de variables para resolver cada uno de los siguientes problemas de valores a la frontera.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial y}; \quad u(0,y) = e^y + e^{-2y}$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial y}; \quad u(t,0) = e^{-3t} + e^{2t}$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + u; \quad u(0,y) = 2e^{-y} - e^{2y}$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial y} - u; \quad u(t,0) = e^{-5t} + 2e^{-7t} - 14e^{13t}$

8. Determine si se puede usar el método de separación de variables para transformar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales no ordinarias en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. En caso afirmativo determine las ecuaciones.

   (a) $tu_{tt} + u_x = 0$ (b) $tu_{xx} + xu_t = 0$

   (c) $u_{xx} + (x-y)u_{yy} = 0$ (d) $u_{xx} + 2u_{xt} + u_t = 0$

9. La ecuación de calor en dos dimensions espaciales es

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{*}$$

(a) Suponiendo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, obtenga ecuaciones diferenciales ordinarias que se satisfagan para X, Y y T.
(b) Halle soluciones $u(x, y\ t)$ de (*) que satisfagan las condiciones a la frontera $u(0, y, t) = 0$, $u(a, y, t) = 0$, $u(x, 0, t) = 0$ y $u(x, b, t) = 0$.

10. La ecuación de calor en dos dimensiones espaciales puede expresarse en coordenadas polares como

$$u_t = \alpha^2\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right].$$

Suponiendo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)t(t)$, encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias que se satisfagan para R, Θ y T.

5.4 SERIES DE FOURIER

El 21 de diciembre de 1807, un ingeniero de nombre Joseph Fourier anunció ante la prestigiosa Academia Francesa de Ciencias que una función arbitraria $f(x)$ puede ser desarrollada en una serie infinita de senos y cosenos. Concretamente, sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $-l \le x \le l$, y calcúlense las expresiones

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

y

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Entonces la serie infinita

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right] \tag{3}$$

converge a $f(x)$. El anuncio de Fourier causó un gran revuelo en la Academia. Muchos de sus miembros prominentes, incluyendo al famoso matemático Lagrange, pensaban que el resultado no tenía sentido, ya que en aquel entonces no se le pudo dar una fundamentación rigurosa. Sin embargo, actualmente los matemáticos han desarrollado la teoría de las *series de Fourier*, a tal grado, que existe un gran número de tratados escritos al respecto. (De hecho, hace muy poco tiempo se lograron establecer condiciones extraordinariamente precisas para la convergencia de la serie de Fourier (3). Dicho resultado es uno de los grandes teoremas del siglo XX.) El siguiente teorema, a pesar de no ser el más general posible, comprende la mayoría de las situaciones que surgen en las aplicaciones.

TEOREMA 2. *Sean f y f' continuas sección por sección en el intervalo $-l \leq x \leq l$. (Esto significa que f y f' tienen solamente un número finito de discontinuidades en dicho intervalo, y que tanto f como f' tienen límites por la derecha y por la izquierda en cada uno de los puntos de discontinuidad.) Calcúlense los términos a_n y b_n a partir de* (1) *y* (2) *y fórmese la serie infinita* (3). *Esta serie, que se llama serie de Fourier de f en el intervalo $-l \leq x \leq l$, converge a $f(x)$ si f es continua en x, y a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$* si f es discontinua en x. En $x = \pm l$, la serie de Fourier* (3) *converge a $\frac{1}{2}[f(l) + f(-l)]$, donde $f(\pm l)$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm l$.*

OBSERVACIÓN. La cantidad $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ es el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de f en el punto x. Si se define $f(x)$ como el promedio de los límites izquierdo y derecho de f en cada uno de los puntos de discontinuidad x, entonces la serie de Fourier (3) converge a $f(x)$ para todos los puntos x en el intervalo $-l < x < l$.

EJEMPLO 1 Sea f una función que es nula para $-1 \leq x < 0$ e igual a 1 para $0 \leq x \leq 1$. Determinar la serie de Fourier de f en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

SOLUCIÓN. En este problema $l = 1$. Por lo tanto, se sigue a partir de (1) y (2) que

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx = 0, \qquad n \geqslant 1$$

y

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx = \int_0^1 \mathrm{sen}\,n\pi x\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \qquad n \geqslant 1.$$

Nótese que $b_n = 0$ para n par y $b_n = 2/n\pi$ para n impar. Por lo tanto, la serie de Fourier de f en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ es

$$\frac{1}{2} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\pi x}{\pi} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,3\pi x}{3\pi} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,5\pi x}{5\pi} + \ldots .$$

Por el Teorema 2, esta serie converge a 0 si $-1 < x < 0$, y a 1 si $0 < x < 1$. En $x = -1$, 0 y 1, la serie se reduce al valor de $\frac{1}{2}$, predicho por el Teorema 2.

EJEMPLO 2 Sea f la función que es 1 para $-2 \leq x < 0$ y x para $0 \leq x \leq 2$. Calcular la serie de Fourier de f en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

* La cantidad $f(x+0)$ denota el límite de f por la derecha en el punto x. Análogamente, $f(x-0)$ denota el límite de f por la izquierda.

SOLUCIÓN. En este problem $l = 2$. Por lo tanto, se sigue de (1) y (2) que

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1), \qquad n > 1$$

y

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\text{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(1 + \cos n\pi), \qquad n > 1.$$

Nótese que $a_n = 0$ si n es par; $a_n = -4/n^2\pi^2$ si n es impar; $b_n = 0$ si n es impar y $b_n = -2/n\pi$ si n es par. Por lo tanto, la serie de Fourier de f en el intervalo $-2 \le x \le 2$ es

$$1 - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\text{sen}\,\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{2\pi}\text{sen}\,2\pi x + \ldots$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x/2}{(2n+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,n\pi x}{n}. \tag{4}$$

Por el Teorema 2, esta serie converge a 1 si $-2 < x < 0$; a x, si $0 < x < 2$; a ½ si $x = 0$; y a   si $x = \pm 2$. Ahora bien, en $x = 0$, la serie de Fourier (4) es

$$1 - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right].$$

De modo que se deduce la importante identidad

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right]$$

o bien

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Los coeficientes de Fourier a_n y b_n definidos por (1) y (2) se pueden obtener de manera sencilla. De hecho, si una función f continua sección por sección puede ser expresada en una serie de senos y cosenos en el intervalo $-l \le x \le l$, entonces necesariamente, dicha serie es la de Fourier (3). Tal afirmación se demuestra de la siguiente manera. Supóngase que f es continua por secciones y que

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k\cos\frac{k\pi x}{l} + d_k\,\text{sen}\frac{k\pi x}{l}\right] \tag{5}$$

para parejas de números c_k y d_k. Supóngase además que la ecuación se cumple en el intervalo $-l \le x \le l$ excepto por un número finito de puntos. Integrando ambos miembros de (5) entre $-l$ y l, se obtiene $c_0 l = \int_{-l}^{l} f(x)dx$, ya que

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots^{*}$$

De manera similar, multiplicando por $\cos n\pi x/l$ ambos lados de (5) e integrando entre $-l$ y l, se obtiene

$$lc_n = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

mientras que al multiplicar por $\operatorname{sen} n\pi x/l$ ambos lados de (5) e integrar entre $-l$ y l, resulta

$$ld_n = \int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Esto se sigue inmediatamente de las relaciones (Ejercicio 19)

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ l, & k = n \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0 \tag{7}$$

y

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ l, & k = n \end{cases}. \tag{8}$$

Por lo tanto, los coeficientes c_n y d_n deben ser iguales a los coeficientes de Fourier a_n y b_n. En particular, por lo tanto, una función f puede ser desarrollada sólo de una manera en series de Fourier en el intervalo $-l \le x \le l$.

EJEMPLO 3 Hallar la serie de Fourier de la función $f(x) = \cos^2 x$ en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$.

SOLUCIÓN. Según la observación anterior, la función $f(x) = \cos^2 x$ tiene una representación única en series de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\pi} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\pi}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx\right]$$

en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$. Pero ya se conoce la fórmula

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de $\cos^2 x$ en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$ debe ser ½ + ½ $\cos 2x$.

* Se puede demostrar que es permisible integrar la serie (5) término a término.

Todas las funciones cos $n\pi x/l$ y sen $n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots$, tienen la interesante propiedad de ser periódicas con periodo $2l$, es decir, repiten siempre sus valores en intervalos de longitud $2l$. Tal cosa se sigue trivialmente de las identidades

$$\cos\frac{n\pi}{l}(x+2l)=\cos\left(\frac{n\pi x}{l}+2n\pi\right)=\cos\frac{n\pi x}{l}$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+2l)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}+2n\pi\right)=\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier (3) converge para toda x a una función periódica $F(x)$. Dicha función se conoce como la *extensión periódica* de $f(x)$ y está definida por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} F(x)=f(x), & -l<x<l \\ F(x)=\frac{1}{2}[f(l)+f(-l)], & x=\pm l \\ F(x+2l)=F(x). \end{cases}$$

Por ejemplo, en la Figura 1 se describe la extensión periódica de la función $f(x) = x$. En la Figura 2 se describe la de la función $f(x) = |x|$, la cual es de forma aserrada.

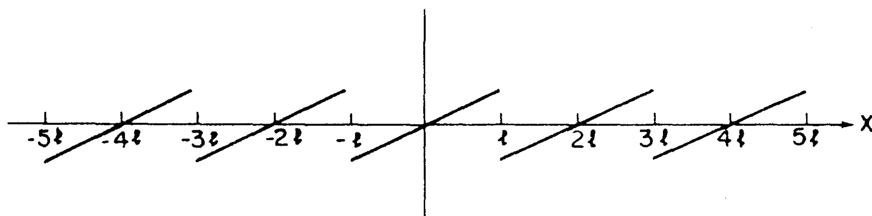


FIGURA 1. Extensión periódica de $f(x) = x$

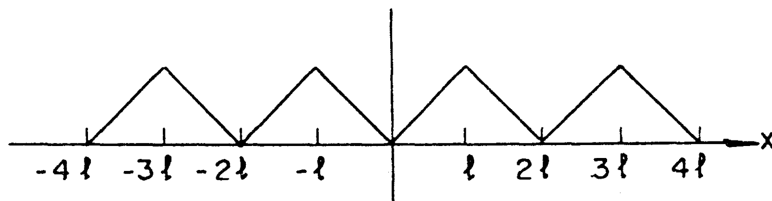


FIGURA 2. Extensión periódica de $f(x) = |x|$

EJERCICIOS

En cada uno de los Problemas del 1 al 13, encuentre la serie de Fourier de la función dada f en el intervalo indicado.

1. $f(x)=\begin{cases} -1, & -1\leq x<0 \\ 1, & 0\leq x\leq 1 \end{cases}; \quad |x|\leq 1$

2. $f(x)=\begin{cases} x, & -2\leq x<0 \\ 0, & 0\leq x\leq 2 \end{cases}; \quad |x|\leq 2$

3. $f(x)=x;\quad -1\leqslant x\leqslant 1$

4. $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases};\quad |x|\leqslant 1$

5. $f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases};\quad |x|\leqslant 2$

6. $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<1\\ 3, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases};\quad |x|\leqslant 2$

7. $f(x)=\begin{cases}0, & -l\leqslant x<0\\ e^x, & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases};\quad |x|\leqslant l$

8. $f(x)=\begin{cases}e^x, & -l\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases};\quad |x|\leqslant l$

9. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & -l\leqslant x<0\\ e^x, & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases};\quad -l\leqslant x\leqslant l$

10. $f(x)=e^x;\quad |x|\leqslant l$

11. $f(x)=e^{-x};\quad |x|\leqslant l$

12. $f(x)=\text{sen}^2 x;\quad |x|\leqslant \pi$

13. $f(x)=\text{sen}^3 x;\quad |x|\leqslant \pi$

14. Sea $f(x) = (\pi\cos ax)/2a\,\text{sen}\,a\pi$, donde a no es un número entero.

(a) Obtenga la serie de Fourier de f en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

(b) Demuestre que dicha serie converge en $x = \pi$ al valor $(\pi/2a)\cot\pi a$.

(c) Use el resultado anterior para obtener la suma de la serie

$$\frac{1}{1^2-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}+\cdots.$$

15. Suponga que f y f' son funciones continuas por secciones en el intervalo $-l \leq x\text{t} \leq l$. Pruebe que los coeficientes de Fourier a_n y b_n tienden a cero cuando n tiende a infinito.

16. Sea

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}\right].$$

Demuestre que

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Esta relación se denomina *identidad de Parseval. Sugerencia:* Elévese al cuadrado la serie de Fourier de f e intégrese término por término.

17. (a) Encuentre la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

(b) Use la identidad de Parseval para probar que

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

18. Si la función delta de Dirac $\delta(x)$ tuviera un desarrollo en series de Fourier en el intervalo $-l \leq x \leq l$, ¿cuál sería él?

19. Deduzca las ecuaciones (6) a (8). *Sugerencia:* Utilícense las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

5.5 FUNCIONES PARES E IMPARES

Hay algunos casos especiales en los que la serie de Fourier de una función f se reduce a una serie con términos sólo de cosenos, o bien únicamente de senos. Tales casos especiales ocurren cuando f es par o impar.

DEFINICIÓN. Se dice que una función f es par si $f(-x) = f(x)$.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = x^2$ es par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

EJEMPLO 2 La función $f(x) = \cos n\pi x/l$ es par, puesto que

$$f(-x) = \cos\frac{-n\pi x}{l} = \cos\frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

DEFINICIÓN. Se dice que una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

EJEMPLO 3 La función $f(x) = x$ es impar, ya que

$$f(-x) = -x = -f(x).$$

EJEMPLO 4 La función $f(x) = \operatorname{sen} n\pi x/l$ es impar, puesto que

$$f(-x) = \operatorname{sen}\frac{-n\pi x}{l} = -\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} = -f(x).$$

Las funciones pares e impares satisfacen las siguientes propiedades elementales:

1. El producto de dos funciones pares es par.
2. El producto de dos funciones impares es par.
3. El producto de una función impar y una función par es impar.

Las demostraciones de estas afirmaciones son triviales y se siguen inmediatamente a partir de las definiciones. Por ejemplo, sean f y g impares y sea $h(x) = f(x)g(x)$. Esta función h es par, ya que

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = h(x).$$

Además de las propiedades multiplicativas 1 a 3, las funciones pares e impares satisfacen las siguientes propiedades con respecto a la integración.

4. La integral de una función impar f sobre un intervalo simétrico $[-l, l]$ es igual a cero, es decir, $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ si f es impar.
5. La integral de una función par f sobre un intervalo $[-l, l]$ es igual a dos veces la integral de f sobre el intervalo $[0, l]$, es decir,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

si f es par.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 4. Si f es impar, entonces el área bajo la curva de f entre $-l$ y 0 es el negativo del área bajo la curva de f entre 0 y l. Por lo tanto, $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ si f es impar.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 5. Si f es par, entonces el área bajo la curva de f entre $-l$ y 0 es igual al área bajo la curva de f entre 0 y l. Por lo tanto,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

si f es par.

Para las funciones pares e impares se tiene el siguiente lema importante.

LEMA 1. (a) *La serie de Fourier de una función par incluye solamente términos coseno, es decir, no contiene términos de la forma* sen $n\pi x/l$.
(b) *La serie de Fourier de una función impar incluye solamente términos seno, es decir, no contiene términos de la forma* cos $n\pi x/l$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Si f es par, entonces la función $f(x)\operatorname{sen} n\pi x/l$ es impar. Así que, por la Propiedad 4, los coeficientes

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

en la serie de Fourier de f, son iguales a cero.
(b) Si f es impar, entonces la función $f(x)\cos n\pi x/l$ es también impar. Por consiguiente, por la Propiedad 4, los coeficientes

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

en la serie de Fourier de f, son iguales a cero.

Ahora es posible demostrar la siguiente extensión del Teorema 2, la cual es muy importante. Dicho teorema permitirá resolver el problema de conducción de calor de

la Sección 5.3 y muchos otros problemas de valores a la frontera que surgen en las aplicaciones.

TEOREMA 3. *Sean f y f' continuas por secciones en el intervalo $0 \leq x \leq l$. Entonces en dicho intervalo se puede desarrollar $f(x)$ en una serie de cosenos solamente*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

o bien en una serie de senos únicamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

En el primer caso, los coeficientes a_n están dados por la fórmula,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

mientras que en el segundo caso, los coeficientes b_n están dados por la fórmula

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. *Considérese primero la función*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ f(-x), & -l \leqslant x < 0 \end{cases}.$$

En la Figura 1 se describe la gráfica de $F(x)$ y puede verse fácilmente que F es par. (Por esta razón se conoce F como la extensión par de f.) Por lo tanto, por el Lema 1,

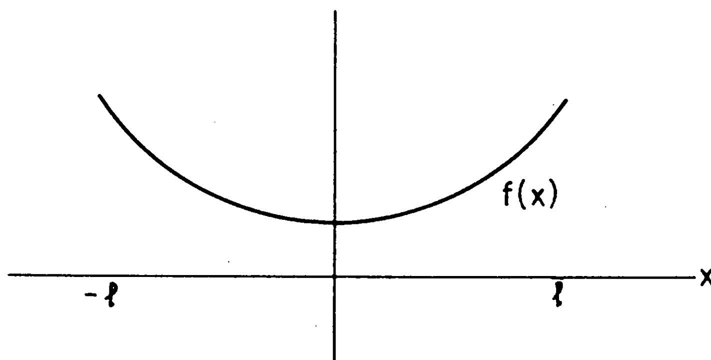


FIGURA 1. La gráfica de $F(x)$

la serie de Fourier de F en el intervalo $-l \leq x \leq l$ es

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}; \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{3}$$

Ahora bien, obsérvese que la función $F(x)\cos n\pi x/l$ es par. De modo que, por la Propiedad 5, se tiene que

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Por último, dado que $F(x) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$, se concluye de (3) que

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Obsérvese también que la serie (3) converge a $f(x)$ para $x = 0$ y $x = l$.

Para demostrar que se puede desarrollar $f(x)$ en una serie de senos solamente, considérese la función

$$G(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l \\ -f(-x), & -l<x<0 \\ 0, & x=0, \pm l. \end{cases}$$

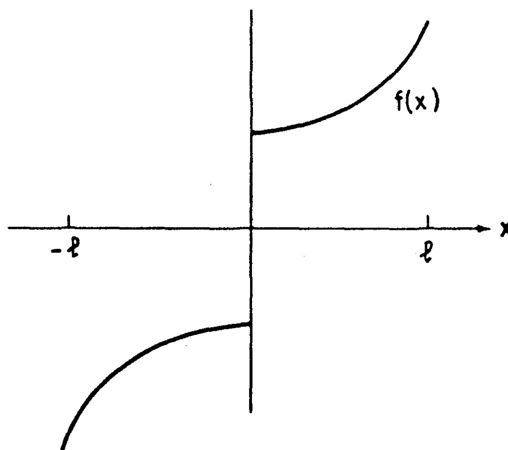


FIGURA 2. La gráfica de $G(x)$

En la Figura 2 se describe la gráfica de $G(x)$, y puede verse fácilmente que G es impar. (Por esta razón, G se denomina la *extensión impar* de f.) Por lo tanto, por el Lema 1, la serie de Fourier de G en el intervalo $-l \leq x \leq l$ es

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}; \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} G(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{4}$$

Ahora bien, obsérvese que la función $G(x)\operatorname{sen} n\pi x/l$ es par.
De modo que, por la Propiedad 5,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l G(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Por último, dado que $G(x) = f(x)$, $0 < x < l$, se concluye de (4) que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad 0<x<l.$$

Obsérvese también que la serie (4) es igual a cero para $x = 0$ y $x = l$.

EJEMPLO 5 Desarrollar la función $f(x) = 1$ en una serie de senos solamente, en el intervalo $0 < x < \pi$.

SOLUCIÓN. Por el Teorema 3, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$, donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n \text{ impar}\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots\right], \qquad 0<x<\pi.$$

EJEMPLO 5 Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en una serie de cosenos en el intervalo $0 \le x \le 1$.

SOLUCIÓN. Por el Teorema 3, $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, donde

$$a_0 = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2(e-1)$$

y

$$a_n = 2\int_0^1 e^x \cos n\pi x\,dx = 2\operatorname{Re}\int_0^1 e^x e^{in\pi x}\,dx$$

$$= 2\operatorname{Re}\int_0^1 e^{(1+in\pi)x}\,dx = 2\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{1+in\pi}-1}{1+in\pi}\right\}$$

$$= 2\operatorname{Re}\left\{\frac{(e\cos n\pi - 1)(1-in\pi)}{1+n^2\pi^2}\right\} = \frac{2(e\cos n\pi - 1)}{1+n^2\pi^2}.$$

Por consiguiente,

$$e^x = e - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e\cos n\pi - 1)}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x, \qquad 0< x< 1.$$

EJERCICIOS

Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Fourier de cosenos en el intervalo que se indica.

1. $f(x)=e^{-x}; \quad 0<x<1$

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}; \quad 0<x<2$

3. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<a \\ a, & a<x<2a \end{cases}; \quad 0<x<2a$

4. $f(x)=\cos^2 x; \quad 0<x<\pi$

5. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<l/2 \\ l-x, & l/2<x<l \end{cases}; \quad 0<x<l$

Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Fourier de senos en el intervalo que se indica.

6. $f(x)=e^{-x}; \quad 0<x<1$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}; \quad 0<x<2$

8. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<a \\ a, & a<x<2a \end{cases}; \quad 0<x<2a$

9. $f(x)=2\,\text{sen}\,x\cos x; \quad 0<x<\pi$

10. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<l/2 \\ l-x, & l/2<x<l \end{cases}; \quad 0<x<l$

11. (a) Desarrolle la función $f(x) = \text{sen}\,x$ en una serie de Fourier de cosenos en el intervalo $0 \le x \le \pi$.
(b) Desarrolle la función $f(x) = \cos x$ en una serie de Fourier de senos en el intervalo $0 < x < \pi$.
(c) ¿Es posible desarrollar la función $f(x) = \text{sen}\,x$ en una serie de Fourier de cosenos en el intervalo $-\pi < x < \pi$? Explique.

5.6 REGRESO A LA ECUACIÓN DE CALOR

En esta sección se retornará al problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}. \tag{1}$$

En la Sección 5.3 se demostró que la función

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}$$

es (formalmente) una solución del problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{2}$$

para cualquier elección de constantes $c_1, c_2, \ldots$. Esto lleva a preguntarse si es posible encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots$ tales que

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}=f(x), \qquad 0<x<l. \tag{3}$$

Como se señaló en la Sección 5.5, la respuesta a esta pregunta es sí; se tiene que si se elige

$$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

entonces la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} n\pi x/l$ converge a $f(x)$ si f es continua en el punto x. De modo que

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2} \tag{4}$$

es la solución de (1) que se buscaba.

OBSERVACIÓN. Estrictamente hablando, no puede considerarse que la solución (4) es la solución de (1) hasta que se justifiquen en forma rigurosa todos los procesos límite que intervienen. Concretamente, se debe verificar que la función $u(x, t)$ definida por (4) tiene realmente derivadas parciales con respecto a x y t, y que $u(x, t)$ satisface la ecuación de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. (No necesariamente es cierto que la suma infinita de soluciones de una ecuación diferencial lineal sea también una solución. De hecho, la suma infinita de soluciones de una ecuación diferencial dada no tiene que ser siquiera diferenciable.) Sin embargo, en el caso (4) es posible mostrar (Ejercicio 3) que $u(x, t)$ tiene derivadas parciales con respecto a x y t de todos los órdenes, y que $u(x), t)$ satiface el problema de valores a la frontera (1). El razonamiento se apoya con fuerza en el hecho de que la serie infinita (4) converge muy rápidamente, debido a la presencia del factor $e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2}$. De hecho, la función $u(x, t)$, para $t > 0$ fijo, es incluso analítica para $0 < x < l$. Así pues, la conducción de calor es un proceso de difusión que empareja de manera instantánea cualquier discontinuidad que pudiera estar presente en la distribución inicial de temperaturas en la barra. Obsérvese, por último, que $\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0$, para toda x, independientemente de la temperatura inicial en la barra. Lo anterior está de acuerdo con la intuición física de que la distribución de calor en la barra debería tender a un "régimen permanente", es decir, un estado en el que la temperatura no cambia con el tiempo.

EJEMPLO 1 Se calienta una barra delgada de aluminio ($\alpha^2 = 0.86\,\text{cm}^2/\text{s}$) de 10 cm de largo a una temperatura uniforme de 100°C. En el instante $t = 0$, se colocan los extremos de la barra en baño de hielo a 0°C, con lo que mantienen su temperatura a dicho nivel. No se permite la disipación de calor a través de la superficie lateral de la barra. Hallar una expresión para la temperatura en cualquier punto de la barra *y para* todo tiempo futuro t.

SOLUCIÓN. Denótese por $u(x, t)$ la tempeatura de la barra en el punto x en el instante t. Esta función satisface el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0.86\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \begin{cases} u(x,0)=100, & 0<x<10 \\ u(0,t)=u(10,t)=0 \end{cases} \tag{5}$$

La solución de (5) es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}e^{-0.86n^2\pi^2 t/100}$$

donde

$$c_n=\frac{1}{5}\int_0^{10} 100\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\,dx=\frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

Nótese que $c_n = 0$ si n es par, y $c_n = 400/n\pi$ si n es impar. Por lo tanto,

$$u(x,t)=\frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi x}{10}}{(2n+1)}e^{-0.86(2n+1)^2\pi^2 t/100}.$$

Hay algunos problemas más de conducción de calor que pueden ser resueltos por el método de separación de variables. El Ejemplo 2, a continuación, analiza el caso en que los extremos de la barra están también aislados y el Ejercicio 4 examina el caso cuando los extremos de la barra se mantienen a temperaturas T_1 y T_2 constantes diferentes de cero.

EJEMPLO 2 Considerar una barra delgada de metal de longitud l y conductividad térmométrica α^2, cuyos extremos se encuentran aislados de tal forma, que no hay flujo de calor a través de ellos. Sea $f(x)$ la distribución inicial de temperaturas en la barra. Encontrar la distribución de temperaturas en la barra para todo tiempo futuro t.

SOLUCIÓN. Denótese por $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t. Esta función satisface el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \begin{cases} u(x,0)=f(x), & 0<x<l \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0 \end{cases} \tag{6}$$

Este problema se resolverá en dos pasos. Primero, se encontrará una infinidad de soluciones $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ del problema de valores a la frontera

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}; \qquad u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \tag{7}$$

y posteriormente se hallarán constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ tales que

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

satisfagan la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Primer paso: Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$. Calculando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

se ve que $u(x, t)$ es una solución de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ si

$$XT' = \alpha^2 X''T, \text{ o bien } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \tag{8}$$

Como se demostró en la Sección 5.3, la Ecuación (8) implica que

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{y} \quad T' + \lambda\alpha^2 T = 0$$

para alguna constante λ. Además, las condiciones a la frontera

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)T(t) \quad \text{y} \quad 0 = u_x(l,t) = X'(l)T(t)$$

implican que $X'(0) = 0$ y $X'(l) = 0$. Por lo tanto, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de (7) si

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \tag{9}$$

y

$$T' + \lambda\alpha^2 T = 0. \tag{10}$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (9) tiene una solución no trivial $X(x)$ (Ejercicio 1 de la Sección 5.1), solamente si $\lambda = n^2\pi^2/l^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y en tal caso

$$X(x) = X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

La ecuación (10) implica entonces que $T(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}$. Por lo tanto,

$$u_n(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}$$

es una solución de (7) para todo entero no negativo n.

Segundo paso: Obsérvese que la combinación lineal

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l} e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}$$

es (formalmente) una solución de (7) para cualquier elección de constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Su valor inicial es

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

De modo que, para satisfacer la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se deben elegir constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ tales que

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad 0 < x < l.$$

Dicho de otro modo, es necesario desarrollar f en una serie de Fourier de cosenos en el intervalo $0 \leq x \leq l$. Precisamente esa es la situación en el Teorema 3 de la Sección 5.5, y se concluye, por lo tanto, que

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

En consecuencia,

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\,e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/l^2} \qquad (11)$$

es la solución buscada de (6).

OBSERVACIÓN. Obsérvese a partir de (11) que la temperatura de la barra tiende finalmente a la temperatura de régimen permanente

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx.$$

Esta temperatura de régimen permanente puede ser interpretada como el "promedio" de la distribución inicial de temperaturas en la barra.

EJERCICIOS

1. Los extremos $x = 0$ y $x = 10$ de una delgada barra de aluminio ($\alpha^2 = 0.86$) están a 0°C, mientras que la superficie de la barra se encuentra aislada. Obtenga una expresión para la temperatura $u(x, t)$ de la barra si inicialmente se cumple
   (a) $u(x,0) = 70, \quad 0 < x < 10$
   (b) $u(x,0) = 70\cos x, \quad 0 < x < 10$
   (c) $u(x,0) = \begin{cases} 10x, & 0 < x < 5 \\ 10(10-x), & 5 < x < 10 \end{cases}$
   (d) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3 \\ 65, & 3 < x < 10 \end{cases}$

2. Los extremos de una barra de cobre delgada ($\alpha^2 = 1.14$), de longitud 2, están aislados de forma que no permiten flujo de calor a través de ellos. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de la barra si inicialmente se cumple
   (a) $u(x,0) = 65\cos^2\pi x, \quad 0 < x < 2$
   (b) $u(x,0) = 70\,\mathrm{sen}\,x, \quad 0 < x < 2$
   (c) $u(x,0) = \begin{cases} 60x, & 0 < x < 1 \\ 60(2-x), & 1 < x < 2 \end{cases}$
   (d) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 75, & 1 < x < 2 \end{cases}$

3. Verifique que la función $u(x, t)$ definida por (4) satisface la ecuación de calor. *Sugerencia:* Use el criterio de la razón de Cauchy para mostrar que la serie infinita (4) puede ser derivada término a término con respecto a x y t.

4. Una solución de régimen permanente $u(x, t)$ de la ecuación de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ es una solución $u(x, t)$ que no cambia con el tiempo.

(a) Demuestre que todas las soluciones de régimen permanente de la ecuación de calor son funciones lineales de x; es decir, $u(x) = Ax + B$.

(b) Encuentre que todas las soluciones de régimen permanente del problema de valores a la frontera

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}; \qquad u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2.$$

(c) Resuelva el problema de conducción de calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}; \qquad \begin{cases} u(x,0) = 75, & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 20, & u(1,t) = 60 \end{cases}$$

Sugerencia: Sea $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, donde $v(x)$ es la solución de estado estacionario del problema de valores en la frontera $u_t = \alpha^2 u_{xx}$; $u(0, t) = 20$, $u(1, t) = 60$.

5. (a) Los extremos de una barra de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de 10 cm de largo están a 0°C, mientras que el centro de la misma se mantiene a 100°C mediante una fuente externa de calor. Pruebe que la temperatura de la barra tenderá finalmente a la distribución de régimen permanente sin importar la temperatura inicial de la barra. *Sugerencia:* Divídase el problema en dos problemas de valores a la frontera.

   (b) Suponga que la temperatura de la barra se encuentra en su distribución de régimen permanente. En el instante $t = 0$, se retira la fuente externa de calor del centro de la barra y se le coloca en su extremo izquierdo. Encuentre la temperatura de la barra para todo tiempo futuro t.

6. Resuelva el problema de valores a la frontera

$$u_t = u_{xx} + u; \qquad \begin{cases} u(x,0) = \cos x, & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0, & u(1,t) = 0. \end{cases}$$

5.7 LA ECUACIÓN DE ONDA

Considérese ahora el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

el cual caracteriza la propagación de ondas en diferentes medios y las vibraciones mecánicas de una cuerda flexible. También este problema puede resolverse por el método de separación de variables. Concretamente se hará lo siguiente: (a) encontrar soluciones $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ del problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{2}$$

y (b) hallar la solucion $u_t(x,t)$ de (1) tomando una combinación lineal adecuada de las funciones $u_n(x, t)$.

(a) Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$. Al calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

se ve que $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ si $XT'' = c^2 X'' T$, o bien si

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{3}$$

Obsérvese, además, que el primer miembro de (3) es sólo función de t, mientras que el segundo es función de x únicamente. Esto implica que

$$\frac{T''}{c^2 T} = -\lambda = \frac{X''}{X}$$

para una constante λ. Además, las condiciones a la frontera

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t), \quad \text{y} \quad 0 = u(l,t) = X(l)T(t)$$

implican que $X(0) = 0$ y $X(l) = 0$. Por lo tanto, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de (2) si

$$X'' + \lambda X = 0; \qquad X(0) = X(l) = 0 \tag{4}$$

y

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \tag{5}$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (4) tiene una solución no trivial $X(x)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, y en tal caso

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

La ecuación (5) implica entonces que

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}.$$

Por lo tanto,

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left[a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right]$$

es una solución no trivial de (2) para todo entero positivo n, y para cualquier par de constantes a_n, b_n.

(b) La combinación lineal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left[a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right]$$

satisface formalmente el problema de valores a la frontera (2) y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \quad \text{y} \quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Así pues, para satisfacer las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$, es necesario elegir las constantes a_n y b_n, de modo que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \quad \text{y} \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

en el intervalo $0 < x < l$. Dicho de otro modo, es necesario desarrollar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en series de Fourier de senos en el intervalo $0 < x < l$. Esa es precisamente la situación en el Teorema 3 de la Sección 5.5, por lo que se concluye que

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{y} \quad b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Para simplificar se analizará a continuación solamente el caso en el que $g(x)$ es igual a cero; es decir, la cuerda se suelta con velocidad inicial igual a cero. En tal caso, el desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda en cualquier momento $t > 0$ está dado por la fórmula

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}; \qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6}$$

Existe una interpretación física para varios de los términos en (6). Cada uno de éstos representa un modo particular con el cual vibra la cuerda. El primer término ($n = 1$) representa el primer modo de vibración con el cual oscila la cuerda alrededor de la posición de equilibrio con una frecuencia de

$$\omega_1=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi c}{l}=\frac{c}{2l} \text{ ciclos por segundo.}$$

La frecuencia más baja es conocida como la frecuencia fundamental, o primera armónica, de la vibración de la cuerda. De manera similar, el modo n tiene una frecuencia de

$$\omega_n=\frac{1}{2\pi}\frac{n\pi c}{l}=n\omega_1 \text{ ciclos por segundo.}$$

y se llama armónica n de la vibración de la cuerda.

En el caso de la cuerda vibrante, todas las frecuencias armónicas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_1. Así que, en ese caso se produce sonido musical. Por supuesto que, si la tensión en la cuerda no es lo suficientemente grande, entonces el sonido que surge es de una frecuencia tan baja que no se encuentra en el intervalo audible. Conforme aumenta la tensión en la cuerda, se incrementa la frecuencia, dando como resultado una nota musical que puede ser percibida por el oído humano.

Justificación de la solución. No es posible demostrar directamente, como en el caso de la ecuación de calor, que la función $u(x, t)$ definida por (6) es una solución de la ecuación de onda. De hecho, ni siquiera es posible demostrar directamente que la serie infinita (6) tiene derivadas parciales con respecto a t y x. Por ejemplo, realizando un cálculo formal, se obtiene que

$$u_t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

y debido a la presencia del factor n, puede ser que la serie no converja. Sin embargo, hay otra manera de establecer la validez de la solución (6). Al mismo tiempo, se obtendrá una mejor comprensión de la estructura de $u(x, t)$. Obsérvese primero que

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right].$$

Sea además F la extensión periódica de f en el intervalo $-l < x < l$, es decir,

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l \\ -f(-x), & -l<x<0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F(x+2l)=F(x).$$

se puede verificar fácilmente (Ejercicio 6) que la serie de Fourier de F es

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad c_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Por lo tanto, es posible escribir $u(x, t)$ en la forma

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}[F(x-ct)+F(x+ct)] \tag{7}$$

y en este punto resulta fácil mostrar que $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda si $f(x)$ tiene dos derivadas continuas.

La ecuación (7) tiene la siguiente interpretación. Si se traza la gráfica de la función $y = F(x - ct)$ para un valor fijo de t, se ve que es la misma que la gráfica de $y = f(x)$, excepto por el hecho que está desplazada una distancia ct en la dirección positiva para x, como aparece en las Figuras 1a y 1b. Así pues, $F(x - ct)$ es una *onda* que se propaga con velocidad c en la dirección positiva de x. De la misma manera, $F(x + ct)$ es una onda que viaja con velocidad c en la dirección negativa de x. El número c representa la velocidad con la cual se propaga una perturbación a lo largo de una cuerda. Si ocurre una perturbación en el punto x_0, entonces se percibirá en el punto x después de un tiempo $t = (x - x_0)/c$. Así pues, la ecuación de onda, o alguna forma de ella; caracteriza la propagación de ondas en un medio en el que las perturbaciones (o señales) viajan con una velocidad finita, más que con una infinita.

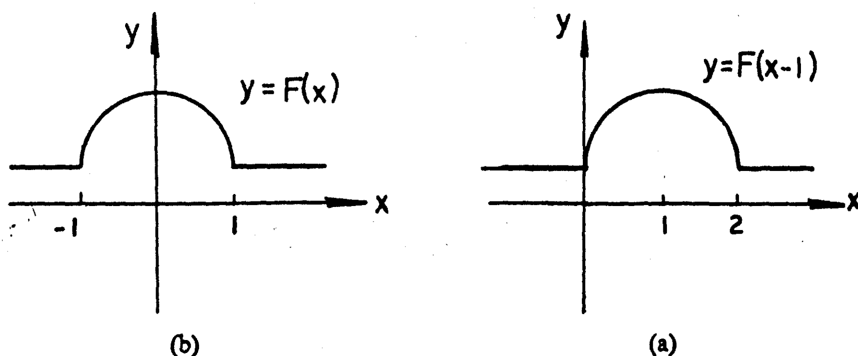


FIGURA 1.

EJERCICIOS

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valores a la frontera.

1. $u_{tt}=c^2u_{xx};\quad \begin{cases} u(x,0)=\cos x-1, & u_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi \\ u(0,t)=0, & u(2\pi,t)=0 \end{cases}$

2. $u_{tt}=c^2u_{xx};\quad \begin{cases} u(x,0)=0, & u_t(x,0)=1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,t)=0, & u(1,t)=0 \end{cases}$

3. $\begin{matrix} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ u(0,t)=u(3,t)=0 \end{matrix};\quad u(x,0)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \quad u_t(x,0)=0 \\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2 \\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$

4. $u_{tt}=c^2u_{xx};\quad \begin{cases} u(x,0)=x\cos\pi x/2, & u_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,t)=0, & u(1,t)=0 \end{cases}$

5. Una cuerda de 10 pies de longitud es alzada por la mitad a una altura de 1 pie, para ser liberada inmediatamente después. Describa el movimiento oscilatorio de la cuerda, suponiendo que $c^2 = 1$.

6. Sea F la extensión periódica impar de f en el intervalo $-l < x < l$. Demuestre que la serie de Fourier

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

converge a $F(x)$ si F es continua en x.

7. Pruebe que la transformación $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ reduce la ecuación de onda a la ecuación $u_{\xi\eta} = 0$. Concluya que, por lo tanto, toda solución $u(x, t)$ de la ecuación de onda es de la forma $u(x, t) = F(x - ct) + G(x, ct)$ para dos funciones F y G.

8. Demuestre que la solución del problema de valores a la frontera

$$u_{tt}=c^2u_{xx};\qquad \begin{cases} u(x,0)=f(x), & u_t(x,0)=g(x), \quad -l<x<l \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}$$

es

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x-ct)+F(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$$

donde F es la extensión periódica impar de f.

9. La ecuación de onda en dos dimensiones es $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$. Encuentre soluciones de esta ecuación por el método de separación de variables.

10. Resuelva el problema de valores a la frontera

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+u;\qquad \begin{cases} u(x,0)=f(x), & u_t(x,0)=0, \quad 0<x<l \\ u(0,t)=0, & u(l,t)=0 \end{cases}$$

5.8 LA ECUACIÓN DE LAPLACE

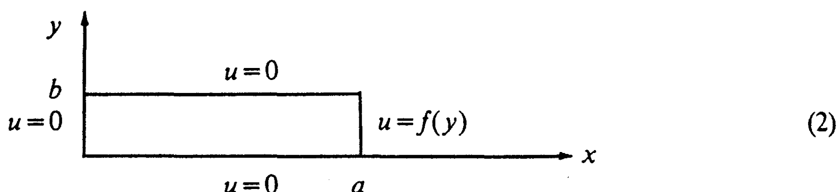
Considérese ahora la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Como se mencionó en la Sección 5.2, dos problemas importantes de valores a la frontera que surgen en relación con (1) son el problema de Dirichlet y el de Neumann. En el de Dirichlet se busca una función $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en el interior de una región R y que tome valores prefijados en la frontera de R. En el problema de Neumann se busca una función $u(x, y)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en el interior de una región R y cuya derivada en la dirección normal a la frontera de R tome valores prefijados. Ambos problemas pueden ser resueltos por el método de separación de variables, si R es un rectángulo.

EJEMPLO 1 Obtener una función $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, y que cumpla las condiciones a la frontera

$$u(x,0)=0, \qquad u(x,b)=0$$
$$u(0,y)=0, \qquad u(a,y)=f(y)$$



(2)

SOLUCIÓN. El problema se resolverá en dos pasos. Primero, se encontrarán funciones $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ que satisfagan el problema de valores a la frontera

$$u_{xx}+u_{yy}=0; \qquad u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0, \quad u(0,y)=0. \tag{3}$$

Después, se hallarán constantes c_n, tales que la combinación lineal

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y)$$

satisfaga la condición a la frontera $u(a, y) = f(y)$.

Primer paso: Sea $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Calculando $u_{xx} = X''Y$ y $u_{yy} = XY''$, se ve que $u(x, y) = X(x)Y(y)$ es una solución de la ecuación de Laplace si $X''Y + XY'' = 0$, o bien si

$$\frac{Y''}{Y}=-\frac{X''}{X}. \tag{4}$$

Obsérvese además que el primer miembro de (4) es una función de sólo y mientras que el segundo es una función de x únicamente. Eso implica que

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda.$$

para alguna constante λ. Además, las condiciones de frontera

$$0 = u(x,0) = X(x)Y(0), \qquad 0 = u(x,b) = X(x)Y(b),$$
$$0 = u(0,y) = X(0)Y(y)$$

implican que $Y(0) = 0$, $Y(b) = 0$ y $X(0) = 0$. Por lo tanto $u(x, y) = XY$ es una solución de (3) si

$$Y'' + \lambda Y = 0; \qquad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \tag{5}$$

y

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0. \tag{6}$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (5) tiene una solución no trivial $Y(y)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, y en tal caso,

$$Y(y) = Y_n(y) = \operatorname{sen} n\pi y/b.$$

La ecuación (6) implica, a su vez, que $X_n(x)$ es proporcional a $\operatorname{senh} n\pi x/b$. (La ecuación diferencial $X'' - (n^2\pi^2/b^2)X = 0$ implica que $X(x) = c_1 \cosh n\pi x/b + c_2 \operatorname{senh} n\pi x/b$ para alguna elección de constantes c_1, c_2, pero la condición inicial $X(0) = 0$ implica $c_1 = 0$.) Se concluye, por tanto, que

$$u_n(x,y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

es una solución de (3) para todo entero positivo n.

Segundo paso: La función

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

es (formalmente) una solución de (3) para cualquier elección de constantes $c_1, c_2, \ldots$. Su valor en $x = a$ es

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

Por lo tanto, se debe elegir las constantes c_n, de modo que

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad 0 < y < b.$$

Dicho de otro modo, hay que desarrollar f en una serie de Fourier de senos en el intervalo $0 < y < b$. Esa es precisamente la situación que se describe en el Teorema

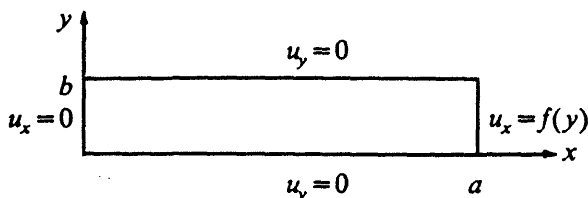
3 de la Sección 5.5, y se concluye, por lo tanto, que

$$c_n = \frac{2}{b\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}dy, \qquad n=1,2,\ldots.$$

OBSERVACIÓN. Siempre se puede usar el método de separación de variables con objeto de resolver el problema de Dirichlet para un rectángulo R si u es igual a cero en tres de sus lados. Es posible resolver un problema de Dirichlet arbitrario para un rectángulo R dividiéndolo en cuatro problemas donde u es igual a cero en tres lados de R (Ejercicios del 1 al 4).

EJEMPLO 2 Hallar una función $u(x, y)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ y que satisfaga también las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned} &u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,b)=0 \\ &u_x(0,y)=0, \quad u_x(a,y)=f(y) \end{aligned} \tag{7}$$



SOLUCIÓN. El problema se resolverá en dos pasos. Primero, se encontrarán funciones $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ que satisfacen el problema de valores a la frontera

$$u_{xx}+u_{yy}=0; \qquad u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,b)=0, \quad \text{y} \quad u_x(0,y)=0. \tag{8}$$

Después, se hallarán constantes c_n tales que la combinación lineal $u(x, y) = c_n u_n(x, y)$ satisface la condición a la frontera $u_x(a, y) = f(y)$.

Primer paso: Hágase $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Entonces, al igual que en el Ejemplo 1, se tiene

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

para alguna constante λ. Las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned} &0=u_y(x,0)=X(x)Y'(0), \quad 0=u_y(x,b)=X(x)Y'(b), \\ &0=u_x(0,y)=X'(0)Y(y) \end{aligned}$$

implican que

$$Y'(0)=0, \quad Y'(b)=0 \quad \text{y} \quad X'(0)=0.$$

Por lo tanto, $u(x, y) = X(x)Y(y)$ es una solución de (8) si

$$Y''+\lambda Y=0; \qquad Y'(0)=0, \quad Y'(b)=0 \tag{9}$$

y

$$X'' - \lambda X = 0; \qquad X'(0) = 0. \tag{10}$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (9) tiene una solución no trivial $Y(y)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y en tal caso,

$$Y(y) = Y_n(y) = \cos n\pi y/b.$$

La ecuación (10) implica, a su vez, que $X(x)$ es proporcional a $\cosh n\pi x/b$. (La ecuación diferencial $X'' - n^2\pi^2 X/b^2 = 0$ implica que $X(x) = c_1 \cosh n\pi x/b + c_2 \operatorname{senh} n\pi x/b$ para alguna elección de constantes c_1 y c_2 y la condición de frontera $X'(0) = 0$ implica que c_2 es igual a cero.) Se concluye, por lo tanto, que

$$u_n(x,y) = \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

es una solución de (8) para todo entero no negativo n.

Segundo paso: La función

$$u(x,y) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

es (formalmente) una solución de (8) para toda elección de constantes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. El valor de u_x en $x = a$ es

$$u_x(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Por lo tanto, se deben elegir las constantes $c_1, c_2, \ldots$ de modo que

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}, \qquad 0 < y < b. \tag{11}$$

Ahora bien, el Teorema 3 de la Sección 5.5 establece que se puede desarrollar $f(y)$ en serie de cosenos

$$f(y) = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy + \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy\right]\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

en el intervalo $0 \le y \le b$. Sin embargo, no es posible igualar los coeficientes en (11) y (12), ya que la serie (11) no tiene término constante. Por lo tanto, la condición

$$\int_0^b f(y)\,dy = 0$$

es necesaria para que el problema de Neumann tenga una solución. Si es ese el caso, se tiene entonces

$$c_n = \frac{2}{n\pi \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi y}{b}\,dy, \qquad n \geq 1.$$

Nótese por último que c_0 permanece sin restricción, por lo cual la solución $u(x, y)$ está determinada solamente salvo en el caso de una constante aditiva. Esta es una propiedad de todos los problemas de Neumann.

EJERCICIOS

Resuelva cada uno de los siguientes problemas de Dirichlet.

1. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=0, & u(x,b)=0 \\ u(a,y)=0, & u(0,y)=f(y) \end{array}$

2. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(0,y)=0, & u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0, & u(x,b)=f(x) \end{array}$

OBSERVACIÓN. Este problema se puede resolver por el camino largo, es decir, por medio de separación de variables, o bien intentando algo más inteligente como intercambiar x y y, y usar el resultado del Ejemplo 1 del texto.

3. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(0,y)=0, & u(a,y)=0 \\ u(x,b)=0, & u(x,0)=f(x) \end{array}$

4. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=f(x), & u(x,b)=g(x) \\ u(0,y)=h(y), & u(a,y)=k(y) \end{array}$

Sugerencia: Escríbase $u(x, y)$ como la suma de 4 funciones, cada una de las cuales es igual a cero en tres lados del rectángulo.

5. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=0, & u(x,b)=1 \\ u(0,y)=0, & u(a,y)=1 \end{array}$

6. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,b)=0, & u(x,0)=1 \\ u(0,y)=0, & u(a,y)=1 \end{array}$

7. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=1, & u(x,b)=1 \\ u(0,y)=0, & u(a,y)=1 \end{array}$

8. $\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<a, \quad 0<y<b \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=1, & u(x,b)=1 \\ u(0,y)=1, & u(a,y)=1 \end{array}$

OBSERVACIÓN. ¡Reflexione antes!

9. Resuelva el problema de valores a la frontera

$$\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=u \\ 0<x<1, \quad 0<y<1 \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u(x,0)=0, & u(x,1)=0 \\ u(0,y)=0, & u(1,y)=y \end{array}$$

10. (a) ¿Para qué funciones $f(y)$ es posible encontrar una solución $u(x, y)$ del siguiente problema de Neumann.

$$\begin{array}{l} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ 0<x<1, \quad 0<y<1 \end{array}; \quad \begin{array}{ll} u_x(1,y)=0, & u_x(0,y)=f(y) \\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,1)=0 \end{array}$$

(b) Resuelva el problema si $f(y) = \operatorname{sen} 2\pi y$.

11. La ecuación de Laplace en tres dimensiones es

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Suponiendo que $u = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenga tres ecuaciones diferenciales ordinarias que se satisfagan con X, Y y Z.

Apéndice A

Observaciones acerca de las funciones de varias variables

1. Una función $f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$, tal que

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - x_0| + |y - y_0| < \delta(\varepsilon).$$

2. La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x es la derivada ordinaria de f con respecto a x, suponiendo que y es constante. Dicho de otro modo

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

3. (a) Se dice que una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable si

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + e$$

donde $e/[|\Delta x_1| + \ldots + |\Delta x_n|]$ tiende a cero, cuando $|\Delta x_1| + \ldots + |\Delta x_n|$ tiende también a cero. (b) Una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en una región R si $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ son continuas en R.

4. Sean $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ y $x_j = g_j(y_1, \ldots, y_m)$, $j = 1, \ldots, n$. Si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}.$$

Esta es la *regla de la cadena* para la derivación (o diferenciación) parcial.

5. Si las derivadas parciales de orden 2 de f son continuas en una región R, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}; \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

6. El término general del desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ es

$$\frac{1}{j_1! \ldots j_n!} \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n} f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} (x_1 - x_1^0)^{j_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n}.$$

Apéndice B

SUCESIONES Y SERIES

1. Se dice que una *sucesión** de términos numéricos a_n, $n = 1, 2, \ldots$ converge al límite a si los términos a_n se acercan cada vez más a a, cuando n tiende a infinito. Dicho de otra manera, la sucesión (a_n) converge a a si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{if } n \geqslant N(\varepsilon).$$

TEOREMA 1. *Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$, entonces $a_n \pm b_n \to a \pm b$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ un dato. Elíjase $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ tales que

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geqslant N_1(\varepsilon), \qquad \text{y} \qquad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geqslant N_2(\varepsilon).$$

Sea $N(\varepsilon) = \text{máx}\,\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Entonces, para $n \geq N(\varepsilon)$, se cumple

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

TEOREMA 2. *Supóngase que $a_{n+1} \geq a_n$, y que existe un número K tal que $|a_n| \leq K$ para toda n. Entonces la sucesión (a_n) tiene un límite.*

DEMOSTRACIÓN. Es la misma que la demostración del Lema 1 de la Sección 4.8.

4. Se dice que la serie infinita $a_1 + a_2 + \ldots = \sum a_n$ converge si la sucesión de sumas parciales

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

tiene un límite.

5. La suma y la diferencia de dos series convergentes es también convergente. Este hecho es una consecuencia inmediata del Teorema 1.

6.

TEOREMA 3. *Sea $a_n \geq 0$. La serie $\sum a_n$ converge si hay un número K tal que $a_1 + \ldots + a_n \leq K$ para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. La sucesión de sumas parciales $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ satisface $s_{n+1} \geq s_n$. Dado que $s_n \leq K$, se concluye del Teorema 2 que $\sum a_n$ converge.

7.

TEOREMA 4. *La serie $\sum a_n$ converge si existe un número K tal que $|a_1| + \ldots + |a_n| \leq K$ para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3, $\sum |a_n|$ converge. Sea $b_n = a_n + |a_n|$. Claramente, $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. Así que, $\sum b_n$ también converge. Esto implica de inmediato que también la serie,

$$\sum a_n = \sum [b_n - |a_n|]$$

converge.

8.

TEOREMA 5. (Criterio de Cauchy de la razón.) *Supóngase que la sucesión $|a_{n+1}/a_n|$ tiene un límite λ. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si $\lambda < 1$, y diverge si $\lambda > 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\lambda < 1$ Entonces existe $\rho < 1$, y un índice N, tal que $|a_{n+1}| \leq \rho |a_n|$ para $n \geq N$. Esto implica que $|a_{N+p}| \leq \rho^p |a_N|$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=N}^{N+K} |a_n| < (1 + \rho + \ldots + \rho^K)|a_N| < \frac{|a_N|}{1-\rho},$$

y a_n converge.

* (N. del R.) El término sucesión corresponde también a *progresión*, aunque este último suele usarse únicamente para designar las sucesiones llamadas *aritmética* y *geométrica*.

Si $\lambda > 1$, entonces $|a_{N+p}| \geq \rho^p |a_N|$, con $\rho > 1$. Así pues, $|a_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Pero $|a_n|$ debe tender a cero si $\sum a_n$ converge a s, ya que

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| < |s_{n+1} - s| + |s_n - s|$$

y estas dos cantidades tienden a cero cuando n tiende a infinito. Así pues, $\sum a_n$ diverge.

Apéndice C



INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE APL

Este apéndice es una breve introducción al lenguaje de programación APL y contiene toda la información requerida para resolver los problemas numéricos del texto.

En APL el programador se comunica con la computadora por medio de una terminal. Las instrucciones se ingresan mediante un teclado (máquina de escribir eléctrica) y son transmitidas (usualmente a través de líneas telefónicas) hasta la computadora. De manera similar, la computadora contesta controlando la máquina de escribir para hacerla presentar su respuesta. En la Figura 1 se muestra un croquis del teclado para APL. Para ingresar el símbolo superior de una tecla cualquiera, como el símbolo ∇ situado sobre la *G*, púlsese la tecla deseada al mismo tiempo que la tecla "shift".

La mayoría de los lenguajes de programación son muy fáciles de aprender. Ello se debe a que una computadora es de naturaleza esencialmente muy simple. Las únicas operaciones matemáticas que puede realizar una computadora son adición, sustracción, multiplicación y división. El poder real de una computadora reside en su aptitud de realizar millones de operaciones en cuestión de segundos.

Los procedimientos para inicializar y terminar la sesión de trabajo con la computadora son muy simples, pero usualmente difieren de una instalación a otra. Es por ello que aquí se omitirán tales instrucciones. Se empezará con las instrucciones para la adición, sustracción, multiplicación y división.

(1) *Adición.* Para sumar los números 3 y 4 se teclea **3 + 4** y se presiona luego la tecla "return". Al oprimir esta tecla se indica a la computadora que la instrucción está completa. Mientras la computadora realiza las instrucciones se queda en bloqueo el tecla-

do. En una fracción de segundo (a no ser que mucho personal esté utilizando la computadora al mismo tiempo) la máquina escribirá **7**.

(2) *Sustracción*. Para restar el número 4 del número 3 se teclea **3 − 4**. La computadora responderá con **¯1**.

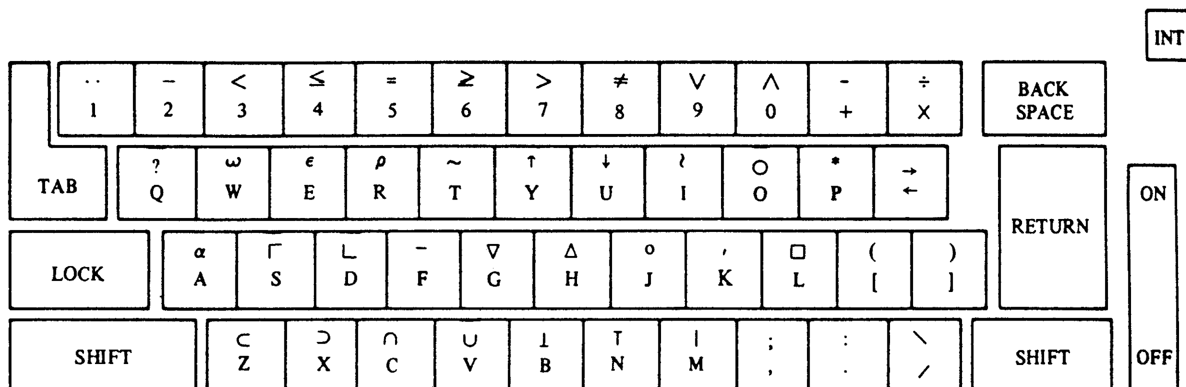


FIGURA 1. Teclado para APL

OBSERVACIÓN. El signo "menos" que denota la operación de restar es el signo "menos" que se encuentra arriba del signo "más" en el teclado de APL. El signo "menos" que escribe la computadora es el signo "menos" que se halla arriba del 2. Dicho signo denota números negativos. Por ejemplo, la instrucción **¯2 + 1** hace que la computadora sume los números **−2** y **1**.

(3) *Multiplicación*. Para multiplicar los números 12 y 6, se teclea **12 × 6**. La computadora responderá con 72.

(4) *División*. Para dividir el número 6 entre el 12, se teclea **6 ÷ 12**. La computadora responderá con **0.5**.

OBSERVACIÓN. También se puede emplear el símbolo ÷ para determinar el recíproco de un número. Para hallar el recíproco de 6 se teclea **÷ 6**. Supongamos que se teclea la instrucción **3 + ÷ 6**. La computadora analiza la posición inmediatamente a la izquierda del signo de división (÷). Dado que la computadora no encuentra un número en dicha posición (es decir, halla el +, que indica una operación) toma entonces el recíproco de 6 y lo suma al 3. De modo que el resultado de la instrucción es 3.16666667.

Exponenciación (o *potenciación*). La computadora puede, mediante una sencilla instrucción, potenciar o elevar un número a cualquier exponente. Para encontrar el valor de $(3.14)^{1/4}$ se teclea **3.14 * 0.25** (O BIEN **3.14 * ÷ 4**).

OBSERVACIÓN. La operación de exponenciar no es una de las cuatro operaciones matemáticas que puede realizar la computadora. Sin embargo, hay métodos numéricos muy elegantes y eficientes para calcular la potencia de un número dado, los cuales necesitan solamente de las cuatro operaciones básicas (Secciones 1.11 y 1.11.1). En la computadora se halla un archivo con la totalidad de las instrucciones de uno de tales méto-

dos. Al dar la instrucción para exponenciar, la computadora corre dicho paquete de instrucciones previamente almacenado.

Notación exponencial de los números. A la computadora se le puede dar un número en cualquiera de dos formas. La primera es la forma decimal ordinaria, o sea, 3.14. Otra manera de hacerlo, que se usa con frecuencia para números que son muy grandes, o bien muy pequeños, es la forma en notación exponencial. Aquí se factoriza con una potencia de 10 un número dado. Por ejemplo, el número de Avogadro (el número de moléculas en un mol de cualquier sustancia) es 6.02×10^{23}. A la computadora se le puede dar dicho número en la forma $6.02E23$. En forma más general, denótense por a y n dos números fijos, siendo n un entero. La instrucción aEn significa lo siguiente: multiplicar a por 10^n. Por ejemplo,

$$3.2E^{-5} = 3.2 \times 10^{-5} = 0.000032$$

y

$$-1.732E2 = -1.732 \times 10^2 = -173.2.$$

La computadora hará imprimir los resultados de los cálculos en cualquiera de las dos formas, decimal o exponencial. (El autor todavía tiene que reflexionar acerca de cuál de las dos formas usará la computadora para un número dado.)

Expresiones compuestas. En APL es posible incluir varias operaciones en la misma instrucción. Por ejemplo, puede indicarse a la computadora que multiplique los números 3 y 4, que divida 6 entre 2, y sume los dos resultados. En aritmética usual, dicha expresión se escribiría como $3 \times 4 + 6 \div 2$ (= 15). Sin embargo, es necesario recordar siempre que la computadora es "judía": lee de derecha a izquierda. De modo que cuando la computadora recibe la instrucción

$$3 \times 4 + 6 \div 2$$

divide primero 6 entre 2 y obtiene 3. Después suma 4 y 3 para obtener 7. Por último, multiplica 7 por 3 para tener como resultado 21. La mejor manera de garatizar que la computadora haga los cálculos correctos es usar paréntesis. Así pues, la manera correcta de escribir la instrucción anterior es **(3 × 4) + 6 ÷ 2**. Esta instrucción indica a la computadora que realice lo siguiente (i) dividir 6 entre 2; (ii) multiplicar 3 por 4; y, por último, (iii) sumar ambos resultados. Ahora otro ejemplo, supóngase que se desea que la computadora evalúe la expresión

$$\frac{2}{1+(3.2)^2+6^{1/3}}. \tag{1}$$

Tal cosa se logra tecleando la instrucción

2 ÷ 1 + (3.2 * 2) + 6 * ÷ 3

Al recibir tal instrucción la computadora (i) extrae la raíz cúbica de 6; (ii) eleva el número 3.2 al cuadrado, y lo suma a $6^{1/3}$; (iii) suma 1 a dicho resultado; y, por último, divide entre 2 el número resultante.

Identificadores. Hay muchos casos en los que se desea que la computadora almacene un número dado, o bien el resultado de algún cálculo. Por ejemplo, podría ocurrir que

el resultado de un cálculo se necesitara más tarde. Sin embargo, la computadora no almacena nada a menos que se la indique específicamente. En APL (y también en otros lenguajes de programación) se logra que la computadora guarde un número dado mediante la ingeniosa idea de asignarle un nombre, o *identificador*. Dicho nombre debe empezar con una letra del alfabeto y contener solamente letras y números. Por ejemplo, es posible almacenar el resultado del cálculo $(3.2)^2 + 6^{1/3}$ tecleando la instrucción **R ← (3.2 * 2) + 6 * ÷ 3**. Esta instrucción tiene como consecuencia que la computadora almacene el resultado del cálculo en la ubicación o dirección R. Dicho de otro modo, la dirección R es la manera como la computadora identifica dónde almacenó el número. Nótese también que ahora la expresión compuesta (1) puede ser calculada mediante la instrucción sencilla **Z ← 2 ÷ 1 + R**. Al recibir esta instrucción, la computadora busca en la dirección R y ve qué número está almacenado en ella. Después, suma uno a dicho número; divide entre 2 el número resultante, y almacena este último en la ubicación Z. Si se desea conocer el resultado del cálculo, se teclea **Z**. Esta instrucción indica a la computadora que imprima el número que está almacenado en la dirección Z.

OBSERVACIÓN 1. Es importante entender lo que ocurre exactamente cuando se asigna un identificador a un número. La instrucción **R ← R + 1** es perfectamente razonable en APL, en tanto que la ecuación $R = R + 1$ matemáticamente no tiene sentido. La instrucción **R ← R + 1** indica a la computadora que sume uno al número almacenado en la dirección R y guarde la suma en la misma ubicación. (Por supuesto que en este proceso se borra el número originalmente almacenado en R.) Si A es un identificador, y se emplea la frase "A es igual a cuatro", entonces lo que realmente se quiere decir es que el número almacenado en la dirección A es cuatro.

OBSERVACIÓN 2. Si se teclea la instrucción **Z ← A + 3** sin haber definido A (es decir, sin haber almacenado nada en la dirección A) entonces la computadora responderá con el mensaje de error **VALUE ERROR** (error en un valor) y escribirá un signo (∧) bajo la A.

OBSERVACIÓN 3. Si se teclea la instrucción **1 ÷ 3 − A** y A es 3, entonces la computadora responderá con el mensaje de error **DOMAIN ERROR** (error en un dominio). También se obtendrá el mismo mensaje de error si se teclea **RAD ← B * 0.5**, y B es negativo.

Funciones que ya están almacenadas en la computadora. En las aplicaciones aparecen con tanta frecuencia las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$, etc., que las instrucciones para calcularlas (es decir, las instrucciones para reducir su evaluación a adiciones, multiplicaciones, sustracciones y divisiones) ya están almacenadas en la computadora.

1. Las instrucciones para calcular $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\tan x$ son **1○X**, **2○X** y **3○X**, respectivamente. El símbolo de círculo que precede a la letra X es el que se encuentra arriba de la letra O en el teclado de APL.

2. Las instrucciones para calcular $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$ y $\operatorname{arc\,tan} x$ son **¯1○X**, **¯2○X** y **¯3○X**, respectivamente.

3. La instrucción **○X** indica a la computadora que multiplique el número X por π. Así pues, la instrucción **A ← 2○○X * 2** hace que la computadora evalúe $\cos \pi x^2$ y almacene el resultado bajo el nombre A.

4. La instrucción para calcular e^x es **∗X**. Así pues, la instrucción **1○∗X** indica a la computadora que evalúe sen e^x.

5. La instrucción para calcular ln x es **⍟ X**. El símbolo que precede a **X** es un símbolo compuesto. Hay dos maneras de teclearlo: una es pulsando primero ○, luego "backspace" (espacio) y, por último, ∗; la otra es teclear primero ∗, luego "backspace" y, por último, ○.

6. La instrucción **|X** indica a la computadora que tome el valor absoluto del número x.

7. La instrucción **!N** indica a la computadora que calcule factorial N, o sea $N!$. El símbolo ! se forma remarcando la comilla (o apóstrofo) y el punto.

8. La función signo, sgn x, en matemáticas tiene el valor 1 si x es positiva, −1 si x es negativa, y bien 0 si x es nula. APL usa el signo de multiplicación para denotar esta función. Así pues, si se teclea la instrucción **× 127.6**, la computadora responderá con **1**; y si se teclea la instrucción **×¯332.9**, la computadora responderá con **¯1**.

Corrección de errores de tecleo. Si se descubre un error de tecleo antes de enviar una instrucción (es decir, antes de pulsar la tecla "enter") entonces es posible regresar al primer símbolo incorrecto con al tecla "backspace" y presionar luego la tecla ATTN o bien la INT. (Todo teclado de APL tiene una tecla ATTN, o bien una INT.) La respuesta de la computadora será una marca de "paloma" (√) abajo del carácter para indicar que éste y los que están a su derecha fueron borrados. Después se completa la instrucción como debía haber sido tecleada.

Vectores. Una de las características más útiles del APL es la forma tan elegante de manejar los vectores expresados como sucesiones de números. La sucesión 1, 3, 9, 16 se puede almacenar en una sola dirección como un vector con cuatro componentes mediante la instrucción **A ← 1 3 9 16**. Esta instrucción indica a la computadora que almacene los números 1, 3, 9 y 16 en la dirección A. El número 1 se identifica por $A[1]$; l 3, por $A[2]$; el 9, por $A[3]$, y el 16, por $A[4]$. Si se teclea la instrucción **A[3]**, entonces la computadora responderá con **9**.

Supóngase ahora que A y B son dos vectores de la misma magnitud. La instrucción **C ← A + B** indica a la computadora que sume los términos correspondientes de A y B, y que almacene el vector resultante en la dirección C. La instrucción **+/A** indica a la computadora que sume todos los elementos de A. Así pues, si se desea sumar los números 3.2, 7, 16, 32.4, 1.8, se podría dar la instrucción **A ← 3.2 7 16 32.4 1.8** seguida de **+/A**.

ADVERTENCIA. Si la computadora ignora que A es un vector (es decir, si alguien olvidó indicárselo) y se teclea la instrucción **A[3]**, entonces la computadora responderá con un mensaje de error, ya que $A[3]$ no es un identificador válido.

En algunos casos se desea definir un vector de magnitud N en el cual cada elemento está definido recurrentemente. De modo que $A[2]$ se calcula en términos de $A[1]$, luego $A[3]$ se calcula en términos de $A[2]$, y así sucesivamente. Sin embargo, si se teclea **A[1]** o **A[2]**, la computadora responderá con un mensaje de error, ya que aún no sabe que $A[1], \ldots, A[N]$ son las componentes de un vector A de magnitud N. Este problema se resuelve tecleando primero la instrucción **A ← Nρ0**. Tal instrucción tiene el efecto de almacenar el vector 0 0. . .0 (N veces) en la dirección A. Entonces se puede definir $A[1]$, con lo cual el nuevo valor remplazará al valor de 0 como primer elemento de A.

Así que es posible evaluar $A[2], A[3], \ldots, A[N]$ recurrentemente. Por ejemplo, la sucesión de instrucciones

```
A←4ρ0
A[1]←1.5
A[2]←A[1]*1.6
A[3]←A[2]*1.7
A[4]←A[3]*1.8
```

hacen que la computadora almacene el vector

$$1.5, 1.5^{1.6}, 1.5^{1.6^{1.7}}, 1.5^{1.6^{1.7^{1.8}}}$$

en la dirección A.

En este contexto, la instrucción **A ←,X** también es muy útil. Dicha instrucción hace que el número X sea identificado como un vector con solo una componente. De manera similar, sean A y B dos vectores de magnitudes l y m, respectivamente. La instrucción **C ← A,B** indica a la computadora que forme el vector C de dimensión $l + m$ cuyas primeras l componentes son los elementos de A, y cuyos restantes m componentes son los elementos de B.

Expresiones lógicas. Una computadora digital también puede comparar dos números para ver cuál de ellos es mayor. Para saber si x es mayor que o igual a y se teclea **X ≥ y**. Si x es mayor que o igual a y, es decir, si la expresión **X ≥ Y** es verdadera, entonces la computadora responderá con 1. Si x es menor que y, es decir, si la expresión **X ≥ Y** es falsa, entonces la computadora responderá con 0. Una de las características poderosas del APL es que es posible incluir expresiones lógicas **X ≥ Y, X < Y, X ≤ Y, X = Y** y **X ≠ Y** en cualquier instrucción en APL. Por ejemplo, supóngase que $B = 3$ y $C = 5$, y se teclea la instrucción **1 + *B ≥ C**. La computadora responderá con 2, ya que el valor de $B \geq C$ es 0 y $e^0 = 1$.

Caracteres. La computadora puede imprimir y almacenar mensajes. Una manera de lograr esto es poner entre comillas el mensaje que hay que imprimir, y asignarlo a un identificador. Por ejemplo, la sucesión de instrucciones

```
A←'MARTIN BRAUN IS A GREAT GUY.'
A
```

hace que la computadora imprima el mensaje

MARTIN BRAUN ES UN GRAN TIPO.

Supóngase ahora que tanto T como Y son vectores de magnitud N que están almacenados en la computadora. Para efectos de comparación podría desearse imprimir los vectores T y Y en columnas adyacentes. Esto se logra tecleando la instrucción **⌽(2, ρY)ρT, Y**. El símbolo ⌽ se obtiene superponiendo los símbolos ○ y \.

OBSERVACIÓN. Si se teclea la instrucción **T** seguida de la instrucción **Y**, entonces la computadora imprimirá horizontalmente todos los componentes de T y Y. En caso necesario, utilizará más de un renglón. No es necesario mencionar que será prácticamente imposible hacer coincidir las componentes de T con las componentes de Y si N es muy grande.

Programas en APL. En muchos casos se desea que la computadora siga una sucesión de instrucciones para un valor dado de un parámetro y que después repita la misma sucesión de instrucciones para muchos otros valores del parámetro. Por ejemplo, se podría tener que resolver el problema de valor inicial $dy/dt = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ para muchos valores distintos de y_0. No es necesario mencionar que no es deseable estar dando las mismas instrucciones una y otra vez cuando se cambia el valor del parámetro. En vez de eso, es conveniente almacenar las instrucciones de modo permanente en la computadora. Así, cada vez que se cambiara el valor del parámetro, simplemente se le informaría el cambio a la computadora y se le indicaría seguir el conjunto de instrucciones que se dio. Tal cosa se logra definiendo un programa.

DEFINICIÓN. Un *programa* es una sucesión de instrucciones dadas a la computadora y almacenadas en ella para ser ejecutadas como un todo.

I. *Definición de un programa.*

1. Se *inicia* la definición del programa tecleando el símbolo ∇ seguido de una palabra, la cual será el nombre del programa. Las reglas que rigen los nombres de los programas son las mismas que las de los identificadores. Por ejemplo, el programa Euler se inicia tecleando ∇ **EULER**.
2. La computadora responde con [1] y espera a que sea tecleada la primera instrucción. Después de cada instrucción ingresada, la computadora responde con el número de la siguiente instrucción y espera a que sea tecleada.
3. Se *termina* la definición de un programa ingresando el símbolo ∇ inmediatamente después de teclear la última instrucción.

II. *Ejecución de un programa.*

1. Teclear el nombre de un programa tiene como efecto que la computadora ejecute las instrucciones del programa en una secuencia que se inicia con [1].
2. Es posible interrumpir en cualquier momento la ejecución de un programa pulsando la tecla INT (o bien la ATTN).

III. *Bifurcación en un programa.*

1. Salvo una excepción, todos los enunciados de un programa son instrucciones de especificación. Es decir, son instrucciones que realizan operaciones matemáticas, asignan identificadores a números, o bien imprimen datos. La única excepción es la instrucción de bifurcación **→N**, donde N es un entero o una expresión en APL que tiene un valor entero. Dicha instrucción ordena a la computadora continuar con la instrucción N. Por ejemplo, la instrucción **[15]→4** indica a la computadora que continúe con la instrucción 4 una vez que haya alcanzado la instrucción 15.
2. Es una convención que la ejecución de un programa termine si $N = 0$.

3. En muchos casos se desea que la computadora realice rápidamente una cierta operación, un número especificado de veces. La manera de controlar cuántas veces ha de ejecutarse la operación es mediante un *contador*, es decir, un identificador que se incrementa en uno cada vez que se realiza la operación. Esta técnica se conoce como *ciclización* ("looping"). Por ejemplo, denótese al contador por I y sea N el número total de veces que se desea realizar la operación dada. Supóngase además que las instrucciones para ejecutar dicha operación están especificadas en las instrucciones [6] a [8]. Entonces la novena instrucción sería **[9] I←I + 1**, y la décima instrucción sería

[10] →6×N>I

Si $N \geq I$, entonces $6 \times N \geq I$ da como resultado 6, y se lleva a cabo una bifurcación en la instrucción [6]. Si $N < I$, entonces $6 \times N \geq I$ da como resultado 0, y el programa termina. Otra opción para la instrucción décima podría ser **[10]→6 × ιN** $\geq I$. Este enunciado tiene como efecto que la computadora bifurque la instrucción [6] si $N \geq I$, o bien la siguiente instrucción (en este caso la [11]) si $N < I$. Supóngase por ejemplo que se desea evaluar a_{1000}, donde a_{1000} está definida recurrentemente a través de las ecuaciones

$$a_{n+1} = a_n - \tfrac{1}{2}a_n^2, \qquad a_1 = \tfrac{1}{2}.$$

Lo anterior se puede lograr definiendo el siguiente programa.

```
    ∇ EVALUAR
[1] A←1000ρ0
[2] A[1]←0.5
[3] I←1
[4] A[I+1]←A[I]−0.5×A[I]*2
[5] I←I+1
[6] →4×ιI<999
[7] A[1000]  ∇
```

Al teclear el nombre del programa **EVALUAR** se hace que la computadora ejecute la sucesión de instrucciones e imprima el valor de a_{1000}.

IV. *Edición (redacción) de un programa*

1. La instrucción ∇ **EULER** [⎕] ∇ indica a la computadora que imprima el programa Euler. Es una práctica recomendable de programación teclear esta instrucción inmediatamente después de terminar la definición de un programa.

2. Para cambiar la instrucción N en un programa llamado Euler después de haber terminado su definición, es necesario ingresar ∇ **EULER [N]** seguido de la instrucción corregida y de ∇.

OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE. Es posible que la ejecución de un programa se detenga antes de haber sido completada y sin un mensaje de error. (Un caso frecuente de tal situación es cuando aparece un identificador no definido.) Si tal cosa ocurre, se teclea de inmediato una flecha hacia la derecha →. De otro modo, la computadora seguirá tratando de ejecutar el programa y no será posible corregirlo.

EJEMPLO 1 Se desea evaluar la expresión $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ para muchos valores de x. Esto se puede efectuar de la siguiente manera. Elíjase n, un número entero grande, y hágase $h = x/n$. Entonces la suma de Riemann

$$h\sum_{j=0}^{n-1} e^{t_j^2} = h\sum_{j=0}^{n-1} e^{(jh)^2}$$

es una buena aproximación de la integral $\int_0^x e^{t^2}dt$, para h pequeña. El siguiente programa evalúa esta suma de Riemann

```
    ∇ INTEGRAL
[1] H←X+N
[2] SUM←0
[3] J←0
[4] SUM←SUM+*(J×H)*2
[5] J←J+1
[6] →4×ιJ<N−1
[7] SUM←H×SUM   ∇.
```

EJEMPLO 2 Un matemático famoso que asistía a una reunión de verano de la American Mathematical Society fue arrollado por un conductor descuidado que se dio a la fuga. Al llegar la policía al lugar de los hechos, yacía él agonizante en la calle. Cuando le preguntaron si se había fijado en el número de matrícula del vehículo, el matemático contestó que "no", pero expresó que "la matrícula contiene 3 números de dos dígitos, los cuales a su vez corresponden las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo". La policía rápidamente investigó todas las matrículas del estado compuestas por 3 números de dos dígitos. Introdujeron toda la información en una computadora bajo la variable de nombre A. Utilizó luego el siguiente programa para detectar a todos los posibles sospechosos.

```
    ∇ PRÓFUGO
[1] S1←(A[1]*2)−(A[2]*2)+A[3]*2
[2] S2←(A[2]*2)−(A[1]*2)+A[3]*2
[3] S3←(A[3]*2)−(A[1]*2)+A[2]*2
[4] →5×(S1×S2×S3)=0
[5] 'ESTE ES UN POSIBLE SOSPECHOSO.'   ∇
```

Respuestas a los ejercicios de número impar

Capítulo 1

Sección 1.2

1. $y(t)=ce^{-\operatorname{sen} t}$ **3.** $y(t)=\dfrac{t+c}{1+t^2}$ **5.** $y(t)=\exp(-\tfrac{1}{3}t^3)[\int \exp(\tfrac{1}{3}t^3)\,dt+c]$

7. $y(t)=\dfrac{c+\int(1+t^2)^{1/2}(1+t^4)^{1/4}\,dt}{(1+t^2)^{1/2}(1+t^4)^{1/4}}$ **9.** $y(t)=\exp\left(-\int_0^t\sqrt{1+s^2}\,e^{-s}\,ds\right)$

11. $y(t)=\dfrac{3e^{t^2}-1}{2}$ **13.** $y(t)=e^{-t}\left[2e+\int_1^t\dfrac{e^s}{1+s^2}\,ds\right]$

15. $y(t)=\left(\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{2t^3}{3}+t+c\right)(1+t^2)^{-1/2}$ **17.** $y(t)=\begin{cases}2(1-e^{-t}), & 0<t<1\\ 2(e-1)e^{-t}, & t>1\end{cases}$

21. Cada solución tiende a un límite distinto cuando $t\to 0$.

23. Todas las soluciones tienden a cero cuando $t\to\pi/2$.

Sección 1.3

3. 127,328 **5.** (a) $N_{238}(t)=N_{238}(0)2^{-10^{-9}t/4.5}$; (b) $N_{235}(t)=N_{235}(0)2^{-10^{-9}t/.707}$

7. Aproximadamente 13 550 D.C.

Sección 1.4

1. $y(t)=\dfrac{t+c}{1-ct}$ **3.** $y(t)=\tan(t-\tfrac{1}{2}t^2+c)$ **5.** $y(t)=\operatorname{arc\,sen}(c\operatorname{sen} t)$

7. $y(t)=\left[9+2\ln\left(\dfrac{1+t^2}{5}\right)\right]^{1/2}, \quad -\infty<t<\infty$

9. $y(t)=1-[4+2t+2t^2+t^3]^{1/2}, \quad -2<t<\infty$

11. $y(t)=\dfrac{a^2kt}{1+akt}, \quad \dfrac{-1}{ak}<t<\infty$, si $a=b$

$y(t)=\dfrac{ab[1-e^{k(b-a)t}]}{a-be^{k(b-a)t}}, \quad \dfrac{1}{k(b-a)}\ln\dfrac{a}{b}<t<\infty; \quad a\neq b$

13. (b) $y(t)=-t$ y $y(t)=\dfrac{ct^2}{1-ct}$ **15.** $y(t)=\dfrac{t^2-1}{2}$

17. $y=c^2e^{-2\sqrt{t/y}}, \quad t>0; \; y=-c^2e^{2\sqrt{t/y}}, \quad t<0$ **19.** $t+ye^{t/y}=c$

21. (b) $|(b+c)(at+by)+an+bm|=ke^{(b+c)(at-cy)}$

23. $(t+2y)^2-(t+2y)=c-7t$

SECCIÓN 1.5

3. $a>0.4685$

7. (a) $\dfrac{dp}{dt}=0.003p-0.001p^2-0.002$; (b) $p(t)=\dfrac{1{,}999{,}998-999{,}998e^{-0.001t}}{999{,}999-999{,}998e^{-0.001t}}$,

$p(t)\to 2$ cuando $t\to\infty$

SECCIÓN 1.6

1. $p(t)=\dfrac{Ne^{cNt}}{N-1+e^{cNt}}$

SECCIÓN 1.7

1. $V(t)=\dfrac{W-B}{c}[1-e^{(-cg/W)t}]$

7. $V(t)=\sqrt{322}\left[\dfrac{K_0e^{(64.4)(t-5)/\sqrt{322}}+1}{K_0e^{(64.4)(t-5)/\sqrt{322}}-1}\right], \quad K_0=\dfrac{\sqrt{322}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)+1}{\sqrt{322}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)-1}$

9. (a) $\sqrt{V}-\sqrt{V_0}+\dfrac{mg}{c}\ln\dfrac{mg-c\sqrt{V}}{mg-c\sqrt{V_0}}=\dfrac{-ct}{2m}$; (b) $V_T=\dfrac{m^2g^2}{c^2}$

11. (a) $v\dfrac{dv}{dy}=\dfrac{-gR^3}{(y+R)^2}$; (b) $V_0=\sqrt{2gR}$

SECCIÓN 1.8

3. $\dfrac{2\ln 5}{\ln 2}$ años. **5.** 10^4e^{10} **7.** (a) $c(t)=1-e^{-0.001t}$; (b) $1000\ln\frac{5}{4}$ min.

9. $c(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-0.02t})+\dfrac{Q_0}{150}e^{-0.02t}$ **11.** 48% **13.** $xy=c$

15. $x^2+y^2=cy$ **17.** $y^2(\ln y^2-1)=2(c-x^2)$

SECCIÓN 1.9

3. $t^2 \operatorname{sen} y + y^3 e^t = c$ **5.** $y \tan t + \sec t + y^2 = c$ **7.** $y(t) = t^{-2/3}$

9. $y(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - (t^3 - 1)}$ **11.** $t^3 y + \frac{1}{2}(t^2 y^2) = 10$

13. $a = -2;\ y(t) = \pm\left[\dfrac{t(2t-1)}{2(1+ct)}\right]^{1/2}$ **19.** $a = 1;\ y(t) = \operatorname{arcsen}[(c-t)e^t]$

SECCIÓN 1.10

1. $y_n(t) = t^2 + \dfrac{t^4}{2!} + \dfrac{t^6}{3!} + \ldots + \dfrac{t^{2n}}{n!}$

3. $y_1(t) = e^t - 1;\quad y_2(t) = t - e^t + \dfrac{1+e^{2t}}{2}$

$$y_3(t) = -\frac{107}{48} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 2(1-t)e^t + \frac{(1+t)e^{2t}}{2} - \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{4t}}{16}$$

19. $y(t) = \operatorname{sen}\dfrac{t^2}{2}$

SECCIÓN 1.11

3. (a) $0 < x_0 < 10$ **5.** 1.48982 **7.** (c) 0.73909

Sección 1.11.1

5. 0.61547 **7.** 0.22105 **9.** 1.2237

SECCIÓN 1.12

1. $y_n = (-7)^n - \frac{1}{4}[(-7)^n - 1]$ **3.** (a) $E_n < \frac{1}{2}(3^n - 1)$; (b) $E_n < 2(2^n - 1)$

5. $y_n = a_1 \ldots a_{n-1}\left[y_1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{a_1 \ldots a_j}\right]$ **7.** $y_{25} = \dfrac{1}{25}\left[1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{24} 2^j\right]$

9. (a) $x = \$251.75$; (b) $x = \$289.50$

SECCIÓN 1.13

1. $h = 0.1,\ y_{10} = 1;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 1$

3. $h = 0.1,\ y_{10} = 1;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 1$

5. $h = 0.1,\ y_{10} = 1.80516901;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 1.94633036$

Sección 1.13.1

1. $E_k < \dfrac{3h}{2}(e^{4/5} - 1)$ **3.** $E_k < \dfrac{h(1+e+e^2)}{2e}[e^{e/(e+1)} - 1]$ **5.** $h < \dfrac{4(10^{-5})}{3(e^2-1)}$

SECCIÓN 1.14

1. $h = 0.1,\ y_{10} = 1;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 1$ **3.** $h = 0.1,\ y_{10} = 1;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 1$

5. $h = 0.1,\ y_{10} = 2;\quad h = 0.025,\ y_{40} = 2$

SECCIÓN 1.15

1. $h=0.1, y_{10}=1$; $h=0.025, y_{40}=1$ **3.** $h=0.1, y_{10}=1$; $h=0.025, y_{40}=1$

5. $h=0.1, y_{10}=1.98324929$; $h=0.025, y_{40}=1.99884368$

SECCIÓN 1.16

1. $h=0.1, y_{10}=1$; $h=0.025, y_{40}=1$ **3.** $h=0.1, y_{10}=1$; $h=0.025, y_{40}=1$

5. $h=0.1, y_{10}=1.99997769$; $h=0.025, y_{40}=1.9999999$

SECCIÓN 1.17

1. 2.4103 **3.** 0.0506 **5.** 0.4388

Capítulo 2

SECCIÓN 2.1

1. (a) $(4-3t)e^t$; (b) $3\sqrt{3}\ t\,\text{sen}\sqrt{3}\ t$; (c) $2(4-3t)e^t+12\sqrt{3}\ t\,\text{sen}\sqrt{3}\ t$;
(d) $2-3t^2$; (e) $5(2-3t^2)$; (f) 0; (g) $2-3t^2$

5. (b) $W=\dfrac{-3}{2t^{3/2}}$; (d) $y(t)=2\sqrt{t}$

7. (a) $-(b\,\text{sen}\,at\,\text{sen}\,bt+a\cos at\cos bt)$; (b) 0; (c) $(b-a)e^{(a+b)t}$; (d) e^{2at}; (e) t; (f) $-be^{2at}$

13. $W=\dfrac{1}{t}$

SECCIÓN 2.2

1. $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$ **3.** $y(t)=e^{3t/2}\left[c_1e^{\sqrt{5}\,t/2}+c_2e^{-\sqrt{5}\,t/2}\right]$

5. $y(t)=\frac{1}{5}(e^{4t}+4e^{-t})$ **7.** $y(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}e^{-t/2}\left[e^{3\sqrt{5}\,t/10}-e^{-3\sqrt{5}\,t/10}\right]$

9. $V>-3$ **11.** $y(t)=c_1t+c_2/t^5$

Sección 2.2.1

1. $y(t)=e^{-t/2}\left[c_1\cos\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}+c_2\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right]$

3. $y(t)=e^{-t}\left(c_1\cos\sqrt{2}\ t+c_2\,\text{sen}\sqrt{2}\ t\right)$

5. $y(t)=e^{-t/2}\left[\cos\dfrac{\sqrt{7}\,t}{2}-\dfrac{3}{\sqrt{7}}\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{7}\,t}{2}\right]$

9. $y(t)=e^{(t-2)/3}\left[\cos\dfrac{\sqrt{11}\,(t-2)}{3}-\dfrac{4}{\sqrt{11}}\,\text{sen}\dfrac{\sqrt{11}\,(t-2)}{3}\right]$

11. $y_1(t)=\cos\omega t$, $y_2(t)=\text{sen}\,\omega t$

15. $\sqrt{i} = \dfrac{\pm(1+i)}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{1+i} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\right]$

$\sqrt{-i} = \dfrac{\pm(1-i)}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt{i}} = \pm\left[\sqrt{\sqrt{2}-1} + i\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\right]$, $(\sqrt{i} = e^{i\pi/4})$

19. $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\left[c_1\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ln t + c_2\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right]$

Sección 2.2.2

1. $y(t)=(c_1+c_2t)e^{3t}$ **3.** $y(t)=(1+\frac{1}{3}t)e^{-t/3}$ **7.** $y(t)=2(t-\pi)e^{2(t-\pi)/3}$

11. $y(t) = (c_1 + c_2t)e^{t^2}$ **13.** $y(t) = c_1t + c_2(t^2 - 1)$ **15.** $y(t) = c_1(t+1) + c_2e^{2t}$

17. $y(t)=c_1(1+3t)+c_2e^{3t}$ **19.** $y(t)=\dfrac{c_1+c_2\ln t}{t}$

SECCIÓN 2.3

1. $y(t)=c_1+c_2e^{2t}+t^2$ **3.** $y(t)=e^{t^2}+2e^t-2e^{-t^3}$

SECCIÓN 2.4

1. $y(t)=(c_1+\ln\cos t)\cos t+(c_2+t)\operatorname{sen} t$

3. $y(t)=c_1e^{t/2}+[c_2+9t-2t^2+\frac{1}{3}t^3]e^t$

5. $y(t)=\frac{1}{13}(2\cos t-3\operatorname{sen} t)e^{-t}-e^{-t}+\frac{24}{13}e^{-t/3}$

7. $y(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{s+1}\,[e^{2(t-s)}-e^{(t-s)}]\,ds$ **9.** $y(t)=c_1t^2+\dfrac{c_2}{t}+\dfrac{t^2\ln t}{3}$

11. $y(t)=\sqrt{t}\left[c_1+c_2\ln t+\displaystyle\int_0^t f\sqrt{s}\ \cos s[\ln t-\ln s]\,ds\right]$

SECCIÓN 2.5

1. $\psi(t)=\dfrac{t^3-2t-1}{3}$ **3.** $\psi(t)=t(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}t^2)e^t$ **5.** $\psi(t)=\dfrac{t^2}{2}e^{-t}$

7. $\psi(t)=\frac{1}{16}t[\operatorname{sen}2t-2t\cos 2t]$ **9.** $\psi(t)=\frac{1}{5}+\frac{1}{17}(\cos 2t-4\operatorname{sen}2t)$

11. $\psi(t)=\dfrac{-1}{50}(\cos t+7\operatorname{sen} t)+\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{5}\right)\dfrac{te^{2t}}{5}$ **13.** $\psi(t)=t(e^{2t}-e^t)$

15. $\psi(t)=-\frac{1}{16}\cos 3t+\frac{1}{4}t\operatorname{sen} t$

17. (b) $\psi(t)=0.005+\dfrac{1}{32{,}000{,}018}(15\operatorname{sen}30t-20{,}000\cos 30t)+\frac{15}{2}\operatorname{sen}10t$

SECCIÓN 2.6

1. Amplitud $=\frac{1}{4}$, periodo $=\frac{1}{4}\pi$, frecuencia $=8$

7. $\alpha\geqslant\beta$, donde $\left[1+(1-\beta)^2\right]e^{-2\beta}=10^{-6}$

9. $y(t)=\frac{e^{-(t-\pi)}}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{(\pi+1)}{2}e^{-\pi}\right)\cos(t-\pi)+\frac{\pi}{2}e^{-\pi}\operatorname{sen}(t-\pi)\right]$

11. $\pi/2$ segundos

Sección 2.6.2

3. $Q(1)=\frac{12}{10^6}\left[1-\left(\cos 500\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} 500\sqrt{3}\right)e^{-500}\right]$

Carga a régimen permanente $=\frac{3}{250{,}000}$

7. $\omega=\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}\right)^{1/2}$

SECCIÓN 2.8

1. $y(t)=a_0e^{-t^2/2}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}$

3. $y(t)=a_0\left[1+\frac{3t^2}{2^2}+\frac{3t^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{3t^6}{2^6\cdot 3!}+\frac{3\cdot 3t^8}{2^8\cdot 4!}-\frac{3\cdot 3\cdot 5t^{10}}{2^{10}\cdot 5!}+\ldots\right]+a_1\left(t+\frac{t^3}{3}\right)$

5. $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(t-1)^{2n}$

7. $y(t)=-2[t+\frac{t^6}{5\cdot 6}+\frac{t^{11}}{5\cdot 6\cdot 10\cdot 11}+\frac{t^{16}}{5\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 15\cdot 16}+\ldots]$

9. (a) $y_1(t)=1-\frac{\lambda t^2}{2!}-\frac{\lambda(4-\lambda)t^4}{4!}-\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)t^6}{6!}+\ldots$

(b) $y_2(t)=t+(2-\lambda)\frac{t^3}{3!}+(2-\lambda)(6-\lambda)\frac{t^5}{5!}+(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)\frac{t^7}{7!}+\ldots$

11. (a) $y_1(t)=1-\alpha^2\frac{t^2}{2!}-\alpha^2(2^2-\alpha^2)\frac{t^4}{4!}$

$-\alpha^2(2^2-\alpha^2)(4^2-\alpha^2)\frac{t^6}{6!}+\ldots$

$y_2(t)=t+(1^2-\alpha^2)\frac{t^3}{3!}+(1^2-\alpha^2)(3^2-\alpha^2)\frac{t^5}{5!}+\ldots$

13. (a) $y(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\ldots$ (b) $y(\frac{1}{2})\approx 0.8592436$

15. (a) $y(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{12}t^4+\ldots$ (b) $y(\frac{1}{2})\approx 0.86087198$

17. (a) $y(t)=3+5t-4t^2+t^3-\frac{3}{8}t^4+\ldots$ (b) $y(\frac{1}{2})\approx 5.3409005$

Sección 2.8.1

1. $y(t)=c_1t+c_2/t^5$ **3.** $y(t)=c_1(t-1)+c_2(t-1)^2$ **5.** $y(t)=t(c_1+c_2\ln t)$

7. $y(t)=c_1\cos(\ln t)+c_2\operatorname{sen}(\ln t)$

9. $y(t)=\frac{t}{2\sqrt{3}}\left[t^{\sqrt{3}}-\frac{1}{t^{\sqrt{3}}}\right]$

Sección 2.8.2

1. Si **3.** Si **5.** No

7. $y(t)=\frac{c_1}{t}\left(1-t-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3\cdot 3!}-\frac{t^4}{3\cdot 5\cdot 4!}-\cdots\right)$
$+c_2 t^{1/2}\left(1+\frac{t}{5}+\frac{t^2}{5\cdot 7\cdot 2!}+\frac{t^3}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 3!}+\cdots\right)$

9. $y(t)=c_1\left(1+2t+\frac{t^2}{3}\right)+c_2 t^{1/2}\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{t^3}{2^3\cdot 3!\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right)$

11. $y(t)=c_1\left(1+\frac{3t}{1\cdot 3}+\frac{3^2t^2}{3\cdot 7\cdot 2!}+\frac{3^3t^3}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 3!}+\cdots\right)$
$+c_2 t^{1/4}\left(1+\frac{3t}{5}+\frac{3^2t^2}{5\cdot 9\cdot 2!}+\frac{3^3t^3}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 3!}+\cdots\right)$

13. $y_1(t)=t^{5/2}\left(1+\frac{t^2}{2\cdot 5}+\frac{t^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right)$
$y_2(t)=t^{-1/2}\left(1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{2\cdot 4}-\frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\cdots\right)$

15. $y_1(t)=e^{t^2}/2,\ y_2(t)=t^3+\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{5\cdot 7}+\frac{t^9}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots$

17. $y_1(t)=\frac{1}{t}-1,\ y_2(t)=\frac{1}{t}[e^{-t}-(1-t)]$

19. (e) $y_2(t)=t^3e^{-t}\int\frac{e^t}{t^3}\,dt$

21. (b) $y_1(t)=t\left(2-3t+\frac{4t^2}{2!}-\frac{5t^3}{3!}+\frac{6t^4}{4!}\cdots\right)$

(c) $y_2(t)=y_1(t)\int\frac{e^{-t}}{y_1^2(t)}\,dt$

23. (c) $y_2(t)=J_0(t)\int\frac{dt}{tJ_0^2(t)}$

25. (b) $y(t)=1-\frac{\lambda t}{(1!)^2}-\lambda\frac{(1-\lambda)t^2}{(1!)^2(2!)^2}+\cdots$
$+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}t^n+\cdots$

27. (b) $y_1(t)=1+2t+t^2+\frac{4t^3}{15}+\frac{t^4}{14}+\cdots$
$y_2(t)=t^{1/2}\left[1+\frac{5t}{6}+\frac{17t^2}{60}+\frac{89t^3}{(60)(21)}+\frac{941t^4}{(36)(21)(60)}+\cdots\right]$

Sección 2.8.3

1. $y_1(t)=1+4t+4t^2+\cdots$
$y_2(t)=y_1(t)\ln t-\left[8t+12t^2+\frac{176}{27}t^3+\cdots\right]$

3. (b) $J_1(t) = \frac{1}{2}t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n+1)!n!}$

(c) $y_2(t) = -J_1(t)\ln t + \frac{1}{t}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_n^{-1})}{2^{2n} n!(n-1)!} t^{2n}\right]$

SECCIÓN 2.9

1. $\frac{1}{s^2}$ 3. $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ 5. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4a^2}\right]$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{s^2+(a+b)^2} + \frac{a-b}{s^2+(a-b)^2}\right]$ 9. $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

15. $y(t) = 2e^t - \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$ 17. $Y(s) = \frac{s^2+6s+6}{(s+1)^3}$

19. $Y(s) = \frac{2s^2+s+2}{(s^2+3s+7)(s^2+1)}$ 23. $y(t) = -\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{4t}$

SECCIÓN 2.10

1. $\frac{n!}{s^{n+1}}$ 3. $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ 5. $\frac{15}{8s^3}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

7. (a) $\frac{\pi}{2} - \arctan s$; (b) $\ln \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}$; (c) $\ln \frac{s-b}{s-a}$ 9. $-\frac{5}{3} + 2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$

11. $\left[\cosh \frac{\sqrt{57}\,t}{2} + \frac{3}{\sqrt{57}} \operatorname{senh} \frac{\sqrt{57}\,t}{2}\right] e^{3t/2}$ 13. $\frac{1}{2}(3-t)t^2 e^{-t}$

15. $\frac{1}{2}(\cos t - te^{-t})$ 19. $y(t) = \cos t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\cos t$ 21. $y(t) = \frac{1}{6}t^3 e^t$

23. $y(t) = 1 + e^{-t} + \left[\cos \frac{\sqrt{3}\,t}{2} - \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right] e^{-t/2}$

SECCIÓN 2.11

1. $y(t) = (2+3t)e^{-t} + 2H_3(t)\left[(t-5) + (t-1)e^{-(t-3)}\right]$

3. $y(t) = 3\cos 2t - \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}(1-\cos 2t) - \frac{1}{4}(1-\cos 2(t-4))H_4(t)$

5. $y(t) = 3\cos t - \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}H_{\pi/2}(t)\left[\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)\operatorname{sen} t - \cos t\right]$

7. $y(t) = \frac{1}{49}\left[(7t-1) + \left(\cos \frac{\sqrt{27}\,t}{2} - \frac{13}{\sqrt{27}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{27}\,t}{2}\right)e^{-t/2} - H_2(t)(7t-1) - H_2(t)\left[13\cos\sqrt{27}\,\frac{(t-2)}{2} + \sqrt{27}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{27}\,(t-2)}{2}\right]e^{-(t-2)/2}\right]$

9. $y(t) = te^t + H_1(t)\left[2+t + (2t-5)e^{t-1}\right] - H_2(t)\left[1+t+(2t-7)e^{t-2}\right]$

SECCIÓN 2.12

3. (a) $y(t)=(\cosh\frac{1}{2}t-3\,\mathrm{senh}\,\frac{1}{2}t)e^{3t/2}-2H_2(t)\,\mathrm{senh}\,\frac{1}{2}(t-2)e^{3(t-2)/2}$

5. $y(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,t-t\cos t)-H_\pi(t)\,\mathrm{sen}\,t$

7. $y(t)=3te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}+3H_3(t)(t-3)e^{-(t-3)}$

SECCIÓN 2.13

1. $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$ 3. $\dfrac{a\,\mathrm{sen}\,at-b\,\mathrm{sen}\,bt}{a^2-b^2}$ 5. $\dfrac{\mathrm{sen}\,at-at\cos at}{2a}$ 7. $t-\mathrm{sen}\,t$

9. $\frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t$ 11. $(t-2)+(t+2)e^{-t}$ 13. $y(t)=t+\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,2t$ 15. $y(t)=\frac{1}{2}t^2$

17. $y(t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t+(1-\frac{3}{2}t)e^{-t}$

SECCIÓN 2.14

1. $x(t)=c_1e^{3t}+3c_2e^{4t},\quad y(t)=c_1e^{3t}+2c_2e^{4t}$

3. $x(t)=[(c_1+c_2)\,\mathrm{sen}\,t+(c_1-c_2)\cos t]e^{-2t}, y(t)=[c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t]e^{-2t}$

5. $x(t)=\frac{7}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{-t},\quad y(t)=\frac{7}{8}e^{3t}-\frac{1}{8}e^{-t}$

7. $x(t)=\cos t\;e^{-t},\quad y(t)=(2\cos t+\mathrm{sen}\,t)e^{-t}$

9. $x(t)=2(t\cos t+3t\,\mathrm{sen}\,t+\mathrm{sen}\,t)e^t,\quad y(t)=-2t\,\mathrm{sen}\,t\;e^t$

11. $x(t)=-4\,\mathrm{sen}\,t-\frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t-t\cos t+5\cos t\ln(\sec t+\tan t),$
$y(t)=-t\,\mathrm{sen}\,t-t\cos t-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2t\cos t-5\,\mathrm{sen}\,t\cos t+5\,\mathrm{sen}^2t$
$-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^3t+5(\cos t-\mathrm{sen}\,t)\ln(\sec t+\tan t)$

SECCIÓN 2.15

1. $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}$ 3. $y(t)=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{2t}+c_4e^{-t}$ 5. $y(t)=0$

7. $y(t)=-3-2t-\frac{1}{2}t^2+(3-t)e^t$ 9. $\psi(t)=1-\cos t-\ln\cos t-\mathrm{sen}\,t\ln(\sec t+\tan t)$

11. $\psi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^t\Big[\mathrm{sen}(t-s)/\sqrt{2}\,\cosh(t-s)/\sqrt{2}$
$-\cos(t-s)/\sqrt{2}\,\mathrm{senh}(t-s)/\sqrt{2}\Big]g(s)\,ds$

13. $\psi(t)=\frac{1}{4}t(e^{-2t}-1)-\frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,t$ 15. $\psi(t)=\frac{1}{4}t^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t\right)\cos t+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}t-\frac{1}{12}t^2\right)\mathrm{sen}\,t\right]$

17. $\psi(t)=t-1+\frac{1}{2}te^{-t}$

Capítulo 3

SECCIÓN 3.1

1. $\dot{x}_1=x_2$
$\dot{x}_2=x_3$
$\dot{x}_3=-x_2^2$

3. $\dot{x}_1=x_2$
$\dot{x}_2=x_3$
$\dot{x}_3=x_4$
$\dot{x}_4=1-x_3$

7. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -1 & 7\end{pmatrix}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(3)=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

9. $\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(-1)=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ **11.** (a) $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

13. (a) $\begin{pmatrix}11\\16\\7\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}-7\\2\\-3\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}5\\10\\1\end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix}-1\\9\\1\end{pmatrix}$ **15.** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\-2&4\end{pmatrix}$

SECCIÓN 3.2

1. Si **3.** No **5.** No **7.** Si **9.** No **11.** Si

SECCIÓN 3.3

1. Linealmente dependiente **3.** Linealmente independiente

5. (a) Linealmente dependiente (b) Linealmente dependiente

7. (b) $y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=e^{-t}$ **9.** $p_1(t)=t-1$, $p_2(t)=t^2-6$

11. $\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ **17.** $x_1=y_1$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_2-y_3)$$

$$x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_2+y_3)$$

SECCIÓN 3.4

1. $\mathbf{x}^1(t)=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{3}\,t/2\;e^{-t/2}\\ \left(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}\,t/2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2\right)e^{-t/2}\end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^2(t)=\begin{bmatrix}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2\;e^{-t/2}\\ \left(\frac{3}{2}\cos\sqrt{3}\,t/2-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t/2\right)e^{-t/2}\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}^1(t)=\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2(t)=\begin{pmatrix}e^t\\2te^t\end{pmatrix}$ **5.** Si **7.** Si **9.** No **11.** (b) No

SECCIÓN 3.5

3. -48 **5.** 0 **7.** -97 **11.** Sin soluciones

13. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\4\end{bmatrix}$

SECCIÓN 3.6

1. $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&2&25\\1&7&10\\10&6&12\end{pmatrix}$, $\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}15&52&0\\5&-1&1\\10&18&6\end{pmatrix}$

3. $AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

9. $\frac{1}{72}\begin{pmatrix}-3&5&9\\18&-6&18\\6&14&-18\end{pmatrix}$ **11.** $\frac{i}{2}\begin{pmatrix}2i&0&-2i\\1-2i&-1&-1+i\\1-2i&1&1+i\end{pmatrix}$

13. $\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&-2i&0\\-1&1&1-i\\1&-1&-1-i\end{pmatrix}$

SECCIÓN 3.7

1. $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_1+2b_2\end{bmatrix}$ **3.** $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2b_2+3b_3\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ **5.** $\mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\\frac{7}{2}\\0\end{bmatrix}$

7. Sin soluciones **9.** $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **11.** $\lambda=1,-1$

13. (a) $\lambda=-1$; (b) $\mathbf{x}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\-7\\6\end{pmatrix}$

SECCIÓN 3.8

1. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{4t}$ **3.** $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}e^{8t}$

5. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-10t}+\left[c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]e^{5t}$

7. $\mathbf{x}(t)=\frac{7}{4}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$

9. $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$ **11.** $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}e^{-2t}$

13. (b) $\mathbf{x}(t)=9\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t-1}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}-7\\2\\-13\end{pmatrix}e^{-(t-1)}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2(t-1)}$

SECCIÓN 3.9

1. $\mathbf{x}(t)=\left[c_1\begin{pmatrix}2\\1-\operatorname{sen}t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\operatorname{sen}t\\\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}\right]e^{-2t}$

3. $\mathbf{x}(t)=e^t\left[c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\\\operatorname{sen}2t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\\operatorname{sen}2t\\-\cos 2t\end{pmatrix}\right]$ **5.** $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\2\cos t+\operatorname{sen}t\end{pmatrix}e^{-t}$

7. $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t\\ \cos\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t\\ -3\cos\sqrt{2}\,t\end{bmatrix}$ **9.** $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}$

SECCIÓN 3.10

1. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+\left[c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}t\\t\\1\end{pmatrix}\right]e^{-t}$

3. $\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+\left[c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-t\\1\\0\end{pmatrix}\right]e^{-t}$ **5.** $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t}$ **7.** $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}1-t\\t\\t\end{pmatrix}e^{2t}$

13. (b) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7e^{t}-5e^{2t}+8e^{-t} & -e^{t}+5e^{2t}-4e^{-t} & 3e^{t}-5e^{2t}-2e^{-t}\\ 21e^{t}-5e^{2t}-16e^{-t} & -3e^{t}+5e^{2t}+8e^{-t} & 9e^{t}-5e^{2t}-4e^{-t}\\ 14e^{t}+10e^{2t}-24e^{-t} & -2e^{t}-10e^{2t}+12e^{-t} & 6e^{t}+10e^{2t}-6e^{-t}\end{bmatrix}$

15. $\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$

SECCIÓN 3.11

1. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}e^{-2t}+5e^{2t}-e^{3t} & 5e^{2t}-5e^{3t} & e^{-2t}-e^{3t}\\ -e^{-2t}+e^{3t} & 5e^{3t} & -e^{-2t}+e^{3t}\\ 4e^{-2t}-5e^{2t}+e^{3t} & -5e^{2t}+5e^{3t} & 4e^{-2t}+e^{3t}\end{bmatrix}$

3. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}6e^{2t}-\cos t-2\operatorname{sen}t & -2e^{2t}+2\cos t+4\operatorname{sen}t & 2e^{2t}-2\cos t+\operatorname{sen}t\\ 3e^{2t}-3\cos t-\operatorname{sen}t & -e^{2t}+6\cos t+2\operatorname{sen}t & e^{2t}-\cos t+3\operatorname{sen}t\\ 5\operatorname{sen}t & -10\operatorname{sen}t & 5\cos t\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}(t+1)e^{-t} & (t+1)e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -te^{-t} & -te^{-t}+e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-t}\\ te^{-t} & te^{-t} & e^{-t}\end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&-1\\3&3&-1\end{pmatrix}$ **9.** $\mathbf{A}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}16&-25&30\\8&-6&-24\\0&13&26\end{pmatrix}$ **11.** No

SECCIÓN 3.12

1. $\mathbf{x}(t)=2e^{t}\begin{pmatrix}t\cos t+3t\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}t\\ -t\operatorname{sen}t\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}-4\operatorname{sen}t-\frac{1}{2}t\operatorname{sen}t-t\cos t+5\cos t\ln(\sec t+\tan t)\\ -t\operatorname{sen}t-t\cos t+\operatorname{sen}t\cos^2 t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\cos t\\ -5\operatorname{sen}t\cos t+5\operatorname{sen}^2 t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 t\\ +5(\cos t-\operatorname{sen}t)\ln(\sec t+\tan t)\end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} 3e^{3t}-2e^{2t}-te^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{3t}-2e^{2t} \end{bmatrix}$ 11. $\psi(t)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2-t+\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

13. $\psi(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$ 17. $\psi(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{3t}$

SECCIÓN 3.13

1. $\mathbf{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}+e^{4t}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}(t)=-\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}-t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t$

5. $\mathbf{x}(t)=e^t\begin{pmatrix} 1-t-t^2 \\ 1-\frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$ 7. $\mathbf{x}(t)=2e^t\begin{pmatrix} t\cos t+3t\,\mathrm{sen}\,t+\mathrm{sen}\,t \\ -t\,\mathrm{sen}\,t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}(t)=\begin{cases} \begin{pmatrix} \cos 2t+\mathrm{sen}\,2t \\ 2\,\mathrm{sen}\,2t \end{pmatrix}, & t<\pi \\ \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \mathrm{sen}\,2t+\cos 2t \end{pmatrix}, & t>\pi \end{cases}$ 11. $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix}e^{2t}$

13. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} t-t^2-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{12}t^5 \\ -\frac{1}{2}t^2 \\ t^2+\frac{1}{6}t^3 \end{bmatrix}$ 15. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \\ 1+2t \end{bmatrix}e^{3t}$

Capítulo 4

SECCIÓN 4.1

1. $x=0, y=0$; $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$

3. $x=0, y=0, z=0$; $x=\frac{c}{d}, y=\frac{a}{b}, z=-\left(\frac{c^2}{d^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$

5. $x=0, y=y_0$; y_0 arbitrario
$x=x_0, y=1$; x_0 arbitrario
$x=x_0, y=-1$; x_0 arbitrario

7. $x=0, y=-2, z=n\pi$

SECCIÓN 4.2

1. Estable 3. Inestable 5. Estable asintóticamente

7. Estable asintóticamente 9. Estable

11. $x(t)=1$ es estable; $x(t)=0$ es inestable

SECCIÓN 4.3

1. $x=0, y=0$ es inestable; $x=1, y=0$ es inestable;
$x=-1, y=0$ es inestable; $x=0, y=2^{1/4}$ es estable;
$x=0, y=-2^{1/4}$ es estable.

3. $x=0, y=1$ es inestable; $x=0, y=-1$ es inestable; $x=1, y=0$ es inestable; $x=-1, y=0$ es estable.

5. $x=0, y=n\pi$ es inestable para los n enteros.

7. Inestable **9.** Inestable **11.** Estable **13.** Estable

15. Inestable **17.** Inestable

SECCIÓN 4.4

1. $y=\cos(x-1)^2$ **3.** $y=\tan x$ **5.** $x^2+y^2=c^2$

7. Los puntos $x=x_0, y=y_0$ con $x_0+y_0=-1$, y las circunferencias $x^2+y^2=c^2$, menos estos puntos.

9. Los puntos $x=0, y=y_0$; $x=x_0, y=0$, y las curvas $y=ce^{-(2/3)e^{3x}}$, $x>0$; $y=ce^{-(2/3)e^{3x}}$, $x<0$.

11. Los puntos $x = 0$, $y = y_0$ y las curvas

$$(by-dx)-\frac{(ad-bc)}{d}\ln|c-dy|=k, \quad x>0$$

$$(by-dx)-\frac{(ad-bc)}{d}\ln|c-dy|=k, \quad x<0$$

13. El punto $x = 0$, $y = 0$; y las curvas $xy^2-\frac{1}{3}x^3=c$.

Sección 4.5.1

3. $\frac{y}{c}-\frac{b}{c^2}\ln(b+cy)=\frac{x^2}{2a}+k$ **5.** $\frac{y}{d}-\frac{x}{c}=\frac{b}{d^2}\ln(b+dy)-\frac{a}{c^2}\ln(a+cx)+k$

SECCIÓN 4.7

13. (b) $y^2=x^2+x^4+c^2$

SECCIÓN 4.8

5. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Obsérvese que todo punto sobre la circunferencia es un punto de equilibrio.

7. Las circunferencias $x^2 + y^2 = (2n + 1)\pi/2$

SECCIÓN 4.9

1. $\varepsilon=-1,1$ **3.** $\varepsilon=-2,2$ **5.** Sin puntos de bifurcación

SECCIÓN 4.10

1. $x=0, y=0$ es inestable; $x=(a/e), y=0$ es estable si $ad<ec$, e inestable si $ad>ec$; $x=(af+bc)/(ef+bd), y=(ad-ec)/(bd+ef)$ existe sólo para $ad>ec$ y es estable.

3. $x_1=0, x_2=0, y=0$; $x_1=c/d, x_2=nc/[d(a_1+a_2)], y=na_2-a_1^2-a_1a_2$; asumiendo que $na_2>a_1^2+a_1a_2$.

5. (b) (i) $y_1=\frac{1+a_1}{1+a_1a_2}, y_2=\frac{1-a_2}{1-a_1a_2}$; (ii) $y_1=1, y_2=0$; (c) $a_2=\frac{1}{3}$

SECCIÓN 4.12

3. (a) $rI+\lambda I^2/2=\gamma\ln S-rS+c$; (b) Si

5. (a) 0.24705; (b) 0.356; (c) 0.45212; (d) 0.60025; (e) 0.74305; (f) 0.77661

SECCIÓN 4.13

7. Either $x(t)\to 0$ or $x(t)\to \dfrac{\beta_1 c-\alpha_1}{\beta_1}$ (for $\beta_1 c-\alpha_1>0$)

Capítulo 5

SECCIÓN 5.1

1. $\lambda_n=\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}$, $y(x)=c\,\mathrm{sen}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$

3. $\lambda=0, y=c$; $\lambda=\dfrac{-n^2\pi^2}{l^2}$, $y(x)=c\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

5. $y(x)=c\,\mathrm{senh}\sqrt{-\lambda_0}\;x$, donde $\mathrm{senh}\sqrt{-\lambda_0}\;\pi=\sqrt{-\lambda_0}\cosh\sqrt{-\lambda_0}\;\pi$;
$y(x)=c\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda_n}\;x$, donde $\tan\sqrt{\lambda_n}\;\pi=\sqrt{\lambda_n}$.

7. $\lambda=-1, y(x)=ce^x$; $\lambda=n^2, y(x)=c[n\cos nx+\mathrm{sen}\,nx]$

SECCIÓN 5.3

1. $u(x,t)=\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\pi x\,e^{-1.71\pi^2t/4}+3\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{2}\pi x\,e^{-(1.71)25\pi^2t/4}$

3. $u(x,t)=3\,\mathrm{sen}\,2\pi x\,e^{(1-4\pi^2)t}-7\,\mathrm{sen}\,4\pi x\,e^{(1-16\pi^2)t}$

5. $u(t,y)=e^{2(t+y)}+e^{-3(t+y)}$

7. $u(t,y)=e^{-5t}e^{-4y}+2e^{-7t}e^{-6y}-14e^{13t}e^{14y}$

9. (a) $X''-\mu X=0$; $Y''-(\mu+\lambda)Y=0$; $T'-\lambda\alpha^2T=0$;
(b) $u(x,y,t)=\mathrm{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{\alpha^2n^2\pi^2(b^2-a^2)t/a^2b^2}$

SECCIÓN 5.4

1. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\pi x}{1}+\dfrac{\mathrm{sen}\,3\pi x}{3}+\dfrac{\mathrm{sen}\,5\pi x}{5}+\dots\right]$

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\pi x}{1}-\dfrac{\mathrm{sen}\,2\pi x}{2}+\dfrac{\mathrm{sen}\,3\pi x}{3}\pm\dots\right]$

5. $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{sen}\dfrac{n\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{n\pi x}{2}+\left(1-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\dfrac{n\pi x}{2}\right]$

7. $f(x)=\dfrac{e^l-1}{2l}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^l(-1)^n-1}{l^2+n^2\pi^2}\left[l\cos\dfrac{n\pi x}{l}-n\pi\,\mathrm{sen}\dfrac{n\pi x}{l}\right]$

9. $f(x)=\dfrac{e^l}{l}+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{l\left(e^l(-1)^n-1\right)}{l^2+n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$

11. $f(x)=\frac{e^{l}-1}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{l}-e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}\left[l\cos\frac{n\pi x}{l}+n\pi\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{l}\right]$

13. $f(x)=\frac{3}{4}\mathrm{sen}\,x-\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,3x$

17. (a) $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

SECCIÓN 5.5

1. $f(x)=\frac{e-1}{e}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos n\pi/e)}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

3. $f(x)=\frac{3a}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a(\cos n\pi/2\ -1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2a}$

5. $f(x)=\frac{l}{4}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[2\cos n\pi/2\ -1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$

7. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n\pi/2\ -(-1)^n\right)\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{2}$

9. $f(x)=\mathrm{sen}\,2x$

11. (a) $\mathrm{sen}\,x=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\dots\right];\quad 0<x<1;$

(b) $\cos x=\frac{4}{\pi}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{2^2-1}+\frac{4\,\mathrm{sen}\,4x}{4^2-1}+\dots\right];\quad 0<x<1;$ (c) No

SECCIÓN 5.6

1. (a) $u(x,t)=\frac{280}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n+1)\pi x/10}{2n+1}e^{-0.86(2n+1)^2\pi^2t/100};$

(b) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\left(1-(-1)^n\cos 10\right)}{n^2\pi^2-100}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{10}e^{-0.86n^2\pi^2t/100};$

(c) $u(x,t)=100\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\,\mathrm{sen}\,n\pi/2}{n^2\pi^2}-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{100}e^{-0.86n^2\pi^2t/100};$

(d) $u(x,t)=\frac{-130}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-\cos 3\pi/10\right)}{n}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{10}e^{-0.86n^2\pi^2t/100}$

5. (b) $u(x,t)=10x+800\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,n\pi/2}{n^2\pi^2}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{10}e^{(1-n^2\pi^2)t}$

SECCIÓN 5.7

1. $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}-\frac{1}{2n+1}\right]\mathrm{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{ct}{2}$

3. $u(x,t)=\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,2n\pi/3}{n^2}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{n\pi ct}{3}$

5. $u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{n\pi t}{10}$

9. $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t);\qquad Y(y)=a_2\cos\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,y+b_2\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\,y$

$X(x)=a_1\cos\mu x+b_1\,\mathrm{sen}\,\mu x\qquad T(t)=a_3\cos\lambda ct+b_3\,\mathrm{sen}\,\lambda ct$

SECCIÓN 5.8

1. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi(x-a)}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$; $c_n=\frac{-2}{b\operatorname{senh} n\pi a/b}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy$

3. $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi(y-b)}{a}$; $c_n=\frac{-2}{a\operatorname{senh} n\pi b/a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$

5. $$u(x,y)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi x}{a}\operatorname{senh}(2n-1)\frac{\pi y}{b}}{(2n-1)\operatorname{senh}(2n-1)\pi b/a}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}(2n-1)\frac{\pi x}{b}\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi y}{b}}{(2n-1)\operatorname{senh}(2n-1)\pi a/b}$$

7. $$u(x,y)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}(2n-1)\pi\frac{x-a}{b}\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi y}{b}}{(2n-1)\operatorname{senh}(2n-1)\pi a/b}$$

9. $$u(x,y)=\frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{senh}\sqrt{1+n^2\pi^2}\,x\operatorname{sen} n\pi y}{n\operatorname{senh}\sqrt{1+n^2\pi^2}}$$

11. $X''+\lambda X=0$; $Y''+\mu Y=0$; $Z''-(\lambda+\mu)Z=0$

Índice

Estabilidad
  asintótica, 376
  de puntos de equilibrio, 379-380
  de una solución, 368, 373
  sistemas lineales, 373

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

